Grado en Ingeniería Química

G320: Álgebra

29-Junio-2022 • Conv. extraordinaria: Teoría

Nombre y apellidos: ....

El test está formado por **20 preguntas**. Cada una de ellas tiene tres posibles respuestas, de las cuales sólo una es correcta. **Cada respuesta correcta sumará 0.5 puntos**, de forma que la puntuación máxima que se puede alcanzar en el test es de 10. Por contra, **cada respuesta errónea restará 0.125 puntos** (1/4 de 0.5). Si prefieres no arriesgar, siempre tienes la opción de dejar la pregunta sin responder, que no sumará ni restará. Dispones de **75 minutos**.

---

1. Dados los vectores $\vec{u} = (2, 1, 1)$ y $\vec{v} = (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

   (a) Un suplementario del subespacio generado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el subespacio que tiene por base el vector $(1, 0, 0)$

   (b) Los vectores $(1, 0, 0)$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$

   (c) Un suplementario del subespacio generado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el subespacio que tiene por base el vector $(0, 0, 1)$

---

2. En $\mathbb{P}_2$, el espacio vectorial formado por los polinomios de orden menor o igual a 2 con coeficientes reales:

   (a) Los vectores $\{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$ son linealmente dependientes

   (b) Los vectores $\{1, x, 2x\}$ forman un sistema generador

   (c) El conjunto formado por los polinomios $p(x)$ que verifican $p(0) = 0$ es un subespacio vectorial

---

3. Si la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & k & 0 \end{smallmatrix}\right)$ tiene inversa, entonces:

   (a) $k = 0$

   (b) La pregunta no tiene sentido

   (c) $k \neq 0$

---

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un endomorfismo del cual se sabe que los vectores $(1, 0)$ y $(0, -2)$ actúan como vectores propios y que $f(1, 1) = (0, 1)$. ¿Cuál es la matriz estándar de f?

   (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

---

5. Dada la siguiente aplicación:
$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x, y) \rightsquigarrow (-x + y, x - y, 2x - 2y)$
¿Qué vector(es) tiene(n) como imagen el vector $(-4, 4, 8)$?
   (a) Los que pertenecen al subespacio de $\mathbb{R}^2$ que tiene por base el vector $(1, 1)$
   (b) Los de la forma $(\alpha + 4, \alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$
   (c) Ninguno

6. Sea $S : \{x - y + z = 0, z = 0\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$. ¿Cuál de los siguientes vectores pertenece a $S^{\perp}$?
   (a) $(\frac{1}{2}, 0, 1)$
   (b) $(0, 1, -1)$
   (c) $(-1, 1, 4)$

7. Sean A y B matrices cuadradas de orden 4, y B singular. Entonces:
   (a) $rg(AB) = 4$
   (b) $rg(AB) < 4$
   (c) $rg(AB) = 3$

8. Si $A \in \mathbb{M}_{n \times n}$ (matrices reales cuadradas de orden n) y el sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b} \neq \vec{0}$ es incompatible, ¿que se podría decir sobre el sistema $A\vec{x} = \vec{0}$?
   (a) Es compatible indeterminado
   (b) Es incompatible
   (c) Puede ser compatible determinado o indeterminado

9. Sea el siguiente sistema:
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 2 \\ x + 2y & = & 1 \end{array} \right.$$
Para resolverlo aplicando la factorización de Cholesky necesitaremos un vector intermedio que hemos llamado $\vec{y}$. De entre los siguientes, ¿cuál podría ser ese $\vec{y}$?
   (a) $\vec{y} = (-2, 1)$
   (b) $\vec{y} = (1, 2)$
   (c) $\vec{y} = (1, -2)$

10. En $\mathbb{R}^3$, ¿cuál será la proyección ortogonal del vector $(2, 1, -2)$ sobre el plano que tiene por ecuación implícita $x + y = -z$?
   (a) $(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -2)$
   (b) $\frac{1}{6}(10, 4, -14)$
   (c) $(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$

11. En $\mathbb{R}^2$, considera el siguiente producto escalar:
$$(x, y) \cdot (x', y') = (x, y) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
En estas condiciones:
   (a) La distancia del vector $(1, 1)$ al $(0, 0)$ es $\sqrt{2}$
   (b) Si $|(x, y)| = 1$, entonces $x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{2}$
   (c) Ninguna de las otras opciones es cierta

12. Sean los subespacios S y T de $\mathbb{R}^3$ tales que S tiene como sistema generador los vectores $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ y T tiene por forma implícita la ecuación $x=z$. ¿Cuál será la dimensión del subespacio $S\cap T$?

   (a) 1
   (b) 2
   (c) 0

13. Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación implícita $x=y$. En estas condiciones:

   (a) $dim(S)=1$
   (b) Si T es otro subespacio de $\mathbb{R}^3$ tal que $T:\{x=y=0\}$, entonces $S\oplus T$
   (c) El subespacio de $\mathbb{R}^3$ que tiene por base el vector $(-5,5,0)$ es un complementario de S

14. Considera el siguiente sistema: $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&b\\0&a&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\c\end{pmatrix}$, con $a,b,c\in\mathbb{R}$

   ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

   (a) El sistema es compatible determinado $\forall a,b,c$
   (b) Si $a=b=1$, el sistema es compatible indeterminado
   (c) Si $c\neq 0$ y $a=b=0$, el sistema es incompatible

15. Se sabe que λ_1 y λ_2 son los valores propios de una matriz A, siendo $V_{\lambda_1}=<(1,0,1)>$ y $V_{\lambda_2}=<(0,1,1)>$. En estas condiciones se puede afirmar con seguridad que:

   (a) A no es diagonalizable
   (b) A no es simétrica
   (c) A es ortogonal

16. Sea $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ una aplicación lineal tal que $f(x,y)=\left|\begin{smallmatrix}x&y\\1&1\end{smallmatrix}\right|$

   (a) Es inyectiva
   (b) No es ni inyectiva ni suprayectiva
   (c) Es suprayectiva

17. ¿Para qué valores de α y β es diagonalizable la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&\alpha\\0&0&\beta\\0&0&1\end{pmatrix}$?

   (a) Para $\alpha=\beta=0$
   (b) $\forall\alpha=\beta$
   (c) $\forall\alpha=-\beta$

18. Sea $f:U\longrightarrow U$ un endomorfismo en el espacio vectorial U. Entonces:

   (a) $Im(f)=V_{\lambda=0}$
   (b) Si f es inyectiva, $dim(V_{\lambda=0})\geq 1$
   (c) $Ker(f)=V_{\lambda=0}$

19. La aplicación lineal que asigna a cada polinomio de grado menor o igual a n, su derivada:

    (a) No tiene valores propios
    (b) Tiene a 0 como valor propio
    (c) Tiene algún valor propio no nulo

20. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que $f(x, y) = (x+y, -x-y)$. En estas condiciones, el vector $(1, -1)$ es:

    (a) Una base de $Ker(f)$ y de $Im(f)$
    (b) Una base de $Im(f)$, pero no de $Ker(f)$
    (c) Una base de $Ker(f)$, pero no de $Im(f)$

Grado en Ingeniería Química
G320: Álgebra

29-Junio-2022 • Conv. extraordinaria: MATLAB

Nombre y apellidos: ....

El test está formado por **15 preguntas**. Cada una de ellas tiene tres posibles respuestas, de las cuales sólo una es correcta. **Cada respuesta correcta sumará $\frac{10}{15}$ (0.6667) puntos**, de forma que la puntuación máxima que se puede alcanzar en el test es de 10. Por contra, **cada respuesta errónea restará 0.1667 puntos** (1/4 de 0.6667). Si prefieres no arriesgar, siempre tienes la opción de dejar la pregunta sin responder, que no sumará ni restará. Dispones de **75 minutos**.

---

1. ¿Para qué valor/es de a se puede expresar el vector $(33, \pi, \sqrt{3}, 2a)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ y $\vec{u_3}$?

   $\vec{u_1} = (-1, 0, 1, 2)$

   $\vec{u_2} = (0, 7, -1, -4)$

   $\vec{u_3} = (0, 0, -2, -2)$

   (a) Para $a = -16.3072$
   (b) Para $a = \{0, -16.3072\}$
   (c) Para $a = 16.3072$

---

2. ¿Es diagonalizable el siguiente endomorfismo?

   $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
   $(x, y, z) \rightsquigarrow (6x + 3y, 6y + 3z, 6z)$

   (a) Sí, por ser su matriz estándar triangular
   (b) No, ya que el subespacio propio asociado al único autovalor (triple) es de dimensión 2
   (c) No, ya que el subespacio propio asociado al único autovalor (triple) es de dimensión 1

---

3. Sea f un endomorfismo en $\mathbb{R}^4$ del que se sabe que:

   - $Ker(f) : \{-\sqrt{2}x = y, z = t\}$
   - La imagen por f del subespacio $S = \{(2\alpha, 0, -\beta, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ tiene por base los vectores $\{(2, 3, 0, -1), (0, 0, -2, -2)\}$

   ¿Cuál sería la imagen por f del vector $(0, -2, \sqrt{2}, 0)$?

   (a) $(5.4625, 0, -2.4429, 0)$
   (b) $(-\sqrt{2}, -2.1213, \sqrt{2}, 2.1213)$
   (c) $(20.1290, 5.4625, 0, 0)$

---

4. Realiza un ajuste del tipo $y = a\ ln(x) + b$ a la siguiente nube de puntos:

x	1	2.23	3	4	5.12	6	7	7.44
y	4.03	8.17	14.19	20.33	27.4	34.53	42.63	46.43

¿Cuál es el error cuadrático cometido? ¿Y el error (en valor absoluto) en el punto $x = 4$?

(a) Error cuadrático: 239.4223
Error en $x = 4$: 5.5231

(b) Error cuadrático: $2.8723 \cdot 10^3$
Error en $x = 4$: 4.2250

(c) Error cuadrático: $2.8723 \cdot 10^{-3}$
Error en $x = 4$: 4.2250

---

5. ¿Cuál es la solución de mínimos cuadrados del siguiente sistema?

$$\left\{\begin{array}{rcr} 4x - y - 9z &=& 1 \\ 12x + 11y - 43z &=& 0 \\ -7y + 8z &=& -1 \end{array}\right.$$

¿Qué error cuadrático se comete con esta solución aproximada?

(a) Solución: $(\frac{3}{392}, \frac{2}{49}, \alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$
Error cuadrático: 0.3867

(b) Solución: $(0, -\frac{2}{3}, 0)$
Error cuadrático: $\frac{2}{3}$

(c) Solución: $(\frac{71}{28}\alpha - \frac{3}{392}, \frac{8}{7}\alpha + \frac{2}{49}, \alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$
Error cuadrático: 1.7857

---

6. Dada la siguiente aplicación lineal
$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x, y, z, t) \rightsquigarrow (-x + \sqrt{5}t, y - z, -t)$
¿Cuál sería la matriz de f en las bases $B = \{(1, 0, 0, 0), (0, -2, -1, 0), (-1, 0, -2, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^4$ y $B' = \{(1, 0, 0), (0, -2, -1), (-1, 0, -2)\}$ de $\mathbb{R}^3$?

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1.25 & -0.25 & 0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & -0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -1 & -0.25 & 1.5 & 2.7361 \\ 0 & 0.5 & -1 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3.2361 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

---

7. En $\mathbb{R}^2$, ¿cuál es la matriz de reflexión (Householder) que sitúa al punto $(-\sqrt{5}, -\sqrt{2})$ sobre la recta $y = -3x$ (en el segundo cuadrante)?

(a) $\begin{pmatrix} 0.8830 & 0.4694 \\ 0.4694 & -0.8830 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0.7744 & -0.6328 \\ -0.6328 & -0.7744 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0.8475 & 0.5308 \\ 0.5308 & -0.8475 \end{pmatrix}$

8. En $\mathbb{R}^2$, ¿cuál es la matriz de rotación (Givens) que sitúa al punto $(-\sqrt{5}, 0)$ sobre la recta $y = \sqrt{5}x$ (en el tercer cuadrante)?

(a) $\begin{pmatrix} 0.4082 & -0.9129 \\ 0.9129 & 0.4082 \end{pmatrix}$

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 0.9129 & -0.4082 \\ 0.4082 & 0.9129 \end{pmatrix}$

9. En $C[0, \frac{\pi}{2}]$, con el producto escalar definido como $f \cdot g = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x)dx$, ¿cuál es el ángulo (en grados) entre $f(x) = e^x$ y $g(x) = \frac{sen(x)}{x}$?

(a) 23.8422

(b) 31.1655

(c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. Como sabes, la factorización de matrices $A = LU$ (ó $PA = LU$) permite resolver ciertos sistemas de ecuaciones lineales del tipo $A\vec{x} = \vec{b}$ fácilmente. Para ello, hará falta un vector “intermedio” al que hemos llamado $\vec{y}$. ¿Cuál sería ese vector en el caso del siguiente sistema?

$$\left\{ \begin{array}{rcr} -x & = & -3 \\ -2x + y + z & = & -2 \\ x - 7z & = & 0 \end{array} \right.$$

(a) $\vec{y} = (-2, -2, -3)$

(b) $\vec{y} = (-2, -4, \frac{1}{3})$

(c) $\vec{y} = (3, 2, 2)$

11. ¿Cuál es la solución del siguiente sistema?

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 3x + 5y - 4z & = & 1 \\ 9x + 15y - 12z & = & 3 \\ -6x - 10y + 8z & = & -2 \end{array} \right.$$

(a) $(\frac{4}{3}\alpha - 1, 2, \alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$

(b) $(\frac{4}{3}\alpha - 1, 2, \beta)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(c) $(\frac{4}{3}\alpha - \frac{5}{3}\beta + \frac{1}{3}, \beta, \alpha)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

12. Sea $S: \{-3x + y - 2z + 9t = 0, y - z = 0\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^4$. ¿Formarán los vectores $\{(-3,-1,-1,0),(1,1,2,-3)\}$ base de un complementario de S?

   (a) Sí

   (b) No

   (c) Sólo el vector $(-3,-1,-1,0)$

---

13. Sean S y T los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

   $S: \{(4\alpha, 0, -\beta, 2\alpha - \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

   $T: \left\{ \begin{array}{rcl} -2x + 5y - 7z & = & 0 \\ -y + 3z + t & = & 0 \end{array} \right.$

   ¿Están en suma directa?

   (a) No, la intersección tiene dimensión 2

   (b) Sí

   (c) No, la intersección tiene dimensión 1

---

14. Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^6$ que tiene por sistema generador el siguiente:
   $< (-9,0,-4,1,-1,0),(5,0,0,-2,-1,3),(-4,0,-4,-1,-2,-4) >$.
   ¿Cuál es la forma implícita de S?

   <u>*Nota*</u>: El orden de las variables en $\mathbb{R}^6$ es (x, y, z, t, u, v)

   (a) $\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{2}{5}x + \frac{47}{70}y - \frac{13}{20}z + t & = & 0 \\ \frac{1}{5}x + \frac{8}{35}y - \frac{7}{10}z + u & = & 0 \\ -\frac{3}{5}x - \frac{33}{70}y + \frac{27}{20}z + v & = & 0 \end{array} \right.$

   (b) $\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ 0.4x - 0.65z + t & = & 0 \\ 0.2x - 0.7z + u & = & 0 \end{array} \right.$

   (c) $\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{2}x - 2z & = & 0 \\ -\frac{1}{2}y + u & = & 0 \\ x + t & = & 0 \end{array} \right.$

---

15. Sean S y T los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^5$:

   $S: \left\{ \begin{array}{rcl} 8x + 5y & = & 0 \\ t - 2u & = & 0 \end{array} \right.$

   $T: \left\{ \begin{array}{rcl} -16x - 10y & = & 0 \end{array} \right.$

   ¿Cuál es la dimensión del subespacio $S + T$?

   <u>*Nota*</u>: El orden de las variables en $\mathbb{R}^5$ es (x, y, z, t, u)

   (a) 5

   (b) 3

   (c) 4