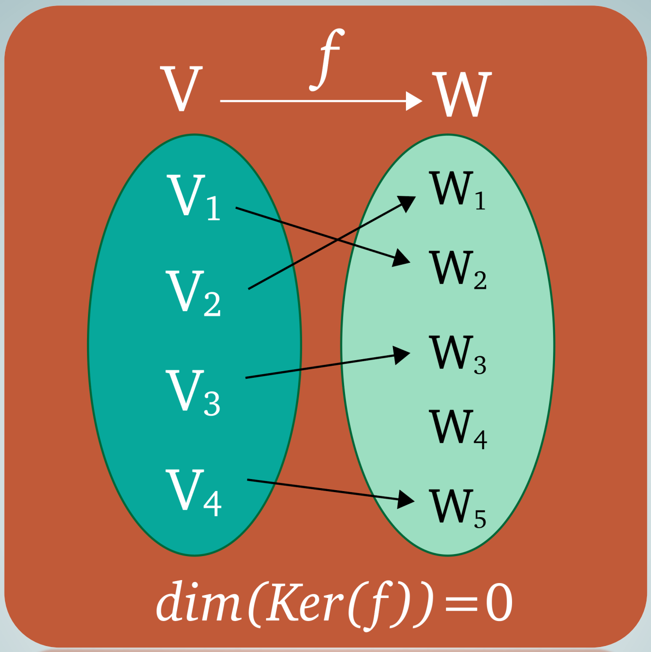
Álgebra

Práctica 8. Base ortogonal y ortonormal. Matriz de proyección



Rodrigo García Manzanas
Neila Campos González
Ana Casanueva Vicente

Departamento de Matemática Aplicada y
Ciencias de la Computación

Grado en Ingeniería Química

G320: Álgebra

Práctica 8: Base ortogonal y ortonormal. Matriz de proyección

Rodrigo García Manzanas (rodrigo.manzanas@unican.es)

Objetivos

- Calcular bases ortogonales (y ortonormales)
- Calcular y utilizar la matriz de proyección sobre un cierto subespacio

Cálculo de bases ortogonales (y ortonormales)

Hemos visto que podemos recurrir al método de Gram-Schmidt para obtener una base ortogonal a partir de una base cualquiera. Por ejemplo, si quisiéramos calcular una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ partiendo de la base $\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$, el procedimiento sería el siguiente:

```
v1 = [1 1 0];  % primer vector de la base de partida
v2 = [0 1 1];  % segundo vector de la base de partida
v3 = [1 0 1];  % tercer vector de la base de partida

%% Aplico Gram-Schmidt (pág. 14 de los apuntes)
u1 = v1;  % primer vector de la nueva base ortogonal
u2 = v2 - u1*dot(u1, v2)/dot(u1, u1);   % segundo vector de la nueva base ortogonal
u3 = v3 - u1*dot(u1, v3)/dot(u1, u1) - u2*dot(u2, v3)/dot(u2, u2);  % primer vector
% de la nueva base ortogonal
format rat
[u1; u2; u3]  % esta sería mi base ortogonal (ejemplo pág. 15 de los apuntes)
```

```
ans = 3×3
       1              1
      -1/2            1/
       2/3           -2/
```

Si no sólo quisiera una base ortogonal, si no una base ortonormal, tendría que normalizar los vectores de mi base ortogonal:

```
format short
[u1/norm(u1); u2/norm(u2); u3/norm(u3)]  % base ortonormal (ejemplo pág. 15
```

```
ans = 3×3
```

```
     0.7071    0.7071         0
    -0.4082    0.4082    0.8165
     0.5774   -0.5774    0.5774
```

```
% de los apuntes)
```

En MATLAB, y siempre que estemos trabajando con el producto escalar usual, podríamos recurrir a la función *orth.* Esta función implementa internamente el método de Gram-Schmidt y permite obtener una base ortonormal a partir de una base cualquiera directamente. Sin embargo, para utilizarla bien, hay que tener en cuenta un par de particularidades. La primera es que la matriz que le pasemos a *orth* como entrada sea una matriz simbólica (no numérica). Para ello, tendremos que utilizar la función *sym.* El resultado que nos devuelve *orth* también será simbólico, pero ya hemos visto que la función *double* permite pasar a númerico cualquier expresión simbólica en la que sólo intervengan números (no incógnitas). Por tanto, el procedimiento sería:

```
v = [v1' v2' v3'];  % matriz con la base de partida
% Los vectores de la base tienen que estar en columnas!

%% Base ortonormal
base_orton = orth(sym(v))
```

base_orton =

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

```
class(base_orton)  % esto será una expresión simbólica
```

```
ans =
'sym'
```

```
double(base_orton)  % para pasarla a numérico
```

```
ans = 3×3
     0.7071   -0.4082    0.5774
     0.7071    0.4082   -0.5774
          0    0.8165    0.5774
```

```
% Esta es la base (en columnas!) que habíamos obtenido con Gram-Schmidt
%% Base ortogonal
base_ortog = orth(sym(v), 'skipnormalization')  % el argumento opcional
```

base_ortog =

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

```
% 'skipnormalization' evita la normalización
```

```
class(base_ortog)  % esto será una expresión simbólica
```

```
ans =
'sym'
```

```
format rat
double(base_ortog)  % para pasarla a numérico
```

```
ans = 3×3
       1              -1/
       1               1/
       0               1
```

```
% Esta es la base (en columnas!) que habíamos obtenido con Gram-Schmidt
```

Matriz de proyección

Hemos visto que la matriz de proyección sobre un subespacio *S* se obtiene como $P_S = A(A^tA)^{-1}A^t$, donde *A* es la matriz que contiene en sus columnas los vectores de una base de *S*. Por tanto, si quisiéramos hallar la matriz de proyección del subespacio $S \equiv < (2, -1, 1), (-1, 2, 1) >$, haríamos lo siguiente:

```
baseS = [2 -1 1; -1 2 1]';  % base de S (es un sist. gen. y L.I.).
% La coloco en columnas. Esta base no tiene porqué ser ortogonal
dot(baseS(:,1), baseS(:,2))  % vemos que no es ortogonal
```

```
ans =
     -3
```

```
% Ya podemos calcular la matriz de proyección (pág. 16 de los apuntes)
PS = baseS*inv(baseS'*baseS)*baseS';  % matriz de proyección sobre S
```

Podemos ver que P_S cumple las tres propiedades que ha de cumplir toda matriz de proyección:

```
% 1) Es cuadrada
% 2) Es simétrica. Esto puede comprobarse con issymmetric, que devolverá
% un 1/0 si la matriz que se le pasa como entrada es/no es simétrica. Este
% tipo de variables binarias 1/O se denominan lógicas
issymmetric(PS)  % matriz simétrica
```

```
ans = logical
   1
```

```
% 3) Es idempotente
format short
PS - PS^2  % Ps=Ps²
```

```
ans = 3×3
10^-15 ×
   -0.1110         0         0
         0   -0.1110         0
         0         0         0
```

Esta es la matriz del ejercicio de la página 18 de los apuntes. Por tanto, acabamos de ver que esa matriz es la matriz de proyección sobre un subespacio cuya base es $\{(2,-1,1),(-1,2,1)\}$.

Una vez hemos calculado P_S, sería inmediato proyectar cualquier vector $\vec{v}$ sobre *S*; tan sólo habría que aplicarle la matriz P_s (es decir, multiplicar P_S por $\vec{v}$). Por ejemplo, para proyectar ortogonalmente el vector $(3,4,5)$ sobre *S*:

```
v = [3 4 5]';  % vector a proyectar

format rat
PS*v  % proyección de v sobre S
```

```
ans = 3×1
    7/3
   10/3
   17/3
```

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1:

Halla una base ortonormal del plano generado por los vectores $(0,1,0)$ y $(3,2,1)$:

- *a)* Aplicando Gram-Schmidt
- *b)* Con la función *orth*

Ejercicio 2:

Utilizando matrices de proyección, calcula la proyección ortogonal del vector $\vec{v}=(3,4,5)$ sobre el subpespacio $S:\{x-y+z=0\}$ de $\mathbb{R}^3$ y sobre $S^{\perp}$. Comprueba que ambas proyecciones son ortogonales entre sí y que $\vec{v}$ puede expresarse como la suma de ambas proyecciones. ¿Qué pasa si sumas la matriz de proyección sobre *S* y la matriz de proyección sobre $S^{\perp}$?

Ejercicio 3:

En $\mathbb{R}^4$, con el producto escalar habitual, sea el subespacio $S\equiv\{x+y-z+t=0, 2x+y-z+3t=0\}$. Dado el vector $\vec{v}=(1,-1,2,3)$, halla $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ tales que $\vec{v}=\vec{v_1}+\vec{v_2}$, $\vec{v_1}\in S$ y $\vec{v_1}\perp\vec{v_2}$.