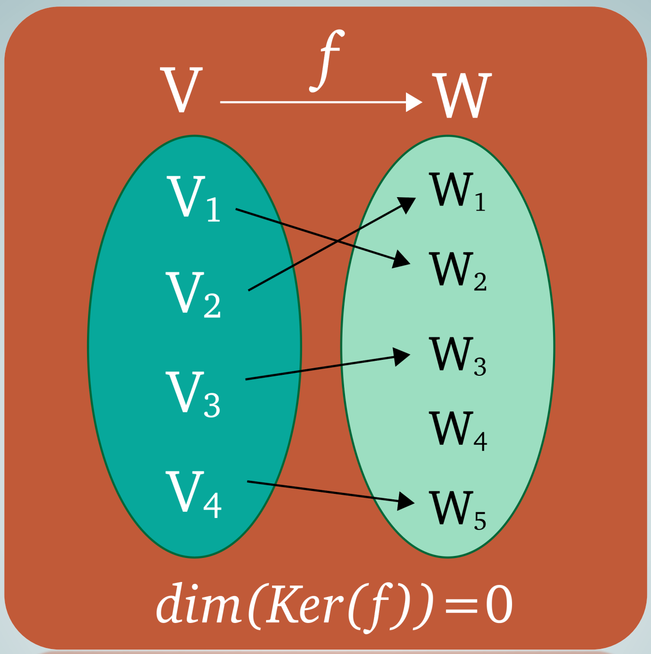
Álgebra

Práctica 10. Aplicaciones lineales



Rodrigo García Manzanas
Neila Campos González
Ana Casanueva Vicente

Departamento de Matemática Aplicada y
Ciencias de la Computación

Grado en Ingeniería Química

G320: Álgebra

Práctica 10: Aplicaciones lineales

Rodrigo García Manzanas (rodrigo.manzanas@unican.es)

Objetivos

- Obtención de la matriz estándar de una aplicación lineal
- Cálculo del núcleo y la imagen de una aplicación lineal

Matriz estándar

Las funcionalidades de cálculo simbólico de MATLAB que ya conocemos permiten trabajar fácilmente con aplicaciones lineales. Por ejemplo, dada

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\rightsquigarrow (2x, -3y + z) \end{aligned}$$

podemos definirla del siguiente modo:

```
syms x y z real  % variables simbólicas del (sub)espacio inicial
f = [2*x, -3*y+z];  % (sub)espacio final
```

A partir de aquí es muy fácil calcular el transformado (es decir, la imagen), de cualquier vector del espacio inicial $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, el transformado de $(5, -7, -\pi)$ en $\mathbb{R}^2$ será:

```
subs(f, [x y z], [5 -7 -pi])  % imagen del vector (5, -7, -pi)
```

ans = $\begin{pmatrix} 10 & 21 - \pi \end{pmatrix}$

Por tanto, para obtener la matriz estándar de *f* tan sólo tendríamos que calcular la imagen de los vectores de la base canónica del espacio inicial:

```
f1 = subs(f, [x y z], [1 0 0]);  % imagen del primer vector de la BC de R3
f2 = subs(f, [x y z], [0 1 0]);  % imagen del segundo vector de la BC de R3
f3 = subs(f, [x y z], [0 0 1]);  % imagen del tercer vector de la BC de R3
A = double([f1' f2' f3'])  % las coloco columnas para obtener la matriz A
```

```
A = 2×3
     2     0     0
```

```
     0    -3     1
```

<u>Nota</u>: Los vectores *f1*, *f2* y *f3* son expresiones simbólicas, por lo que, la matriz que resulte al colocarlos en filas será también simbólica. Para poder operar convenientemente con ella hay que convertirla a numérico, de ahí que sea necesario el uso de *double*.

Una vez hallada la marriz*A*, la forma más cómoda de calcular la imagen de cualquier vector del espacio inicial $\mathbb{R}^3$ sería aplicarle al vector dicha matriz. Por ejemplo, otra forma de calcular la imagen de $(5, -7, -\pi)$ sería:

```
A*[5 -7 -pi]'
```

```
ans = 2×1
   10.0000
   17.8584
```

Núcleo e imagen

Una vez tenemos la matriz *A*, es muy fácil calcular el núcleo de *f*. Recuerda que el núcleo de la aplicación lo forman los vectores del espacio inicial cuya imagen es el $\vec{0}$ del espacio final. Por tanto, nuestro problema se reducirá a resolver el sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es precisamente *A*, lo que nos devolverá directamente una base de $Ker(f)$:

```
baseKer = null(A, 'r')  % base de Ker(f) -> dim(Ker(f))=1
```

```
baseKer = 3×1
         0
    0.3333
    1.0000
```

Para comprobar que la base que hemos obtenido es correcta, podríamos ver que la imagen del/de los vector/es que la forman es el $\vec{0}$ de $\mathbb{R}^2$:

```
A*baseKer  % forma 1: al aplicarle A a la base de Ker(f), obtengo el vector 0 de R2
```

```
ans = 2×1
     0
     0
```

```
subs(f, [x y z], baseKer')  % forma 2: la imagen de la base de Ker(f) es el
```

ans = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$

```
% vector 0 de R2
```

Por último, tal y como vimos en teoría, una base de $Im(f)$ será la formada por las columnas de *A* que sean linealmente independientes:

```
[Ared, cp] = rref(A);  % sólo la primera y segunda columnas son L.I.
baseIm = A(:, cp);  % base de Im(f) -> dim(Im(f))=2
```

Date cuenta de que se cumple la relación de dimensiones $dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = n$, donde *n* es la dimensión del espacio inicial. En nuestro caso particular tendríamos $1 + 2 = 3$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1:

Dada la siguiente aplicación lineal:

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z, t) \rightsquigarrow (x + 2y + t, y + 3z - t, 0)$$

- *a)* Halla la matriz estándar de *f*
- *b)* Obtén la forma implícita del núcleo y de la imagen de *f*
- *c)* Clasifica *f*
- *d)* Halla los vectores que tienen como imagen el vector $(2, 2, 0)$
- *e)* Halla los vectores que tienen como imagen el vector $(2, 2, 2)$
- *f)* Calcula una base de la imagen del subespacio $S =< (0,0,3,2), (4,6,3,-1), (1,0,0,2) >$ de $\mathbb{R}^4$

Ejercicio 2:

Dada la siguiente aplicación lineal:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \rightsquigarrow (3x - 2y, x - z)$$

- *a)* Obtén una base del núcleo de *f*
- *b)* Obtén una base de la imagen de *f*
- *c)* Clasifica *f*
- *d)* Obtén una base de la imagen del subespacio $S \in \mathbb{R}^3$ cuya ecuación implícita es $x + y + z = 0$

Ejercicio 3:

Dada una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que su núcleo es el subespacio de ecuaciones $\{x + y + z = 0, t = 0\}$ y los vectores $\{(1,1,1,0), (0,0,0,1)\}$ se transforman por *f* en sí mismos. Obtén:

- *a)* Su matriz asociada en base canónica (matriz estándar)
- *b)* La imagen del subespacio *S* de $\mathbb{R}^4$ cuyas ecuaciones implícitas son $\{x + y + z = 0, t = 0, x - y + 2t = 0\}$. ¿Qué puedes decir sobre *S*?
- *c) c)* La matriz de *f* en la base $B = \{(-1,0,0,0), (1,0,-2,3), (1,-1,0,2), (-1,-1,-1,0)\}$ de $\mathbb{R}^4$
- *d)* Calcula la traza y el determinante tanto de *A* como de la matriz que has obtenido en el apartado anterior. ¿Qué se observa?