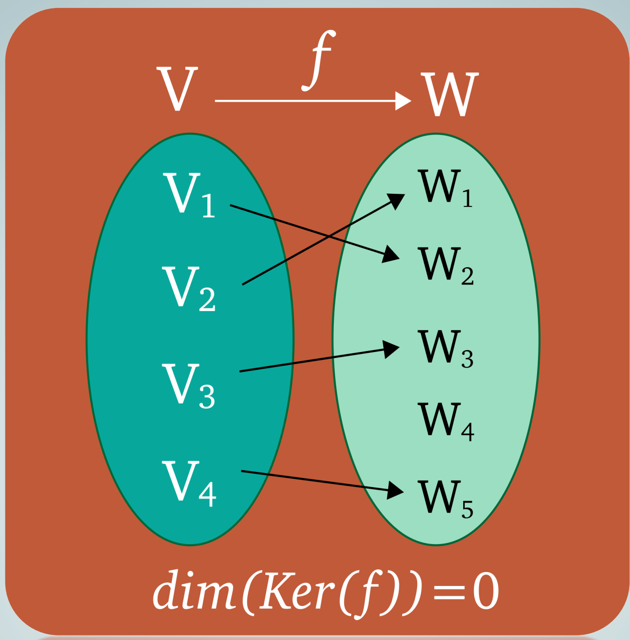
Álgebra

Problemas Tema 5. Aplicaciones lineales



Rodrigo García Manzanas
Neila Campos González
Ana Casanueva Vicente

Departamento de Matemática Aplicada y
Ciencias de la Computación

1) Comprueba si las siguientes aplicaciones son o no lineales:

a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x, y) \rightsquigarrow (x+1, y+1, x+1)$

b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y) \rightsquigarrow (y, x)$

Solución:

a) No es lineal
b) Sí es lineal

2) Dada la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z, t) \rightsquigarrow (x + 2y + t, y + 3z - t, 0)$$

a) Obtén una base de $Ker(f)$
b) Obtén una base de $Im(f)$
c) Obtén una base de la imagen de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:
- $S =< (1, 0, 1, 0), (2, 3, 0, -1) >$
- $T =< (0, 0, 3, 2), (4, 6, 3, -1), (1, 0, 0, 2) >$

Solución:

a) $\{(6, -3, 1, 0), (-3, 1, 0, 1)\}$
b) $\{(1, 0, 0), (2, 1, 0)\}$
c) Base $Im(S) = \{(1, 3, 0), (7, 4, 0)\}$, base $Im(T) = \{(2, 7, 0), (3, -2, 0)\}$

3) a) Dada la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
$$(x, y, z) \rightsquigarrow (x + y + z, z, y, x)$$

halla todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ cuya imagen sea $(4, 1, 3, 0)$

b) Dada la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \rightsquigarrow (x + y, y - z)$$

halla todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ cuya imagen sea $(1, 1)$

Solución:

a) $(0, 1, 3)$
b) $(-\alpha, 1 + \alpha, \alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$

4) Clasifica (inyectiva sí/no, suprayectiva sí/no, biyectiva sí/no) las siguientes aplicaciones:

a) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y, z, t) \rightsquigarrow (x - z, y - t)$

b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x, y, z) \rightsquigarrow (-x - y, 2x + 2y, z)$

c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x, y, z) \rightsquigarrow (3x + y, 3y + z, 3z)$

d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \rightsquigarrow \frac{1}{2-x}$

Solución:

a) Suprayectiva, no inyectiva
b) Ni inyectiva ni suprayectiva
c) Biyectiva
d) f no es una aplicación

5) Halla la ecuación de la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sabiendo que:

$$f(1, 0, 0) = (4, 4);\ f(0, 1, 0) = (-1, 1);\ f(0, 0, 1) = (2, 9)$$

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & = & 4x_1 - x_2 + 2x_3 \\ y_2 & = & 4x_1 + x_2 + 9x_3 \end{array} \right.$$

6) Halla una base de la imagen del subespacio S de $\mathbb{R}^3$ dado por la ecuación $z = 2y$, mediante la aplicación lineal cuya matriz estándar es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$\{(1,0,0),(8,8,3)\}$

7) Dada la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\rightsquigarrow (2x+3z, x+2y) \end{aligned}$$

a) Halla la matriz de f tomando como bases $B = \{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$ en $\mathbb{R}^3$ y la canónica en $\mathbb{R}^2$

b) Halla la matriz de f tomando como bases la canónica en $\mathbb{R}^3$ y $B' = \{(-2,0),(2,1)\}$ en $\mathbb{R}^2$

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

8) Dadas las bases $B = \{(1,4),(1,3)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $B' = \{(2,0,1),(0,-1,0),(3,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$:

a) Halla la matriz en bases B y B' de una aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, si su matriz estándar es $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Halla la matriz en bases canónicas de otra aplicación $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, si su matriz en bases B y B' es $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -15 & -12 \\ -4 & -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -30 & 8 \\ -12 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

9) Dada la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\rightsquigarrow (-x,-y,x+z) \end{aligned}$$

Halla la matriz de f en la base $B = \{(1,0,2),(1,0,-1),(0,3,0)\}$

Solución:

$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$