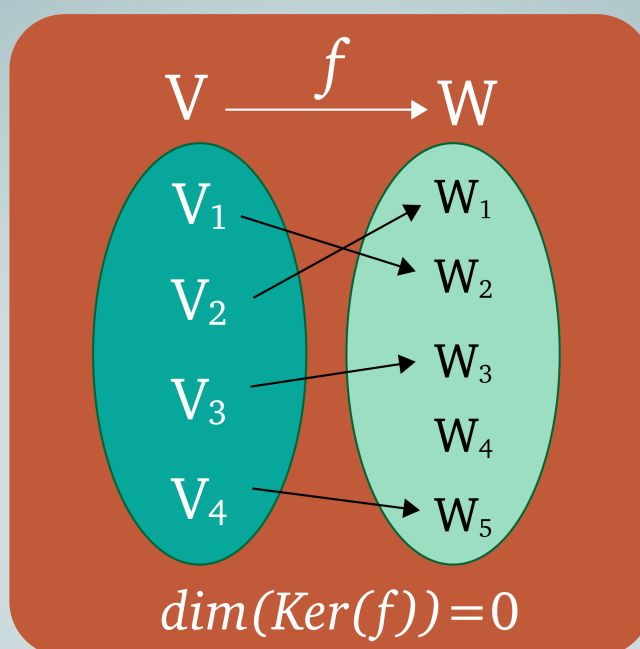


# Álgebra

## Práctica 8. Espacio euclídeo (I)



**Rodrigo García Manzananas**  
**Neila Campos González**  
**Ana Casanueva Vicente**

Departamento de Matemática Aplicada y  
Ciencias de la Computación

Este tema se publica bajo Licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)





## Práctica 8: Espacio euclídeo (I)

Rodrigo García Manzanás (rodrigo.manzanas@unican.es)

Neila Campos González (neila.campos@unican.es)

### Objetivos

- Operar con productos escalares en MATLAB
- Obtener el complemento ortogonal de un subespacio dado
- Calcular bases ortogonales (y ortonormales)
- Calcular y utilizar la matriz de proyección sobre un cierto subespacio

### Producto escalar

En MATLAB, se puede calcular el producto escalar usual de  $\mathbb{R}^n$  con la función `dot`. Por ejemplo, en  $\mathbb{R}^3$ , el producto escalar de los vectores  $\vec{u} = (4, 0, 3)$  y  $\vec{v} = (1, -2, 3)$  se obtendría así:

```
u = [4 0 3]'; % vector u
v = [1 -2 3]'; % vector v
dot(u, v) % producto escalar usual
```

```
ans = 13
```

Si estamos trabajando con productos escalares que impliquen el cálculo de integrales, debemos saber que la función `int` de MATLAB se utiliza para el cálculo integral (en modo simbólico). Por ejemplo, si quisiéramos calcular  $\int_0^1 x^2 dx$ , haríamos:

```
syms x real % hay que definir la variable simbólica sobre la que integro
int(x^2, 0, 1) % hay que que darle a 'int' la función a integrar
```

```
ans =
```

$$\frac{1}{3}$$

```
% y los límites de integración
```

La norma o módulo de un vector puede calcularse fácilmente con la función *norm*. Eso sí, *norm* considera el producto escalar usual, por lo que, si estuviésemos trabajando con otro tipo de producto, habría que calcularla "a mano".

```
norm(u) % norma del vector u (considerando el producto escalar usual)
```

```
ans = 5
```

```
sqrt(dot(u, u)) % comprobamos que obtenemos el mismo resultado
```

```
ans = 5
```

Por tanto, normalizar el vector  $\vec{u}$  sería tan fácil como:

```
u_norm = u/norm(u) % vector normalizado
```

```
u_norm = 3x1
    0.8000
         0
    0.6000
```

```
norm(u_norm) % efectivamente, el módulo del vector normalizado es 1
```

```
ans = 1
```

## Cálculo de subespacios ortogonales

Sea  $S$  un subespacio de  $\mathbb{R}^4$  dado en su forma paramétrica,  $S = \{(\alpha, \alpha, \beta, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ . Para encontrar el complemento ortogonal (o simplemente ortogonal) de  $S$ ,  $S^\perp$ , tendremos que buscar todos los vectores ortogonales a  $S$ . Partiremos, para ello, de una base de  $S$ :

```
baseS = [1 1 0 0; 0 0 1 1]' % base de S
```

```
baseS = 4x2
    1    0
    1    0
    0    1
    0    1
```

$S^\perp$  estará formado por los vectores  $(x, y, z, t)$  que satisfagan las siguientes ecuaciones:

$$(1, 1, 0, 0) \cdot (x, y, z, t) = 0$$

$$(0, 0, 1, 1) \cdot (x, y, z, t) = 0$$

Si consideramos el producto escalar usual, esto se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, para hallar una base de  $S^\perp$  bastaría con resolver el sistema homogéneo que tiene como matriz de coeficientes los vectores de la base de  $S$  (colocados por filas):

```
baseS_ortog = null(baseS', 'r') % base de S_ortog:
```

```
baseS_ortog = 4x2
```

```
-1    0
 1    0
 0   -1
 0    1
```

```
% {(-1,1,0,0), (0,0,-1,1)}
```

Como vemos, la base de  $S^\perp$  está compuesta por dos vectores, por lo que  $\dim(S^\perp) = 2$ . Esto era de esperar, puesto que ya vimos que  $\dim(S) = 2$ , y sabemos que, por ser ortogonales,  $\dim(S) + \dim(S^\perp) = 4$ . Efectivamente:

```
rank([baseS baseS_ortog]) % la unión de la base de S
```

```
ans = 4
```

```
% y la base de S_ortog forman una base del espacio total, R^4
```

Podemos comprobar fácilmente que  $S$  y  $S^\perp$  son en efecto ortogonales viendo que el producto escalar de los vectores de sus bases (las combinaciones de todos con todos) es 0:

```
baseS'*baseS_ortog % las dimensiones tienen que ser
```

```
ans = 2x2
```

```
0    0
 0    0
```

```
% las adecuadas para el producto matricial
```

### Cálculo de bases ortogonales (y ortonormales)

Si el subespacio viene dado por sus ecuaciones implícitas, la función `null` (sin el argumento de entrada opcional `'r'`) actuando sobre la matriz de los coeficientes nos devuelve una base ortonormal. Por ejemplo, para el subespacio  $S = \{(x, y, z, t, r) : 2x - y - z = 0, 2x - 3z + t = 0\}$ :

```
coefImpS = [2 -1 -1 0 0; 2 0 -3 1 0]; % coefs. eqs. implícitas S
baseS = null(coefImpS, 'r') % base de S
```

```
baseS = 5x3
```

```
1.5000   -0.5000         0
 2.0000   -1.0000         0
 1.0000         0         0
 0    1.0000         0
 0         0    1.0000
```

```
dot(baseS(:,1), baseS(:,2)) % vemos que NO es ORTOGONAL --> NO será ORTONORMAL
```

```
ans = -2.7500
```

```
baseortonS = null(coefImpS) % base ORTONORMAL de S
```

```
baseortonS = 5x3
    0.5553    -0.0771     0
    0.6653    -0.3967     0
    0.4453     0.2426     0
    0.2253     0.8819     0
         0         0    1.0000
```

```
% Comprobación ORTOGONALIDAD
dot(baseortonS(:,1), baseortonS(:,2))
```

```
ans = -2.7756e-17
```

```
dot(baseortonS(:,1), baseortonS(:,3))
```

```
ans = 0
```

```
dot(baseortonS(:,2), baseortonS(:,3))
```

```
ans = 0
```

```
% Comprobación ORTONORMALIDAD
norm(baseortonS(:,1))
```

```
ans = 1
```

```
norm(baseortonS(:,2))
```

```
ans = 1
```

```
norm(baseortonS(:,3))
```

```
ans = 1
```

Si el subespacio viene dado por su forma paramétrica, y siempre que estemos trabajando con el producto escalar usual, podremos obtener una base ortonormal partiendo de una base cualquiera del subespacio. Para ello utilizaremos la función *orth* (que implementa internamente el método de Gram-Schmidt), que ortonormaliza los vectores columna de una matriz. Por ejemplo, siguiendo con el mismo subespacio del ejemplo anterior,  $S = \{(1.5\alpha - 0.5\beta, 2\alpha - \beta, \alpha, 0, \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ :

```
baseS = [1.5 2 1 0 0; -0.5 -1 0 1 0; 0 0 0 0 1]'; % base NO ORTONORMAL de S
baseorton2S = orth(baseS) % base ORTONORMAL de S
```

```
baseorton2S = 5x3
   -0.5410    0.1471     0
   -0.7676   -0.1037     0
   -0.3143    0.3979     0
    0.1390    0.8996     0
         0         0   -1.0000
```

Fíjate que la base devuelta por *orth* es distinta a la que se obtiene con *null*, pero igual de válida.

```
% Comprobación ORTOGONALIDAD
dot(baseorton2S(:,1), baseorton2S(:,2))
```

```
ans = -2.7756e-17
```

```
dot(baseorton2S(:,1), baseorton2S(:,3))
```

```
ans = 0
```

```
dot(baseorton2S(:,2), baseorton2S(:,3))
```

```
ans = 0
```

```
% Comprobación ORTONORMALIDAD  
norm(baseorton2S(:,1))
```

```
ans = 1
```

```
norm(baseorton2S(:,2))
```

```
ans = 1
```

```
norm(baseorton2S(:,3))
```

```
ans = 1
```

**Nota:** Si los vectores columna que se le pasan a *orth* no fuesen linealmente independientes, la propia función se encarga de eliminar los que sean dependientes y ortonormaliza el resto.

## Matriz de proyección

La matriz de proyección sobre un subespacio  $S$  se obtiene como  $P_S = A(A^tA)^{-1}A^t$ , donde  $A$  es una matriz que contiene en sus columnas los vectores de una base (cualquiera, no tiene porqué ser ortogonal/ortonormal) de  $S$ . Por tanto, para hallar la matriz de proyección sobre el subespacio  $S = \langle (2, -1, 1), (-1, 2, 1) \rangle$ :

```
baseS = [2 -1 1; -1 2 1]'; % base de S (es un sist. gen. y los vectores son L.I.).  
dot(baseS(:,1), baseS(:,2)) % vemos que esta base NO es ortogonal
```

```
ans = -3
```

```
PS = baseS*inv(baseS'*baseS)*baseS' % matriz de proyección sobre S
```

```
PS = 3x3  
    0.6667    -0.3333    0.3333  
   -0.3333    0.6667    0.3333  
    0.3333    0.3333    0.6667
```

Podemos ver que  $P_S$  cumple las tres propiedades que ha de cumplir toda matriz de proyección:

```
% 1) Es cuadrada  
% 2) Es simétrica  
% 3) Es idempotente (Ps=Ps^2)  
PS - PS^2
```

```
ans = 3x3  
10-15 ×  
   -0.1110         0         0  
         0   -0.1110         0  
         0         0         0
```

Acabamos de ver que  $P_S$  es la matriz de proyección sobre el subespacio cuya base es  $\{(2, -1, 1), (-1, 2, 1)\}$ .

Una vez hemos calculado  $P_S$ , sería inmediato proyectar cualquier vector  $\vec{v}$  sobre  $S$ ; tan sólo habría que aplicarle la matriz  $P_S$  (es decir, multiplicar  $P_S$  por  $\vec{v}$ ). Por ejemplo, para proyectar ortogonalmente el vector  $(3, 4, 5)$  sobre  $S$ :

```
v = [3 4 5]'; % vector a proyectar
PS*v % proyección de v sobre S
```

```
ans = 3x1
     2.3333
     3.3333
     5.6667
```

## Ejercicios propuestos

### Ejercicio 1:

En  $\mathbb{C}[0, 1]$ , sean las funciones  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = x + 1$  y el producto escalar definido como

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)dx:$$

- a) Normaliza  $f$  y  $g$ . Comprueba que tus resultados son correctos.
- b) Calcula la distancia y ángulo que existe entre  $f$  y  $g$ .

### Ejercicio 2:

En  $\mathbb{M}_{2 \times 2}$ , con el producto escalar  $A \cdot B = \text{tr}(A^t B)$ , normaliza las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Comprueba que tus resultados son correctos.

Nota: La traza de una matriz es la suma de todos los elementos en su diagonal principal. En MATLAB, se calcula directamente con la función *trace*.

### Ejercicio 3:

En  $\mathbb{R}^4$ , obtén una base del complemento ortogonal del subespacio  $S = \{(\alpha, 0, 2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ . Verifica que  $S^\perp$  es ortogonal a  $S$  y que  $S$  y  $S^\perp$  son subespacios complementarios/suplementarios.

**Ejercicio 4:**

En  $\mathbb{R}^3$ , proyecta ortogonalmente el vector  $(3, 2, 2)$  sobre el subespacio  $S = \langle (2, 0, 1), (0, 3, -1), (2, 3, 0) \rangle$  utilizando la matriz de proyección. Calcula dicha matriz partiendo de dos bases de  $S$  distintas, una de ellas ortonormal y la otra no. ¿Qué sucede?

**Ejercicio 5:**

Utilizando matrices de proyección, calcula la proyección ortogonal del vector  $\vec{v} = (3, 4, 5)$  sobre el subespacio  $S : \{x - y + z = 0\}$  de  $\mathbb{R}^3$  y sobre  $S^\perp$ . Comprueba que ambas proyecciones son ortogonales entre sí y que  $\vec{v}$  puede expresarse como la suma de ambas. ¿Qué pasa si sumas la matriz de proyección sobre  $S$  y la matriz de proyección sobre  $S^\perp$ ?