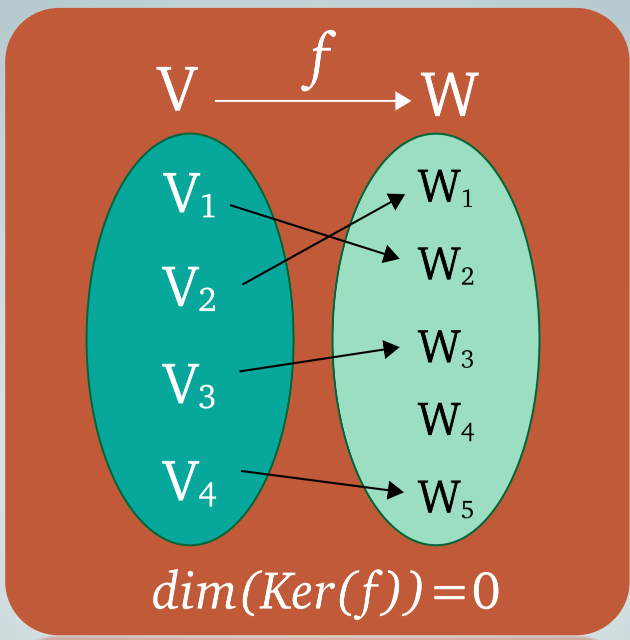
Álgebra

Problemas Tema 6. Diagonalización de endomorfismos



Rodrigo García Manzanas

Neila Campos González

Ana Casanueva Vicente

Departamento de Matemática Aplicada y
Ciencias de la Computación

Universidad de Cantabria · *Grado en Ingeniería Química*

G320: Álgebra

Tema 6: Diagonalización de endomorfismos

1) Clasifica los siguientes endomorfismos:

a) En $\mathbb{R}^3$, dado por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) En $\mathbb{R}^2$, dado por la ecuación $f(x, y) = (2x + 5, 4x + 10)$

c) En $\mathbb{R}^2$, la aplicación identidad

Solución:

a) Biyectivo

b) Ni inyectivo ni suprayectivo

c) Biyectivo

2) Halla los valores propios de los siguientes endomorfismos:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $\lambda = \{2, 1, -6\}$, simples

b) $\lambda = \{0, 5\}$, simples

3) Dado el endomorfismo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

determina si los siguientes vectores son o no vectores propios. En caso afirmativo, halla su valor propio asociado

a) $\vec{u} = (0, 3, 0)$

b) $\vec{v} = (1, 0, -1)$

c) $\vec{w} = (2, 2, 1)$

Solución:

a) Autovector con autovalor asociado 1

b) Autovector con autovalor asociado 0

c) No es autovector

4) Del endomorfismo

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

se sabe que es diagonalizable y que $\lambda = 2$ es autovalor, siendo $\{(1, 2, 0), (0, 6, 1)\}$ una base de su subespacio propio asociado. Halla, sin resolver su polinomio característico, todos los autovalores de A

Solución:

$\lambda = 2$ (doble), $\lambda = 9$ (simple)

5) De una matriz A_{2x2}, se sabe que es diagonalizable y que los valores propios son 0 y 3, con vectores propios respectivamente (1,1) y (4,1). ¿Cuál es esa matriz?

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

6) Diagonaliza, si es posible, los siguientes endomorfismos:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo polinomio característico es $(-2-\lambda)^2(1-\lambda)$

d) $f(x,y,z) = (x+y, y, y+z)$, en $\mathbb{R}^3$

e) $f(x,y,z) = (3x-3z, 3y+9z, -3z)$, en $\mathbb{R}^3$

Solución:

a) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) No es diagonalizable

c) No es diagonalizable

d) No es diagonalizable

e) $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7) Calcula A^8, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Solución:

$A^8 = \begin{pmatrix} -254 & 0 & 255 \\ -1020 & 256 & 510 \\ -510 & 0 & 511 \end{pmatrix}$