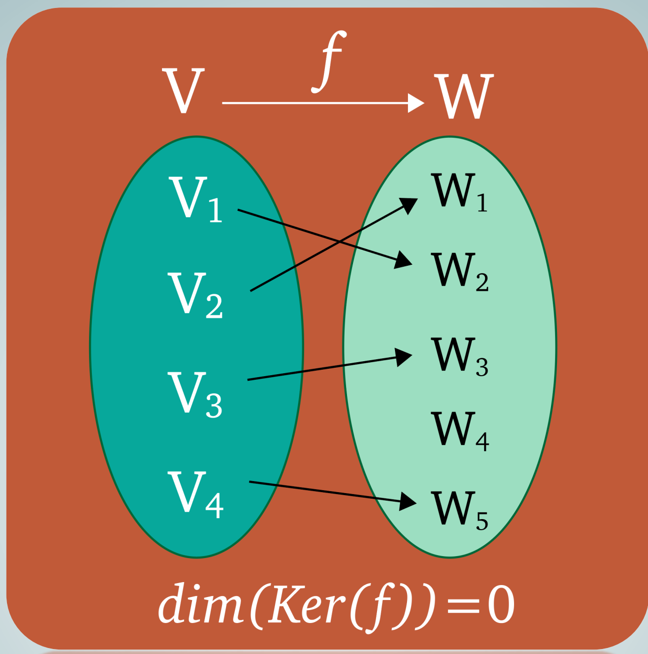
Álgebra

Práctica 6. Subespacios vectoriales



Rodrigo García Manzanas
Neila Campos González
Ana Casanueva Vicente

Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación

Grado en Ingeniería Química

G320: Álgebra

Práctica 6: Subespacios vectoriales

Rodrigo García Manzanas (rodrigo.manzanas@unican.es)

Objetivos

- Pasar de la forma implícita de un subespacio a la paramétrica, y viceversa
- Calcular la suma y la intersección de dos subespacios

Paso de la forma implícita de un subespacio a la paramétrica

Sea *S* un subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado en su forma implícita, $S: \left.\begin{array}{r} x+y-z-t=0 \\ 2x+2y-z-t=0 \end{array}\right\}$, sabemos que para hallar su expresión paramétrica tenemos que resolver el sistema homogéneo que forman sus ecuaciones implícitas. Tendríamos dos opciones para ello.

1) Con la función *solve:*

```
A = [1 1 -1 -1; 2 2 -1 -1];  % matriz de coeficientes
b = [0 0]';  % vector de términos independientes
Aamp = [A b];  % matriz ampliada
[rank(A), rank(Aamp)]  % S.C.I.
```

```
ans = 1×2
     2     2
```

```
rref(Aamp)  % I.P. = {x, z}, P.L. = {y, t}
```

```
ans = 2×5
     1     1     0     0     0
     0     0     1     1     0
```

```
syms x y z t real
X = [x y z t]';  % vector de incógnitas simbólicas
sol = solve(A*X == b, [x z]);  % resuelvo el sistema
[sol.x y sol.z t]  % esta es la forma paramétrica que busco
```

ans = $\begin{pmatrix} -y & y & -t & t \end{pmatrix}$

```
% siendo y, t los parámetros
```

2) Con la función *null:*

```
null(A, 'r')  % cada columna es un vector de la base del subespacio
```

```
ans = 4×2
    -1     0
     1     0
     0    -1
     0     1
```

```
% Por tanto, la forma paramétrica que busco será (-a, a, -b, b)
```

Paso de la forma paramétrica de un subespacio a la implícita

Sea *S* un subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado en su forma paramétrica, $S \equiv \{(\alpha, \alpha, \beta, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Una opción para obtener su forma implícita sería proceder tal y como hicimos en el *apartado c)* del *ejercicio 3* de la práctica de la semana pasada (*práctica 5*).

```
baseS = [[1 1 0 0]', [0 0 1 1]'];  % coloco los vectores de una base de S
% en columnas
syms x y z t real
X = [x y z t]';  % defino un vector (simbólico) genérico del subespacio
det([baseS X])  % impongo que el rango de la matriz formada por los vectores
```

```
Error using sym/det (line 24)
Matrix must be square.
```

```
% de la base no aumente al introducir el nuevo vector genérico. Esto equivaldría
% a decir que dicho vector es combinación lineal de los vectores de la base
% (es decir, pertenece a S)
```

Sin embargo, en este caso no podemos calcular el determinante ya que la matriz que tenemos (4×3) no es cuadrada. Otra opción para ver que el rango no aumenta al introducir el nuevo vector genérico del subespacio sería utilizar *rank*, pero esta funcion de MATLAB no funciona con variables simbólicas. Sin embargo, sabemos que cualquier vector de *S* (y en particular los vectores de la base) verificarán las ecuaciones implícitas del subespacio. Por tanto, bastaría con resolver un sistema homogéneo en el que las incógnitas serán los propios coeficientes de las ecuaciones implícitas.

```
null(baseS', 'r')  % las ecuaciones implícitas de S serán las siguientes:
```

```
ans = 4×2
    -1     0
     1     0
     0    -1
     0     1
```

```
% eq1: -x+y=0
% eq2: -z+t=0
```

Intersección de subespacios

Sean *S* y *T* dos subespacios de $\mathbb{R}^4$ dados por sus ecuaciones implícitas:

$$S: \left.\begin{array}{r} x+y-z-t=0 \\ 2x+2y-z-t=0 \end{array}\right\} \qquad T: \left.\begin{array}{r} x-y=0 \\ z-t=0 \end{array}\right\}$$

Como hemos visto en las clases de teoría, el subespacio $S \cap T$ se calcula resolviendo el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de *S* y las de *T*, puesto que cualquier elemento de la intersección estará a la vez en *S* y en *T*, y por tanto, verificará ambos conjuntos de ecuaciones simultáneamente.

```
S = [1 1 -1 -1; 2 2 -1 -1];  % matriz de coeficientes de S
T = [1 -1 0 0; 0 0 1 -1];  % matriz de coeficientes de T
ST = [S; T];  % matriz de coeficientes de S y T
b = zeros(4, 1);  % términos independientes
STamp = [ST, b];  % matriz ampliada
[rank(ST), rank(STamp)]  % S.C.D.
```

```
ans = 1×2
     4     4
```

```
linsolve(ST, b)  % resuelvo el sistema (ya sabíamos que sólo iba a tener la
```

```
ans = 4×1
     0
     0
     0
     0
```

```
% solución trivial)
% El subespacio intersección está compuesto tan sólo por el vector 0
% Por tanto, S y T están en suma directa
```

Suma de subespacios

Tal y como hemos visto en las clases de teoría, para calcular el subespacio $S+T$, tendríamos que obtener primero una base de *S* y otra de *T*. A partir de ellas, es inmediato formar un sistema generador de $S+T$. Para llegar a una base, sólo tendríamos que identificar los vectores que sean linealmente independientes.

```
baseS = null(S, 'r');  % base de S
baseT = null(T, 'r');  % base de T
genST = [baseS baseT];  % sistema generador de S+T
rref(genST)  % los 4 vectores son L.I. (columnas pivotales), por lo que forman
```

```
ans = 4×4
     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
```

```
% una base de S+T, que es todo R⁴
```

Evidentemente, $dim(S+T)$ tenía que ser 4 (es decir, $S+T=\mathbb{R}^4$), pueso que hemos visto que $dim(S\cap T)=0$, y sabemos que $dim(S)=2$ y $dim(T)=2$. Esto quiere decir que *S* y *T* están en suma directa ($S\bigoplus T$).

Nota: $dim(S+T)=dim(S)+dim(T)-dim(S\cap T)$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1:

Encuentra la forma paramétrica de los siguientes subespacios, dados por sus ecuaciones implícitas:

- *a)* En $\mathbb{R}^4$, $S:\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=0 \\ y-2z-t=0 \end{array}\right\}$
- *b)* En $\mathbb{R}^3$, $S:x-2y=0$
- *c)* En $\mathbb{R}^4$, $S:\left.\begin{array}{l} x=z \\ y=t \end{array}\right\}$

Ejercicio 2:

Encuentra la forma implícita de los siguientes subespacios:

- *a)* En $\mathbb{R}^4$, $S\equiv\{(\alpha+\beta,\alpha+2\beta,-\beta,\beta):\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$
- *b)* En $\mathbb{R}^3$, $S\equiv\{(\alpha+2\beta,-2\alpha+5\beta,-5\alpha+8\beta):\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$
- *c)* En $\mathbb{R}^3$, $S\equiv<(1,-2,-5)>$

Ejercicio 3:

En $\mathbb{R}^4$, dados los subespacios $S\equiv\{(x,y,z,t):x=z,y=t\}$ y $T\equiv\{(\alpha,0,\alpha,\beta):\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$

- *a)* Halla una base del subespacio $S+T$. ¿Cuál es su dimensión?
- *b)* Halla una base del subespacio $S\cap T$. ¿Cuál es su dimensión?
- *c)* ¿Están *S* y *T* en suma directa?