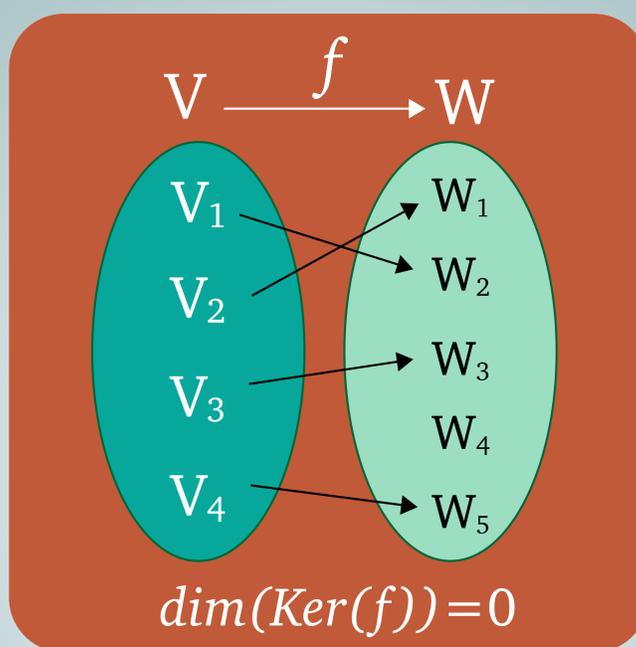


Álgebra

Práctica 11. Aplicaciones lineales (II)



Rodrigo García Manzananas
Neila Campos González
Ana Casanueva Vicente

Departamento de Matemática Aplicada y
Ciencias de la Computación

Este tema se publica bajo Licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



Práctica 11: Aplicaciones lineales (II)

Rodrigo García Manzanos (rodrigo.manzanas@unican.es)

Neila Campos González (neila.campos@unican.es)

Objetivos

- Trabajar con reflexiones y rotaciones
- Dibujar vectores en el plano

Reflexiones

Para obtener el reflejado de un vector dado respecto a un cierto eje de simetría (simetría axial), bastaría con

aplicarle a dicho vector la matriz de Householder $H = I - 2 \frac{\vec{u}\vec{u}^t}{|\vec{u}|^2}$, donde \vec{u} puede ser cualquier vector columna

ortogonal al eje de reflexión/simetría. Por ejemplo, si quisiéramos hallar la matriz de reflexión con respecto al subespacio S de \mathbb{R}^2 cuya ecuación implícita es $x - y = 0$, comenzaríamos por encontrar un vector ortogonal (perpendicular) a S . Sabemos que este vector podría ser simplemente el $(1, -1)$. Por tanto, ya podríamos calcular la matriz H que necesitamos:

```
u = [1 -1]' % vector ortogonal a S
```

```
u = 2x1
     1
    -1
```

```
H = eye(2) - 2*(u*u'/norm(u)^2) % matriz de reflexión (o de Householder)
```

```
H = 2x2
     0.0000    1.0000
     1.0000    0.0000
```

```
% con respecto a S
```

Se puede comprobar fácilmente que la matriz H que acabamos de obtener es correcta. Por un lado, fíjate que al aplicarle H al vector \vec{u} , obtenemos $-\vec{u}$:

```
H*u + u % comprobación 1 (H*u = -u)
```

```
ans = 2x1
10-15 ×
 0.4441
-0.4441
```

Por otro lado, al aplicarle H a un vector $\vec{v} \in S$, obtendremos el propio \vec{v} :

```
v = [5 5]' % vector perteneciente a S (recta y=x)
```

```
v = 2x1
 5
 5
```

```
H*v - v % comprobación 2 (H*v = v)
```

```
ans = 2x1
 0
 0
```

Veamos además que H cumple el resto de propiedades que caracterizan a una matriz de Householder:

```
issymmetric(H) % H es simétrica
```

```
ans = logical
 1
```

```
H' - inv(H) % H es ortogonal
```

```
ans = 2x2
10-15 ×
 0.4441 -0.4441
-0.4441 0.4441
```

```
H^2 - eye(2) % H es involutiva
```

```
ans = 2x2
10-15 ×
-0.4441 0.4441
 0.4441 -0.4441
```

En \mathbb{R}^2 , podríamos llevar cualquier vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ sobre los ejes coordenados conservando su norma.

Por ejemplo, si quisiéramos llevar el vector $\vec{v} = (8, 5)$ sobre el semieje OX^+ , resultando el $\vec{v}' = (|\vec{v}|, 0)$,

sólo habría que encontrar un vector \vec{u} ortogonal al eje de reflexión requerido, que se puede calcular como

$\vec{u} = \vec{v} - \vec{v}'$ (o $\vec{u} = \vec{v}' - \vec{v}$). A partir de \vec{u} es inmediato calcular la matriz de Householder H que habría que

aplicar a \vec{v} :

```
v = [8 5]' % vector inicial
```

```
v = 2x1
```

8
5

```
vprima = [norm(v) 0]' % vector final al que tenemos que llegar
```

```
vprima = 2x1  
 9.4340  
 0
```

```
u = v-vprima % vec. ortogonal al eje de reflex. (también valdría el vprima-v)
```

```
u = 2x1  
-1.4340  
 5.0000
```

```
H = eye(2) - 2*(u*u'/norm(u)^2) % matriz de Householder que buscamos
```

```
H = 2x2  
 0.8480  0.5300  
 0.5300 -0.8480
```

```
H*v % vector resultante
```

```
ans = 2x1  
 9.4340  
-0.0000
```

Si siguiendo el mismo razonamiento, si quisiéramos llevar \vec{v} sobre el semieje OX^- tendríamos que imponer que

$$\vec{v}' = (-|\vec{v}|, 0):$$

```
vprima = [-norm(v) 0]' % vector final al que tenemos que llegar
```

```
vprima = 2x1  
-9.4340  
 0
```

```
u = v-vprima % vec. ortogonal al eje de reflex. (también valdría el vprima-v)
```

```
u = 2x1  
17.4340  
 5.0000
```

```
H = eye(2) - 2*(u*u'/norm(u)^2) % matriz de Householder que buscamos
```

```
H = 2x2  
-0.8480 -0.5300  
-0.5300  0.8480
```

```
H*v % vector resultante
```

```
ans = 2x1  
-9.4340  
 0.0000
```

Del mismo modo, para llevar \vec{v} sobre el semieje OY^+ (conservando su norma), habría que imponer que

$$\vec{v}' = (0, |\vec{v}|):$$

```
vprima = [0 norm(v)]' % vector final al que tenemos que llegar
```

```
vprima = 2x1
          0
          9.4340
```

```
u = v-vprima % vec. ortogonal al eje de reflex. (también valdría el vprima-v)
```

```
u = 2x1
     8.0000
    -4.4340
```

```
H = eye(2) - 2*(u*u'/norm(u)^2) % matriz de Householder que buscamos
```

```
H = 2x2
     -0.5300    0.8480
     0.8480    0.5300
```

```
H*v % vecto resultante
```

```
ans = 2x1
      -0.0000
       9.4340
```

Por último, para llevar \vec{v} sobre el semieje OY^- (conservando su norma), habría que imponer que

$$\vec{v}' = (0, -|\vec{v}|):$$

```
vprima = [0 -norm(v)]' % vector final al que tenemos que llegar
```

```
vprima = 2x1
          0
         -9.4340
```

```
u = v-vprima % vec. ortogonal al eje de reflex. (también valdría el vprima-v)
```

```
u = 2x1
     8.0000
    14.4340
```

```
H = eye(2) - 2*(u*u'/norm(u)^2) % matriz de Householder que buscamos
```

```
H = 2x2
     0.5300   -0.8480
    -0.8480   -0.5300
```

```
H*v % vector resultante
```

```
ans = 2x1
      -0.0000
     -9.4340
```

Rotaciones

En \mathbb{R}^2 , podremos rotar cualquier vector un ángulo α sin más que aplicarle la siguiente matriz, llamada matriz de Givens.

$$G = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Nota: Recuerda que α positivos (negativos) dan lugar a giros en el sentido antihorario (horario).

Por tanto, para obtener la matriz de Givens que coloca a $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ sobre el semieje OX^+ (conservando su norma), bastaría con resolver el siguiente sistema (compatible determinado), en el que las incógnitas son $\text{sen}(\alpha)$ y $\cos(\alpha)$:

$$\begin{bmatrix} -v_2 & v_1 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{sen}(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\vec{v}| \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lógicamente, si lo que nos interesa es colocar $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ sobre el semieje OX^- (conservando su norma), el sistema a resolver sería:

$$\begin{bmatrix} -v_2 & v_1 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{sen}(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -|\vec{v}| \\ 0 \end{bmatrix}$$

Siguiendo el mismo razonamiento, para obtener la matriz de Givens que coloca a $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ sobre el semieje OY^+ (conservando su norma), bastaría con resolver el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} -v_2 & v_1 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{sen}(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ |\vec{v}| \end{bmatrix}$$

Y para colocar a $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ sobre el semieje OY^- (conservando su norma), el sistema a resolver sería:

$$\begin{bmatrix} -v_2 & v_1 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{sen}(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -|\vec{v}| \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, la matriz de Givens que permite colocar el vector $\vec{v} = (8, 5)$ sobre el semieje OX^+ haríamos lo siguiente:

```
% Sobre el semieje OX+  
v = [8 5]'
```

```
v = 2x1  
 8  
 5
```

```
sol = [-v(2) v(1); v(1) v(2)]\ [norm(v) 0]'
```

```
sol = 2x1
    -0.5300
     0.8480
```

```
s = sol(1) % sen(alpha)
```

```
s = -0.5300
```

```
c = sol(2) % sen(alpha)
```

```
c = 0.8480
```

```
G = [c -s; s c] % matriz de Givens necesaria
```

```
G = 2x2
    0.8480    0.5300
   -0.5300    0.8480
```

Podemos ver que G es una matriz ortogonal con determinante 1:

```
G' - inv(G) % G es ortogonal
```

```
ans = 2x2
10-15 ×
   -0.2220    0.1110
   -0.1110   -0.1110
```

```
det(G)
```

```
ans = 1.0000
```

Además:

```
vprima = G*v % vector rotado
```

```
vprima = 2x1
    9.4340
     0
```

```
norm(v) - norm(vprima) % comprobación: la norma se conserva
```

```
ans = 0
```

Representación gráfica

En primer lugar vamos a ver la función *quiver*, que permite dibujar vectores en el plano sin más que especificar las coordenadas del punto de aplicación (en nuestro caso será siempre el origen) y el valor de sus componentes.

```
figure % abre una nueva ventana gráfica
quiver(0,0,8,5,'k') % dibuja el vector (8,5) en color negro
```

Sin embargo, fíjate que por defecto *quiver* reescala el vector que se le pasa (el objetivo es evitar solapes que ensucien el gráfico en el caso de dibujar dos o más vectores a la vez). Para representar el vector con su norma real hay que fijar el argumento opcional de entrada *AutoScale* a *off*.

```
figure % abre una nueva ventana gráfica
quiver(0,0,8,5,'k','AutoScale','off') % dibuja el vector (8,5) en color negro,
% con su norma real
```

Si quisiéramos dibujar más de un vector en un único gráfico podríamos utilizar la orden *hold on* para indicarle a MATLAB que continúe dibujando en la última venta gráfica activa.

```
figure % abre una nueva ventana gráfica
quiver(0,0,-pi/2,2,'k','AutoScale','off') % dibuja el vector (-pi/2,2) en
% color negro, con su norma real
hold on % continua dibujando sobre la misma ventana gráfica
quiver(0,0,2,-1,'b','AutoScale','off') % dibuja el vector (2,-1) en color azul,
% con su norma real
```

Para cerrar la última ventana gráfica activa puedes utilizar la función *close*.

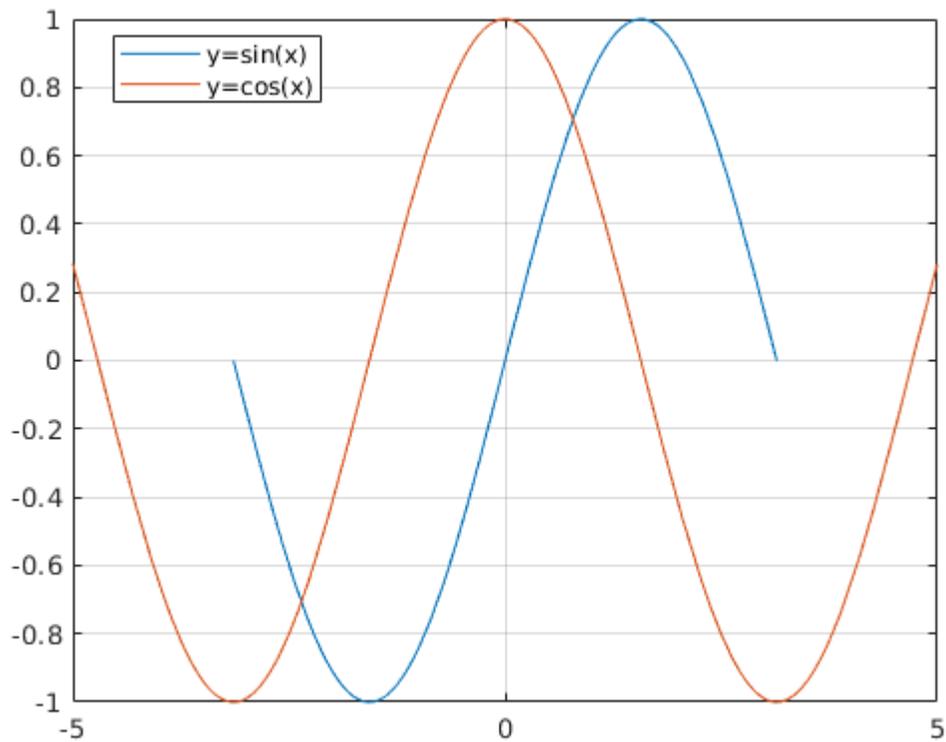
```
close
```

Para cerrar simultáneamente todas las ventanas gráficas que estén abiertas, *close all*.

```
close all
```

En segundo lugar vamos a ver la función *fplot*, que permite representar gráficamente cualquier función matemática definida como tipo *handle*, para lo cual hay que especificar la variable independiente mediante el símbolo *@*.

```
figure % abre una nueva ventana gráfica
fplot(@(x) sin(x), [-pi pi]) % dibujo la función sin(x) en el intervalo [-pi,pi]
hold on % continuo dibujando sobre la misma ventana gráfica
fplot(@(x) cos(x)) % dibuja la función cos(x) en un intervalo que asigna
% automáticamente MATLAB
legend('y=sin(x)', 'y=cos(x)', 'Location', 'best') % añadido leyenda
grid on % añadido rejilla en el fondo
```



Ahora ya estamos en condiciones de representar gráficamente el efecto de las reflexiones y los giros en \mathbb{R}^2 .

Por ejemplo, podríamos dibujar qué ocurre con el vector $\vec{v} = (1, 7)$ si lo quisiéramos reflejar con respecto a la recta $y = -\pi x$.

```
v = [1 7]' % vector a reflejar
```

```
v = 2x1
     1
     7
```

```
u = [-pi -1]' % vector ortogonal al eje de simetría
```

```
u = 2x1
    -3.1416
    -1.0000
```

```
H = eye(2) - 2*(u*u' / norm(u)^2) % matriz de Householder
```

```
H = 2x2
    -0.8160    -0.5781
    -0.5781     0.8160
```

```
vprima = H*v % vector reflejado
```

```
vprima = 2x1
    -4.8624
     5.1340
```

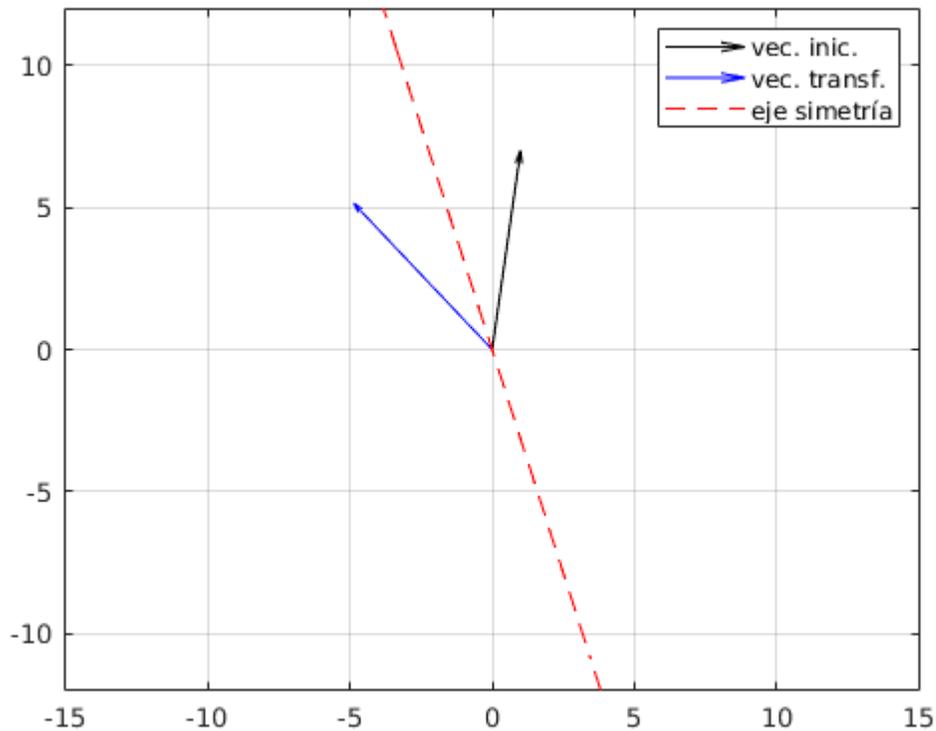
```
norm(v) - norm(vprima) % comprobación de que la norma se conserva
```

```
ans = -8.8818e-16
```

```
H*u + u % comprobación: H convierte el vector u en -u
```

```
ans = 2x1  
10-15 ×  
0  
-0.2220
```

```
figure  
quiver(0,0,v(1),v(2),'k','AutoScale','off') % vector inicial  
hold on  
quiver(0,0,vprima(1),vprima(2),'b','AutoScale','off') % vector transformado  
hold on  
fplot(@(x) -pi*x,'r','LineStyle','--') % eje de simetría  
axis equal % iguala el tamaño de los dos ejes coordenados  
% para facilitar la visualización  
legend({'vec. inic.','vec. transf.','eje simetría'},'Location','best') % añadido leyenda  
grid on % añadido rejilla en el fondo
```



Ejercicios propuestos

Ejercicio 1:

En \mathbb{R}^2 , halla la matriz de reflexión que sitúa al vector $\vec{v} = (-1, 2)$ sobre:

- El semieje OX^-
- El semieje OY^-
- La recta $y = -x$, en el segundo cuadrante

En todos los casos, halla las coordenadas del nuevo vector tras la transformación aplicada.

Ejercicio 2:

Repite el ejercicio 1, pero utilizando matrices de giro.

Ejercicio 3:

En \mathbb{R}^2 , encuentra la matriz de Householder que permite reflejar el vector $\vec{v} = (-1, -3)$ con respecto a la recta $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x$. Representa, en una misma figura, el vector inicial \vec{v} , el eje de simetría y el vector \vec{v}' resultante.

Ejercicio 4:

En \mathbb{R}^2 , encuentra la matriz de Givens que permite situar el vector $\vec{v} = (-1, -3)$ sobre la recta $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x$, en el cuarto cuadrante. Representa, en una misma figura, el vector inicial \vec{v} y el \vec{v}' resultante.