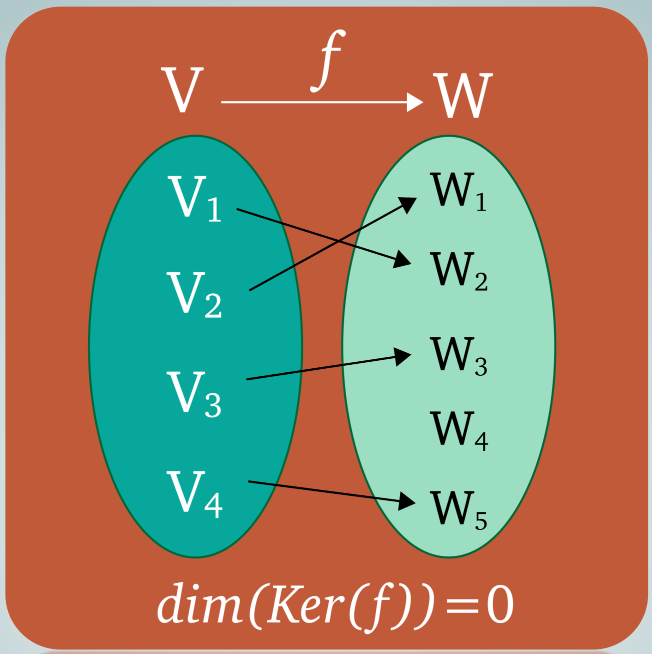
Álgebra

Práctica 4. Sistemas de ecuaciones lineales



Rodrigo García Manzanas
Neila Campos González
Ana Casanueva Vicente

Departamento de Matemática Aplicada y
Ciencias de la Computación

Grado en Ingeniería Química

G320: Álgebra

Práctica 4: Sistemas de ecuaciones lineales

Rodrigo García Manzanas (rodrigo.manzanas@unican.es)

Objetivos

- Clasificar y resolver distintos tipos de sistemas de ecuaciones lineales

Resolución de sistemas compatibles determinados

Siempre que estemos frente a un sistema de ecuaciones lineales, lo primero que haremos es clasificarlo (si es incompatible, no habrá nada más que hacer). Para ello, partiendo de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema, aplicaremos el teorema de Rouché-Fröbenius. Vamos a verlo con el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} x+y-z &= 0 \\ 3x+y-z &= 2 \\ 4x-2y+z &= 3 \end{cases}$$

```
% clasifico el sistema
A = [1 1 -1; 3 1 -1; 4 -2 1]; % matriz de coeficientes
b = [0 2 3]';  % vector de términos independienets
Aamp = [A, b];  % matriz ampliada
[rank(A), rank(Aamp)]  % R-F: sistema compatible determinado
```

```
ans = 1×2
     3     3
```

Una vez hemos comprobado que el sistema es compatible determinado (habrá una única solución), vamos a ver distintas formas de resolver este tipo de sistemas:

<u>Método 1</u>: Utilizando la forma escalonada reducida por filas de la matriz ampliada del sistema (método de Gauss-Jordan).

```
rref(Aamp)  % solución: (x=1, y=2, z=3)
```

```
ans = 3×4
     1     0     0     1
     0     1     0     2
     0     0     1     3
```

<u>Método 2</u>: Con la función *linsolve* (usa distintos tipos de factorización de matrices para resolver el sistema). Requiere como entradas la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes.

```
sol = linsolve(A, b)  % solución: (x=1, y=2, z=3)
```

```
sol = 3×1
    1.0000
    2.0000
    3.0000
```

<u>Método 3</u>: Con el operador "\". Al igual que *linsolve,* requiere como entradas la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes.

```
sol = A\b  % solución: (x=1, y=2, z=3)
```

```
sol = 3×1
    1.0000
    2.0000
    3.0000
```

<u>Método 4</u>: Definiendo las incógnitas del sistema como simbólicas y resolviendo su expresión matricial con la función *solve*.

```
syms x y z real  % defino las incógnitas del sistema como variables simbólicas
X = [x y z]';  % vector de incógnitas simbólicas
sol = solve(A*X == b);  % resuelvo el sistema en su forma matricial
[sol.x, sol.y, sol.z]  % solución: (x=1, y=2, z=3)
```

ans = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

<u>Método 5</u>: Usando A^{-1} para despejar las incógnitas del sistema.

```
sol = inv(A)*b  % solución: (x=1, y=2, z=3)
```

```
sol = 3×1
     1
     2
     3
```

<u>Método 6</u>: Resolución por Cramer (cálculo de determinantes).

Resolución de sistemas compatibles indeterminados

En el caso de sistemas compatibles indeterminados (infinitas soluciones) no se pueden emplear los métodos vistos anteriormente. Vamos a ilustrar cómo se pueden resolver este tipo de sistemas con el siguiente ejemplo:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x+y+z+t & = & 7 \\ x+y+2t & = & 8 \\ 2x+2y+3z & = & 10 \\ -x-y-2z+2t & = & 0 \end{array} \right.$$

Como siempre, lo primero que haremos es clasificar el sistema haciendo uso del comando *rank* y el teorema de Rouché-Fröbenius.

```
% clasifico el sistema
A = [1 1 1 1; 1 1 0 2; 2 2 3 0; -1 -1 -2 2]; % matriz de coeficientes
b = [7 8 10 0]';  % vector de términos independienets
Aamp = [A, b];  % matriz ampliada
[rank(A), rank(Aamp)]  % R-F: sistema compatible indeterminado
```

```
ans = 1×2
     3     3
```

A continuación, calcularemos la escalonada reducida por filas de la matriz ampliada para identificar las *incógnitas principales* (columnas pivotales) y los *parámetros libres* (columnas no pivotales). Recuerda que el nº de parámetros libres será igual al nº total de incógnitas menos el nº de incógnitas que hemos identificado como principales.

```
rref(Aamp)  % escalonada reducida por filas
```

```
ans = 4×5
     1     1     0     0     2
     0     0     1     0     2
     0     0     0     1     3
     0     0     0     0     0
```

```
% incógnitas principales: {x, z, t}
% parámetro libre: {y}
```

Una vez hemos determinado cuáles vamos a considerar como incógnitas principales, resolvemos el sistema en modo simbólico con la función *solve.* Lógicamente, habrá que resolver el sistema en las incógnitas principales (*x, z, t* en este caso), y la solución nos vendrá dada en función de la/s variables/s que hayamos escogido como parámetro/s libre/s (*y* en este caso).

```
syms x y z t real  % defino las incógnitas del sistema como simbólicas
X = [x y z t]';  % construyo el vector de incógnitas simbólicas
sol = solve(A*X == b, [x z t]);  % resuelvo el sistema en las incógnitas
% que he identificado como principales
sol = [sol.x y sol.z sol.t]  % esta será la solución del sistema,
```

sol = $\begin{pmatrix} 2-y & y & 2 & 3 \end{pmatrix}$

```
% que vendrá dada en función de la(s)
% variable(s) que hayamos definido como parámetro(s) libre(s); en este caso
% "y"
```

Para comprobar que la solución a la que hemos llegado es correcta, podemos sustituir en la misma el parámetro libre por cualquier valor y ver que, efectivamente, se cumplen todas las ecuaciones del sistema.

```
A*subs(sol, y, 47.86)' - b  % le doy al parámetro libre el valor 47.86
```

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
% y compruebo que la solución es correcta
A*subs(sol, y, -32)' - b  % le doy al parámetro libre el valor -32
```

ans =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
% y compruebo que la solución es correcta
A*subs(sol, y, pi/sqrt(2))' - b  % le doy al parámetro libre el valor pi/sqrt(2)
```

ans =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
% y compruebo que la solución es correcta
```

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1:

Resuelve el siguiente sistema compatible determinado (utilizado como primer ejemplo en este guión) usando el método de Cramer. Comprueba que la solución que has obtenido es la correcta.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 0 \\ 3x+y-z & = & 2 \\ 4x-2y+z & = & 3 \end{array}\right.$$

Ejercicio 2:

Comprueba que el siguiente sistema es compatible determinado y resuélvelo utilizando los métodos 1-5 que hemos visto para este tipo de sistemas. Verifica que la solución que has obtenido es la correcta.

$$\left\{\begin{array}{rcr} -x-2y-3z & = & -3 \\ 2x+3y+2z & = & -2 \\ x+2y+4z & = & 3 \end{array}\right.$$

Ejercicio 3:

Clasifica y resuelve, si es posible, el siguiente sistema. Verifica que la solución que has obtenido es correcta.

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3y-6z+6t+4p & = & -5 \\ 3x-7y+8z-5t+8p & = & 9 \\ 3x-9y+12z-9t+6p & = & 15 \end{array}\right.$$

Ejercicio 4:

Clasifica y resuelve el siguiente sistema (fíjate que es el homogéneo del ejercicio 3). Verifica que, en los sistemas compatibles indeterminados (no homogéneos), la solución puede expresarse como la suma de la solución general del sistema homogéneo más la particular del completo.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3y-6z+6t+4p & = & 0 \\ 3x-7y+8z-5t+8p & = & 0 \\ 3x-9y+12z-9t+6p & = & 0 \end{array}\right.$$