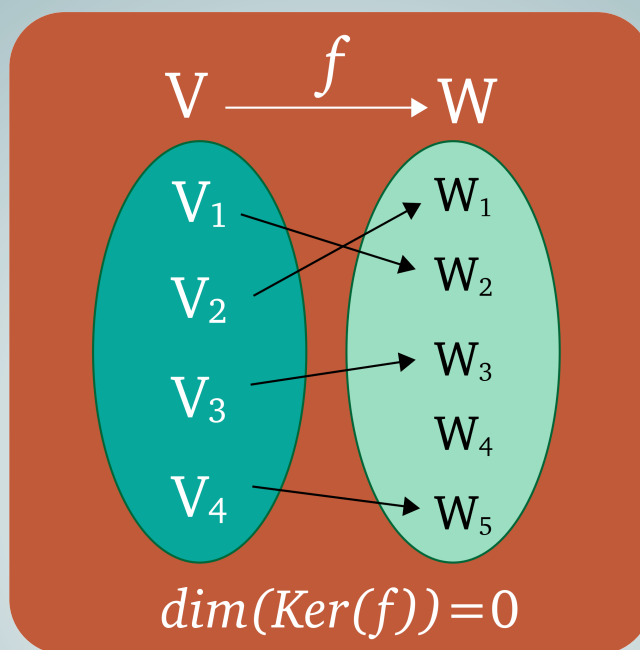


Álgebra

Práctica 7. Espacios vectoriales (II)



Rodrigo García Manzananas
Neila Campos González
Ana Casanueva Vicente

Departamento de Matemática Aplicada y
Ciencias de la Computación

Este tema se publica bajo Licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)





Práctica 7: Espacios vectoriales (II)

Rodrigo García Manzanos (rodrigo.manzanos@unican.es)

Neila Campos González (neila.campos@unican.es)

Objetivos

- Calcular la suma e intersección de subespacios
- Comprobar si dos subespacios están o no en suma directa
- Obtener subespacios complementarios

Intersección de subespacios

Sean S y T dos subespacios de \mathbb{R}^4 dados por sus ecuaciones implícitas:

$$S : \left. \begin{array}{l} x + y - z - t = 0 \\ 2x + 2y - z - t = 0 \end{array} \right\} \quad T : \left. \begin{array}{l} x - y = 0 \\ z - t = 0 \end{array} \right\}$$

El subespacio $S \cap T$ se calcula resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de S y las de T , ya que cualquier elemento de la intersección estará a la vez en S y en T , y por tanto, verificará ambos conjuntos de ecuaciones simultáneamente.

```
coefImpS = [1 1 -1 -1; 2 2 -1 -1]; % coefs. eqs. implícitas S
coefImpT = [1 -1 0 0; 0 0 1 -1]; % coefs. eqs. implícitas T
baseSinterT = null([coefImpS; coefImpT], 'r') % resuelvo el sistema homogéneo -->
```

```
baseSinterT =
```

```
4x0 empty double matrix
```

```
% sólo tiene la solución trivial, por lo que el subespacio intersección
% está compuesto tan sólo por el vector 0 --> S y T están en suma directa
```

Suma de subespacios

Para calcular el subespacio $S + T$, obtendremos en primer lugar una base de S y otra de T . A partir de ellas, es inmediato formar un sistema generador de $S + T$ (sólo habrá que unir ambas bases). Finalmente, para obtener una base de $S + T$, sólo nos quedará identificar los vectores del sistema generador que sean linealmente independientes (si hubiera algún vector linealmente dependiente de los demás, habría que eliminarlo).

```
baseS = null(coefImpS, 'r') % base de S --> dim(S)=2
```

```
baseS = 4x2
-1     0
 1     0
 0    -1
 0     1
```

```
baseT = null(coefImpT, 'r') % base de T --> dim(T)=2
```

```
baseT = 4x2
 1     0
 1     0
 0     1
 0     1
```

```
genST = [baseS baseT] % sistema generador de S+T
```

```
genST = 4x4
-1     0     1     0
 1     0     1     0
 0    -1     0     1
 0     1     0     1
```

```
rank(genST) % rango máximo --> sistema libre
```

```
ans = 4
```

```
% Por tanto, genST será una base del subespacio suma (S+T), es decir:
baseST = genST % dim(S+T)=4
```

```
baseST = 4x4
-1     0     1     0
 1     0     1     0
 0    -1     0     1
 0     1     0     1
```

```
% Al haber 4 vectores en esta base, esto quiere decir que S+T será
% todo  $\mathbb{R}^4$  --> S y T son subespacios complementarios, puesto que
%  $\dim(S)+\dim(T) = \dim(S+T)$  y  $S+T=\mathbb{R}^4$ 
```

Búsqueda de subespacios complementarios

Sea el subespacio $S : \left. \begin{matrix} -143x - 54y - 44z = 0 \\ t = 0 \end{matrix} \right\}$ de \mathbb{R}^5 . Para encontrar un subespacio complementario (o suplementario) de S comenzaremos por obtener una base de S :

```
coefImpS = [-143 -54 0 0 -44; 0 0 0 1 0];
baseS = null(coefImpS, 'r') % dim(S)=3
```

```
baseS = 5x3
-0.3776      0   -0.3077
 1.0000      0      0
 0      1.0000      0
 0      0      0
 0      0      1.0000
```

```
rank(baseS)
```

```
ans = 3
```

A partir de aquí, se trata de extender esta base añadiendo nuevos vectores que sean linealmente independientes de los anteriores hasta formar una base del espacio total, \mathbb{R}^5 en este caso. Para ello podemos elegir cualquier vector, por ejemplo, los de la base canónica de \mathbb{R}^5 .

```
rank([baseS, [1 0 0 0 0]']) % ya tenemos el primer vector
```

```
ans = 4
```

```
% de la base del complementario: (1,0,0,0,0)
rank([baseS, [1 0 0 0 0]', [0 1 0 0 0]']) % el vector
```

```
ans = 4
```

```
% (0,1,0,0,0) no nos sirve, ya que no es L.I. de los demás
rank([baseS, [1 0 0 0 0]', [0 0 1 0 0]']) % el vector
```

```
ans = 4
```

```
% (0,0,1,0,0) no nos sirve, ya que no es L.I. de los demás
rank([baseS, [1 0 0 0 0]', [0 0 0 1 0]']) % ya tenemos el
```

```
ans = 5
```

```
% segundo vector que necesitábamos para la base del
% complementario: (0,0,0,1,0)
```

Los vectores que hemos añadido a los de la base de S forman una base del complementario que buscábamos: $\{(1,0,0,0,0), (0,0,0,1,0)\}$

Nota: Recuerda que dados dos subespacios S y T cualesquiera siempre se cumplirá la fórmula de Grassmann:
 $\dim(S+T)=\dim(S)+\dim(T)-\dim(S \cap T)$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1:

En \mathbb{R}^4 , dados los subespacios $S : \{(x, y, z, t) : x = z, y = t\}$ y $T : \{(\alpha, 0, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, se pide:

- a) Halla una base del subespacio $S + T$. ¿Cuál es su dimensión?
- b) Halla una base del subespacio $S \cap T$. ¿Cuál es su dimensión?
- c) ¿Están S y T en suma directa?

Ejercicio 2:

Dado el subespacio $S : \{(x, y, z, t, p) : x + y + z - t = 0, x - y + z - t = 0\}$ de \mathbb{R}^5 , se pide:

- a) Halla otro subespacio T tal que $S \oplus T = \mathbb{R}^5$. ¿Cuáles son las dimensiones de S y T ?
- b) Obtén las ecuaciones implícitas de T .
- c) Comprueba que S y T están en suma directa.

Ejercicio 3:

Sean S y T los subespacios de \mathbb{R}^4 formados por los vectores de la forma $(a + b, 0, a, b)$ y $(m, p, 0, m)$, respectivamente. Se pide:

- a) Halla el subespacio $S \cap T$.
- b) Halla el subespacio $S + T$.
- c) En caso de que S y T no estén en suma directa, halla dos subespacios complementarios de $S + T$.

Ejercicio 4

Dados los siguientes subespacios de \mathbb{R}^5 :

$$S : \begin{cases} 10x - 22y + 32z - 7t + 4p = 0 \\ 11x - 3y + 11z - 4t - 27p = 0 \\ 3x - y + 9z - 8t + 14p = 0 \end{cases} \quad T : (14\alpha - 12\beta, 7\alpha, -12\alpha - 51\beta, 18\beta, 19\alpha - 4\beta)$$

Se pide:

- a) $S + T$
- b) $S \cap T$
- c) ¿Son S y T subespacios complementarios?