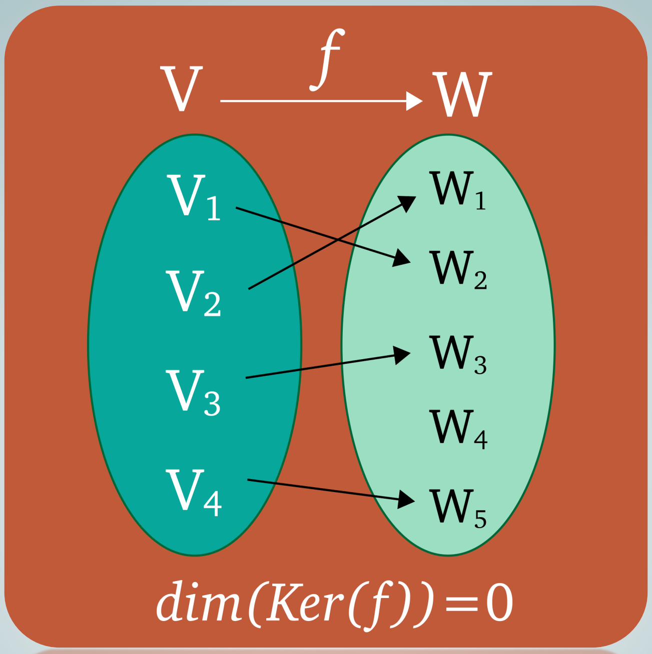
# Álgebra

## Práctica 11. Diagonalización de endomorfismos





**Rodrigo García Manzanas**
**Neila Campos González**
**Ana Casanueva Vicente**

Departamento de Matemática Aplicada y
Ciencias de la Computación



Este tema se publica bajo Licencia:
[Creative Commons BY-NC-SA 4.0]

Grado en Ingeniería Química

## G320: Álgebra

# Práctica 11: Diagonalización de endomorfismos

*Rodrigo García Manzanas (rodrigo.manzanas@unican.es)*

**Objetivos**

- Cálculo de autovalores y autovectores
- Diagonalización

### Cálculo de autovalores y autovectores

Imaginemos que tenemos el siguiente endomorfismo:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\rightsquigarrow (3x - 3z, 3y + 9z, -3z) \end{aligned}$$

Comenzaremos por calcular la matriz asociada a *f* en la base canónica (matriz estándar):

```
syms x y z real  % variables simbólicas en R³
f = [3*x-3*z, 3*y+9*z, -3*z];  % definición f
f1 = subs(f, [x y z], [1 0 0]);  % imagen del primer vector de la BC de R³
f2 = subs(f, [x y z], [0 1 0]);  % imagen del segundo vector de la BC de R³
f3 = subs(f, [x y z], [0 0 1]);  % imagen del tercer vector de la BC de R³
A = double([f1' f2' f3'])  % matriz estándar (uso "double" para pasarla a numérico)
```

```
A = 3×3
     3     0    -3
     0     3     9
     0     0    -3
```

A continuación, para hallar los autovalores de *f* (o *A*), plantearemos su polinomio característico ($|A - \lambda I|$) y calculamos sus raíces:

```
syms l  % defino lambda como variable simbólica
pc = det(A - l*eye(3));  % polinomio característico
autoval = double(solve(pc == 0))  % autovalores (uso "double" para pasarlos
```

```
autoval = 3×1
    -3
```

```
     3
     3
```

```
% a numérico)
```

Vemos que *f* tiene como autovalores $\lambda = -3$ (simple) y $\lambda = 3$ (doble). El siguiente paso sería calcular los subespacios propios asociados a estos autovalores, para lo cual tendremos que resolver el sistema homogéneo con matriz de coeficientes $A - \lambda_i I$, donde $\lambda_i = \{-3, 3\}$. La solución a este sistema será directamente una base del subespacio propio asociado a $\lambda_i$:

```
% Subespacio propio asociado al autovalor -3 (voy a llamarle V1)
baseV1 = null(A - autoval(1)*eye(3), 'r')  % dim(V1)=1=m(-3)
```

```
baseV1 = 3×1
    0.5000
   -1.5000
    1.0000
```

```
% Subespacio propio asociado al autovalor 3 (voy a llamarle V2)
baseV2 = null(A - autoval(2)*eye(3), 'r')  % dim(V2)=2=m(3)
```

```
baseV2 = 3×2
     1     0
     0     1
     0     0
```

Por tanto, cualquier vector que se pueda expresar como combinación de las bases que hemos hallado será un autovector de *f*. Por ejemplo, de la base de $V_3$ (a la que hemos llamado *baseV2*) podemos ver que cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ cuya tercera componente sea nula sería autovector de *f*. Dicho de otro modo, $S : \{z = 0\}$ sería un subespacio de autovectores. Del mismo modo, de la base de $V_{-3}$ (a la que hemos llamado *baseV1*), podemos concluir que, por ejemplo, el vector $(4, -12, 8)$ sería también autovector de *f*. Esto puede comprobarse fácilmente:

```
rref([baseV1, [4 -12 8]'])  % el vector dado es 8 veces baseV1
```

```
ans = 3×2
     1     8
     0     0
     0     0
```

Por ser autovector asociado al autovalor $\lambda = -3$, se cumplirá $A \begin{bmatrix} 4 \\ -12 \\ 8 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 4 \\ -12 \\ 8 \end{bmatrix}$. Vamos a comprobarlo:

```
A*[4 -12 8]' - (-3)*[4 -12 8]'
```

```
ans = 3×1
     0
     0
     0
```

**Diagonalización**

Para que un endomorfismo sea diagonalizable han de cumplirse dos condiciones:

1. Todos sus autovalores tienen que ser reales
2. La dimensión de cada subespacio propio tiene que coincidir con la multiplicidad de su autovalor asociado

En nuestro ejemplo, podemos ver que estos dos puntos se cumplen. Por tanto, *f* será diagonalizable. Como ya sabemos, diagonalizarlo consiste en encontrar una matriz diagonal *D* y otra *P* tales que $A = PDP^{-1}$. La diagonal de *D* estará formada por los autovalores de *f* y *P* contendrá en sus columnas una base de autovectores del espacio en el que estemos trabajando, en este caso $\mathbb{R}^3$.

```
D = diag(autoval);
P = [baseV1 baseV2];
```

Podemos comprobar fácilmente que, efectivamente, la unión de las bases de los subespacios propios encontados forman una base (de autovectores) de $\mathbb{R}^3$:

```
rank([baseV1 baseV2])  % los tres vectores son L.I. -> forman base de R³
```

```
ans = 3
```

La comprobación de que las matrices *D* y *P* que hemos obtenido son las correctas sería la siguiente:

```
A - P*D*inv(P)
```

```
ans = 3×3
     0     0     0
     0     0     0
     0     0     0
```

**Ejercicios propuestos**

**Ejercicio 1:**

Comprueba si el siguiente endomorfismo es diagonalizable:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) &\rightsquigarrow (x - 2y, y - z, z + t, -3t) \end{aligned}$$

**Ejercicio 2:**

Dada una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuyo $Ker(f) = < (1, 2, 0), (0, 3, 1) >$ y bajo la cual el eje *X* se transforma en el eje *Z*

- *a)* Halla su matriz estándar *A*
- *b)* Obtén una base de la imagen de *f*

- *c)* Obtén una base de la imagen del subespacio *S* de $\mathbb{R}^3$ cuya forma paramétrica es $(\alpha, -\beta, \alpha+\beta)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- *d)* Obtén una base de la imagen del subespacio *T* de $\mathbb{R}^3$ cuya ecuación implícita es $x = \frac{1}{2}y$
- *e)* Calcula los autovalores y autovectores de *f*
- *f)* En caso de existir, da una base de autovectores de $\mathbb{R}^3$ ¿Cuál será la matriz de *f* en esta base?
- *g)* Obtén *M*, la matriz de *f* en la base $B = \{(1,0,-3),(0,-2,1),(-1,1,0)\}$
- *h)* ¿Qué relación existe entre la traza y el determinante de *A* y *M*?

**Ejercicio 3:**

Determina el valor (o valores) que puede tomar *a* para que la siguiente matriz sea diagonalizable:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

A continuación, encuentra dos matrices *D* y *P* tales que $A = PDP^{-1}$

**Ejercicio 4:**

Dado el endoformismo *f* cuya matriz estándar es la siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$$

- *a)* Clasifica *f*
- *b)* Comprueba si *f* es diagonalizable. En caso de serlo, encuentra las matrices *D* y *P* tales que $A = PDP^{-1}$
- *c)* ¿Qué tienen de particular los subespacios propios de *f*?
- *d)* ¿Cuáles serían las coordenadas del vector $(0,-4,1)$ en una base de autovectores de $\mathbb{R}^3$?