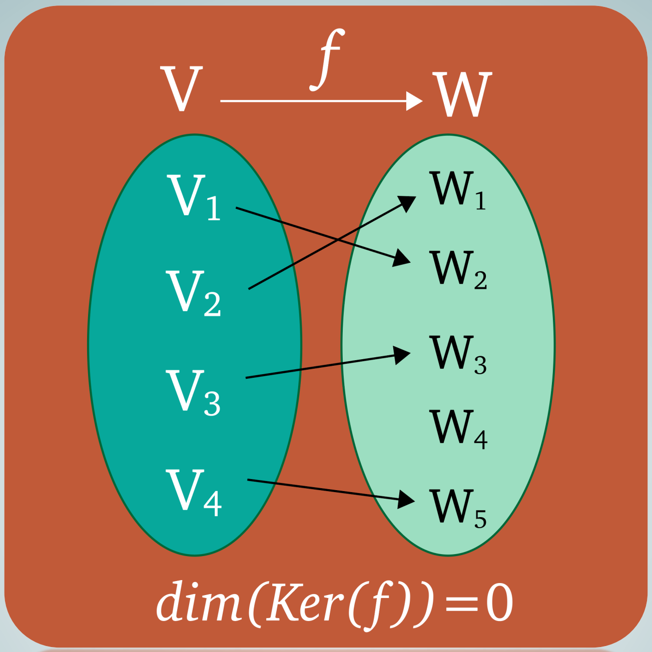
Álgebra

Práctica 7. Producto escalar, subespacio ortogonal



Rodrigo García Manzanas
Neila Campos González
Ana Casanueva Vicente

Departamento de Matemática Aplicada y
Ciencias de la Computación

Grado en Ingeniería Química

G320: Álgebra

Práctica 7: Producto escalar, subespacio ortogonal

Rodrigo García Manzanas (rodrigo.manzanas@unican.es)

Objetivos

- Operar con el producto escalar en MATLAB
- Calcular subespacios ortogonales

Producto escalar

En MATLAB, se puede calcular el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$ con la función *dot*. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$, el producto escalar de los vectores $\vec{u} = (4, 0, 3)$ y $\vec{v} = (1, -2, 3)$ se obtendría así:

```
u = [4 0 3]; % vector u
v = [1 -2 3];  % vector v
dot(u, v)  % producto escalar usual
```

```
ans = 13
```

Es frecuente trabajar con otros productos escalares del tipo $u \cdot v = c_1u_1v_1 + c_2u_2v_2 + ... + cn_nu_nv_n$ (con $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ coeficientes escalares). En esos casos, es conveniente apoyarse en una matriz que nos ayude a calcular este producto. Por ejemplo, si nos dicen que el producto escalar en $\mathbb{R}^3$ de los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ viene dado como $\vec{u} \cdot \vec{v} = \pi u_1v_1 + \sqrt{2}\, u_2v_2 + 7u_3v_3$, siempre podríamos definir la siguiente matriz *M*:

```
M = diag([pi sqrt(2) 7])
```

```
M = 3×3
    3.1416         0         0
         0    1.4142         0
         0         0    7.0000
```

Y utilizarla para aplicar el producto dado:

```
u*M*v' % tenemos que asegurarnos de que las dimensiones
```

```
ans = 75.5664
```

Si estamos trabajando con productos escalares que impliquen el cálculo de integrales, debemos saber que la función *int* de MATLAB se utiliza para el cálculo integral (en modo simbólico). Por ejemplo, si quisiéramos calcular $\int_0^1 x^2 dx$, haríamos:

```
% sean las correctas para el producto matricial
```

```
syms x real  % hay que definir la variable simbólica sobre la que integro
int(x^2, 0, 1)  % hay que que darle a int la función a integrar
```

ans =

$$\frac{1}{3}$$

```
% y los límites de integración
```

La norma o módulo de un vector puede calcularse fácilmente con la función *norm.* Eso sí, *norm* considera el producto escalar usual, por lo que, si estuviésemos trabajando con otro tipo de producto, habría que calcularla "a mano".

```
norm_u = norm(u)  % norma del vector u (considerando el producto escalar usual)
```

```
norm_u = 5
```

```
sqrt(dot(u, u))  % comprobamos que obtenemos el mismo resultado
```

```
ans = 5
```

Por tanto, normalizar el vector $\vec{u}$ sería tan fácil como:

```
u_norm = u/norm(u)  % vector normalizado
```

```
u_norm = 1×3
    0.8000         0    0.6000
```

```
norm(u_norm)  % efectivamente, el módulo del vector normalizado es 1
```

```
ans = 1
```

Cálculo de subespacios ortogonales

Sea *S* un subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado en su forma paramétrica, $S \equiv \{(\alpha, \alpha, \beta, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Para encontrar el complemento ortogonal (o simplemente ortogonal) de *S* ($S^\perp$) bastaría con encontrar los vectores ortogonales a una base de *S*. Tendré que partir, por tanto, de una base de *S*:

```
baseS = [1 1 0 0; 0 0 1 1];  % base de S (son sist. gen. y son L.I.)
```

$S^{\perp}$ estará formado por vectores (x, y, z, t) ortogonales a *S* (y, en particular, a los vectores de la base de *S*), por lo que deberán satisfacer:

$$(1, 1, 0, 0) \cdot (x, y, z, t) = 0$$
$$(0, 0, 1, 1) \cdot (x, y, z, t) = 0$$

Si consideramos el producto escalar usual, esto se puede escribir forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, para hallar una base de $S^{\perp}$ bastaría con resolver el sistema homogéneo con matriz de coeficientes $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$:

```
baseS_ortog = null(baseS, 'r')  % base de S_ortog
```

```
baseS_ortog = 4×2
    -1     0
     1     0
     0    -1
     0     1
```

Como vemos, la base de $S^{\perp}$ está compuesta por dos vectores (lógicamente, L.I.), por lo que $dim(S^{\perp}) = 2$. Esto era de esperar, puesto que ya vimos que $dim(S) = 2$, y sabemos que, por ser ortogonales, *S* y $S^{\perp}$ estarán en suma directa $\Rightarrow$ $dim(S) + dim(S^{\perp}) = 4$. Vamos a comprobarlo:

```
rank([baseS' baseS_ortog])  % efectivamente, la unión de la base de S
```

```
ans = 4
```

```
% y la base de S_ortog forman una base del espacio total, R⁴
```

Se cumple la relación, puesto que tanto *S* como $S^{\perp}$ son subesacios de dimensión 2.

Podemos comprobar que efectivamente *S* y $S^{\perp}$ son ortogonales viendo que el producto escalar de los vectores de sus bases (las combinaciones de todos con todos) son 0:

```
baseS*baseS_ortog
```

```
ans = 2×2
     0     0
     0     0
```

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1:

En $\mathbb{C}[0,1]$, con el producto escalar definido como $f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, calcula el módulo y la distancia y ángulo entre vectores para $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 1$

Nota: Si quieres pasar a formato decimal una expresión simbólica de MATLAB en la que sólo intervienen números, puedes utilizar la función *double*

Ejercicio 2:

En $\mathbb{M}^2$ se define el siguiente producto escalar entre dos matrices *A* y *B*: $A \cdot B = tr(AB^t)$. Dadas las siguientes matrices, halla la distancia que las separa y el ángulo que forman, antes y después de normalizarlas. ¿Qué conclusiones obtienes?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3:

En $\mathbb{R}^4$, dado el siguiente producto escalar entre dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3u_1v_1 + 5u_2v_2 + 4u_3v_3 + 2u_4v_4$. Encuentra un vector de norma unidad y ortogonal a los vectores $(-1, 1, 3, 0)$, $(-1, -1, 1, 0)$ y $(0, 2, 7, 4)$.

Ejercicio 4:

En $\mathbb{R}^4$, obtén una base del complemento ortogonal del subespacio $S = \{(\alpha, 0, 2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Comprueba que es correcta. Verifica que *S* y $S^\perp$ estén en suma directa.

Ejercicio 5:

En $\mathbb{R}^3$, proyecta el vector $(3, 2, 2)$ sobre el subespacio $S =< (2, 0, 1), (0, 3, 0), (2, 3, 1) >$