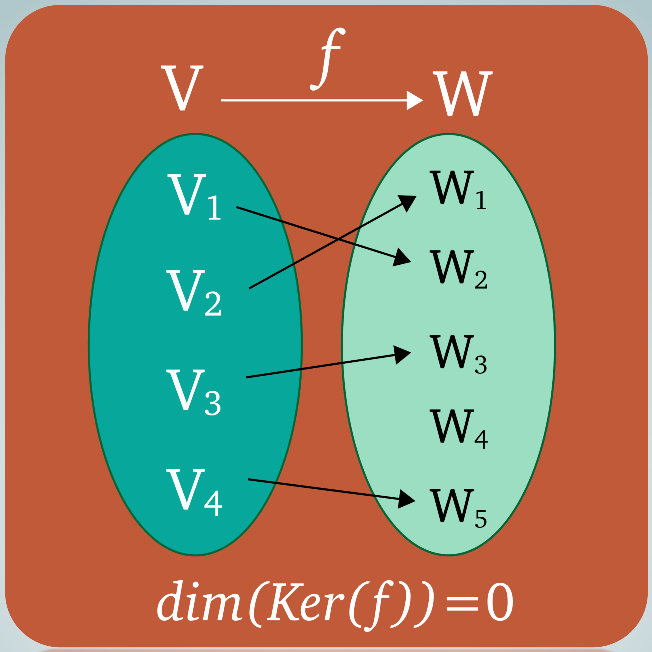
Álgebra

Práctica 5. Sistemas de ecuaciones lineales (II)



Rodrigo García Manzanas
Neila Campos González
Ana Casanueva Vicente

Departamento de Matemática Aplicada y
Ciencias de la Computación

Grado en Ingeniería Química

G320: Álgebra

Práctica 5: Sistemas de ecuaciones lineales (II)

Rodrigo García Manzanas (rodrigo.manzanas@unican.es)

Neila Campos González (neila.campos@unican.es)

Objetivos

- Resolución de sistemas utilizando factorización de matrices
- Resolución de sistemas mediante métodos iterativos

Resolución de sistemas utilizando factorización de matrices

En primer lugar, vamos a resolver el sistema del apartado *b)* del ejercicio *10* de la hoja de problemas utilizando la factorización LU:

$$\begin{cases} x - 2y - 3z &= 2 \\ 2x + y + z &= 1 \\ x + 3y - 2z &= -1 \end{cases}$$

```
A = [1 -2 -3; 2 1 1; 1 3 -2];  % matriz coefs.
b = [2 1 -1]';  % términos indep.
[rank(A) rank([A b])]  % R-F: S.C.D.
```

```
ans = 1×2
     3     3
```

```
[L, U, P] = lu(A)  % factorizacón PA = LU
```

```
L = 3×3
    1.0000         0         0
    0.5000    1.0000         0
    0.5000   -1.0000    1.0000
U = 3×3
    2.0000    1.0000    1.0000
         0   -2.5000   -3.5000
         0         0   -6.0000
P = 3×3
     0     1     0
     1     0     0
     0     0     1
```

```
P*A - L*U  % comprobación factorización (PA=LU)
```

```
ans = 3×3
     0     0     0
     0     0     0
     0     0     0
```

Vemos que la matriz P no es la identidad, lo que quiere decir que MATLAB ha realizado algún intercambio de filas en el proceso de escalonamiento de A. Sabemos que en estas circunstancias se cumplirá la factorización $PA = LU$, o lo que es lo mismo, $A = P^{-1}LU$. Por tanto, el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ podrá escribirse como $P^{-1}LU\vec{x} = \vec{b}$. Si llamamos $U\vec{x} = \vec{y}$, podremos descomponerlo en dos subsistemas (compatibles determinados) cuya resolución es muy sencilla:

- $1)\ U\vec{x} = \vec{y}$
- $2)\ P^{-1}L\vec{y} = \vec{b}$

```
%% Resuelvo 2)
y = inv(P)*L\b
```

```
y = 3×1
    1.0000
    1.5000
         0
```

```
%% Resuelvo 1)
sol = U\y  % solución: (x=4/5, y=-3/5, z=0)
```

```
sol = 3×1
    0.8000
   -0.6000
         0
```

```
A*sol - b  % comprobación
```

```
ans = 3×1
10^-15 ×
         0
         0
    0.2220
```

Resolvamos ahora el sistema del apartado *a)* del ejercicio *11* utilizando la factorización de Cholesky:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y + z & = & 1 \\ -x + 5y - 5z & = & 0 \\ x - 5y + 6z & = & 1 \end{array}\right.$$

```
A = [1 -1 1; -1 5 -5; 1 -5 6];  % matriz de coefs.
b = [1 0 1]';  % términos indep.
[rank(A) rank([A b])]  % R-F: S.C.D.
```

```
ans = 1×2
```

```
     3     3
```

Antes de nada, tendremos que comprobar la matriz A admite factorización de Cholesky.

```
issymmetric(A)  % A simétrica
```

```
ans = logical
   1
```

```
[det(A(1,1)), det(A(1:2,1:2)), det(A)]  % A definida positiva
```

```
ans = 1×3
     1     4     4
```

En estas condiciones se cumplirá que $A = LL^t$, siendo L una matriz triangular inferior.

```
L = chol(A, 'lower')  % factorización de Cholesky
```

```
L = 3×3
     1     0     0
    -1     2     0
     1    -2     1
```

```
A - L*L'  % comprobación factorización
```

```
ans = 3×3
     0     0     0
     0     0     0
     0     0     0
```

Por tanto, el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ podrá escribirse como $LL^t\vec{x} = \vec{b}$. Si llamamos $L^t\vec{x} = \vec{y}$, podremos descomponerlo en dos subsistemas (compatibles determinados) cuya resolución es muy sencilla (comprueba que son triangulares):

- $1)\ \ L^t\vec{x} = \vec{y}$
- $2)\ \ L\vec{y} = \vec{b}$

```
%% Resuelvo 2)
y = L\b
```

```
y = 3×1
    1.0000
    0.5000
    1.0000
```

```
%% Resuelvo 1)
sol = L'\y  % solución: (x=5/4, y=5/4, z=1)
```

```
sol = 3×1
    1.2500
    1.2500
    1.0000
```

```
A*sol - b  % comprobación
```

```
ans = 3×1
     0
     0
     0
```

Resolución de sistemas mediante métodos iterativos

En esta sección nos centraremos en los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel. Pero antes, haremos una breve introducción al uso de funciones en MATLAB. Una **función** es un programa que establece una comunicación con el exterior mediante argumentos de entrada y salida. Las funciones deben guardarse en un fichero con el mismo nombre que la propia función y extensión **.m**. La estructura de cualquier función en MATLAB es la siguiente:

```
function [argumentos de salida] = nombre_funcion(argumentos ...
    de entrada)
% comentarios
instrucciones
end
```

Por ejemplo, la función que se muestra a continuación permitiría calcular el área de un círculo conocido su radio:

```
function [A] = area_circ(r)
     A = pi*r^2;
end
```

Para que MATLAB renonozca esta función tenemos dos opciones:

- Situarnos en la misma ruta (directorio) en la que hayamos salvado la función. Esta opción sólo será válida mientras permanezcamos en el mismo directorio.
- Utilizar el comando *addpath* para incluir en memoria la ruta (directorio) en la que hayamos guardado la función:

```
addpath directorio_donde_has_salvado_la_funcion
```

A partir de este momento, podremos llamar a la función desde la línea de comandos:

```
area_circ(5)   % area de un circulo de radio = 5 unidades
```

Para aplicar los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel necesitaremos las funciones *Jacobi* y *GaussSeidel*, respectivamente. Las tienes colgadas en *Moodle;* descárgalas a tu ordenador y utiliza el comando *addpath* para cargarlas en memoria.

A partir de este momento será inmediato resolver sistemas *cuadrados* (mismo número de ecuaciones que de incógnitas) por cualquiera de estos métodos. Como puedes ver, ambas funciones requieren como argumentos de entrada la matriz de coeficientes, el vector de términos independientes, una solución inicial (cualquiera) y el error máximo que estamos dispuestos a cometer con la solución aproximada (haz un *help* de ambas funciones).

Como sabes, la convergencia de los algoritmos de Jacobi y Gauss-Seidel sólo está asegurada para sistemas cuya matriz de coeficientes sea *diagonalmente dominante*. Por tanto, antes de resolver el sistema que aparece a continuación por cualquiera de ambos métodos, conviene comprobar que efectivamente la matriz de coeficientes sea diagonalmente dominante:

$$\begin{cases} 10x - y - 2z &= 6 \\ x + 5y - 3z &= 4 \\ 4x - 2y - 8z &= 5 \end{cases}$$

```
A = [10 -1 -2; 1 5 -3; 4 -2 -8]  % efectivamente, A es diagonal. dominante
```

```
A = 3×3
    10    -1    -2
     1     5    -3
     4    -2    -8
```

Una vez hemos comprobado que la convergencia está asegurada, es inmediato resolver el sistema:

```
b = [6 4 5]'; x0 = [0 0 0]'; err = 0.001;
% Jacobi
[sol_Jacobi, niter_Jacobi] = Jacobi(A, b, x0, err)  % sol. aproximada (10
```

```
sol_Jacobi = 3×1
    0.5510
    0.4175
   -0.4539
niter_Jacobi = 10
```

```
% iteraciones)
A*sol_Jacobi - b  % comprobación
```

```
ans = 3×1
10^-3 ×
   -0.2291
    0.0361
   -0.3630
```

```
% Gauss-Seidel
[sol_GaussSeidel, niter_GaussSeidel] = GaussSeidel(A, b, x0, err)  % sol. aprox.
```

```
sol_GaussSeidel = 3×1
    0.5510
    0.4174
   -0.4539
niter_GaussSeidel = 6
```

```
% (6 iteraciones)
A*sol_GaussSeidel - b  % comprobación
```

```
ans = 3×1
10^-3 ×
    0.1827
   -0.3823
         0
```

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1:

Si se puede, resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 11 & -9 \\ 4 & 0 & -5 & 0 \\ 11 & -5 & 3 & -3 \\ -9 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- *a)* Utilizando la factorización LU
- *b)* Utilizando la factorización de Cholesky

Ejercicio 2:

Resuelve por Jacobi y por Gauss-Seidel los siguientes sistemas. ¿Cuántas iteraciones has necesitado para llegar a una solución aproximada (con un error de 0.001) partiendo del vector solución $\vec{0}$ en cada caso? Prueba qué ocurre al comenzar el proceso iterativo desde distintas soluciones iniciales.

a) $\left\{ \begin{array}{rcr} 3x - y + z & = & 4 \\ 2x + 5y + 2z & = & -5 \\ x + 2y + 4z & = & 20 \end{array} \right.$

b) $\left\{ \begin{array}{rcr} 2x & = & 3 \\ x + 1.5y & = & 4.5 \\ -3y + 0.5z & = & -6.6 \\ 2x - 2y + z + t & = & 0.8 \end{array} \right.$

c) $\left\{ \begin{array}{rcr} 2x - y + z & = & 1 \\ 3x + 3y + 9z & = & 0 \\ 3x + 3y + 5z & = & 4 \end{array} \right.$