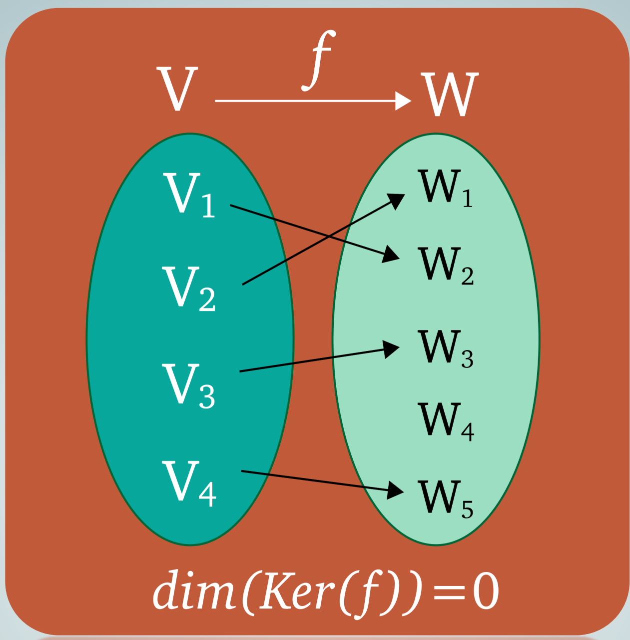
Álgebra

Problemas Tema 3. Espacios vectoriales



Rodrigo García Manzanas
Neila Campos González
Ana Casanueva Vicente

Departamento de Matemática Aplicada y
Ciencias de la Computación

Universidad de Cantabria · *Grado en Ingeniería Química*

G320: Álgebra

Tema 3: Espacios vectoriales

1) En el espacio vectorial $\mathbb{M}_{2\times 2}$ (matrices 2×2 con términos reales),

a) ¿forman un subespacio las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & c \end{pmatrix}$?

b) ¿y las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b^2 \\ b & c \end{pmatrix}$?

Solución:

a) Sí

b) No, $b^2 + b'^2 \neq (b+b')^2$

2) Determina si los siguientes conjuntos de vectores son libres o ligados:

a) $\{(1,0,1),(2,0,3),(-1,0,4)\}$ en $\mathbb{R}^3$

b) $\{(1,2),(3,-1),(5,0),(1,-2)\}$ en $\mathbb{R}^2$

Solución:

a) Ligado. El rango de la matriz que forman los vectores colocados en columnas es 2 (hay una fila de ceros)

b) Ligado. El rango de la matriz que forman los vectores colocados en columnas es 2 (en ningún caso podría ser mayor)

3) Dado el subespacio de $\mathbb{R}^5$ en forma paramétrica $S \equiv \{(a, a+b, a+b+c, c, 2a-b) : a,b,c \in \mathbb{R}\}$, obtén un sistema generador del mismo

Solución:

$S \equiv < (1,1,1,0,2),(0,1,1,0,-1),(0,0,1,1,0) >$

4) En $\mathbb{R}^4$, si S tiene como sistema generador $\{(1,1,0,0),(1,-1,0,0)\}$ y T tiene como sistema generador $\{(0,2,1,0),(-1,1,1,0)\}$, halla:

a) un sistema generador del subespacio $S+T$

b) una base de $S+T$

Solución:

a) $S+T \equiv < (1,1,0,0),(1,-1,0,0),(0,2,1,0),(-1,1,1,0) >$

b) $B_{S+T} = \{(1,1,0,0),(1,-1,0,0),(0,2,1,0)\}$

5) Dados los subespacios $S \equiv \{x+y-z-t=0, 2x+2y-z-t=0\}$ y $T \equiv \{x-y=0, z-t=0\}$ en $\mathbb{R}^4$, calcula:

a) el subespacio $S \cap T$

b) el subespacio $S+T$

Solución:

a) $S \cap T = \{(0,0,0,0)\}$

b) $S+T = \mathbb{R}^4$

6) Halla una base y la dimensión del siguiente subespacio de $\mathbb{R}^4$: $\{x+y+z+t=0, y-2z-t=0\}$

Solución:

Una posible base sería $\{(-3,2,1,0),(-2,1,0,1)\}$. Por tanto, la dimensión del subespacio será 2

7) a) Determina si los vectores $\{(1,2,3),(4,5,6),(3,3,3)\}$ forman base de $\mathbb{R}^3$

b) Determina si los vectores $\{(1,0,1),(-1,0,2)\}$ forman base del subespacio $\{y=0\}$ de $\mathbb{R}^3$

Solución:

a) No. El tercer vector es el segundo menos el primero

b) Sí

8) Extiende el siguiente conjunto de vectores hasta formar una base de $\mathbb{R}^4$: $\{(2,3,0,1),(0,2,0,0)\}$

Solución:

Bastaría con añadir los vectores $(1,0,0,0)$ y $(0,0,1,0)$

9) Dadas las bases $B \equiv \{(1,0),(0,1)\}$ y $B' \equiv \{(0,-1),(1,2)\}$, halla:

a) la matriz de cambio de base de B' a B

b) la matriz de cambio de base de B a B'

c) las coordenadas del vector $(-3,-8)$ en la base B'

Solución:

a) $P_{B' \to B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $P_{B \to B'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $(2,-3)$

10) Determina si los siguientes subespacios están o no en suma directa:

a) $S \equiv <(1,2,0,0),(1,0,0,2)>$ y $T \equiv <(0,0,2,1),(2,0,0,1)>$ en $\mathbb{R}^4$

b) $S \equiv <(1,2,0),(1,0,2)>$ y $T \equiv <(0,2,1),(2,0,1)>$ en $\mathbb{R}^3$

Solución:

a) Sí, están en suma directa

b) No, la suma nunca puede ser directa en este caso

11) Halla un subespacio suplementario de $\{(1,2,3),(4,5,6)\}$ en $\mathbb{R}^3$

Solución:

Podría ser el subespacio generado por el vector $(1,0,0)$, es decir, el eje X