Tema 1: Señales y Sistemas

1. Introducción.
2. Señales continuas y discretas.
3. Transformaciones de la variable independiente.
4. Características de señales.
5. Señales elementales
6. Propiedades de los sistemas.

1.1 Introducción

- ¿Qué es una señal?
- Una función (t, x, $\ldots$) que lleva *información* acerca del proceso físico o matemático al que representa.
- Ejemplos de señales:
    - CD, MP3, ECG, EEG, RNM, PET, TAC {`ecg.m`}.
    - Tensión de un micrófono {`anykey.m`}.
    - Señales de radio.
    - Número de manchas solares en un año.
    - Radiación fondo cósmico microondas {`cmbr.m`}.
    - Cotización acciones {`msft.m`}

1.1 Introducción (II)

- Representación matemática como función de una o más variables independientes.
- Continua unidimensional: $x(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
- Discreta unidimensional: $x[n]$o$x_n \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
- Bidimensionales: $x(u, v)$, $x[n, m]$, $x_{n,m}$.
- Función cuyo patrón de variación lleva información.
- Señales deterministas y aleatorias (ruido).
- Procesado de señal: representación, transformación y manipulación de señales y de la información que contienen.

1.1 Introducción (III)

- ¿Qué es un sistema?
- Cualquier dispositivo físico u operador matemático que transforma señal(es) de entrada en señal(es) de salida y/o algún efecto físico.
- Un sistema realiza operaciones sobre señales, las modifica {`riceedge.m`}, {`eco.m`}.
- Es una abstracción matemática de un sistema físico, un modelo.
- Matemáticamente, un operador: $x(t) \xrightarrow{h} y(t)$.

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) \longrightarrow \boxed{h(\cdot)} \longrightarrow \mathbf{y}(\mathbf{t})$$

1.2 Señales continuas y discretas

- Señales continuas: $x(t)$ o $x_c(t)$. Familiaridad por circuitos eléctricos, mecánica, ...
- La secuencia $x[n]$ está definida para $n \in \mathbb{Z}$.
- Para poder tratar numéricamente una señal en un ordenador se necesita muestrear y cuantizar `{sampling.m, cuantos.m}`
- Periodo de muestreo T,

$$x[n] = x(nT).$$

- Intervalo de cuantificación Δ:

$$x[n] = \Delta \text{ round} \left(\frac{x(nT)}{\Delta} \right).$$

1.2 Señales continuas y discretas (II)

tiempo / amplitud	continua	discreta
continuo	analógica	cuantizada
discreto	muestreada	digital

- Cuatro tipo de señales {`contdisc.m`}.
- Cuantificación: la señal $e[n]$ es una secuencia aleatoria acotada {`qnoise.m`}.
- Por defecto, trabajaremos con señales analógicas (continuas) y muestreadas (discretas).

1.3 Transf. de la variable independiente

- Pregunta básica:
- ¿Cómo cambia $x(t)$ o $x[n]$ cuando se transforma t o n?
- Desplazamiento temporal:
  - $x(t) \rightarrow x(t-t_0)$ {`shiftc.m, shiftd.m`}.
  - Retrasada si $t_0 > 0$, adelantada si $t_0 < 0$.
  - Ejemplo: $y[n] = x[n] + x[n-n_0]$ {`eco.m`}.
  - Tiempo de propagación.
- Inversión temporal: $x[-n]$ {`back.m`}
- Escalado temporal: $x(2t)$ comprimida, $x(t/2)$ expandida {`escala.m`}, {`cartaesc.m`}.
- ¿Somos capaces de reconocer la voz?

1.3 Transf. variable independiente (II)

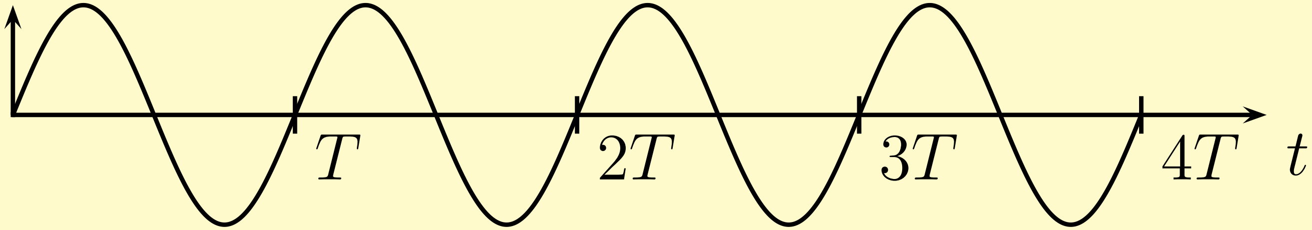
- La transformación $y(t) = x(\alpha t + \beta)$ conserva la forma.
- $y(t) = x(\alpha t + \beta)$: $y(0) = x(\beta)$, $y(-\beta/\alpha) = x(0)$.
- Ejemplo: si $x(t) = [|t| < 1]$, calcular $y(t) = x(2t + 3)$.
- Método 1 {`orden.m`}:
  i) $t \to \alpha t$: $p(t) = x(\alpha t)$.
  ii) $t \to t + \beta$: $q(t) = x(\alpha(t + \beta)) = x(\alpha t + \alpha\beta) \neq y(t)$.
  iii) $t \to t + \beta/\alpha$: $r(t) = x(\alpha t + \beta) = y(t)$.
- Método 2:
  i) $t \to t + \beta t$: $u(t) = x(t + \beta)$.
  ii) $t \to \alpha t$: $v(t) = x(\alpha t + \beta) = y(t)$.

1.4 Características de señales

- Señales periódicas.
- Señales pares e impares.
- Señales simétricas conjugadas.
- Energía y potencia de una señal.

1.4.1 Señales periódicas

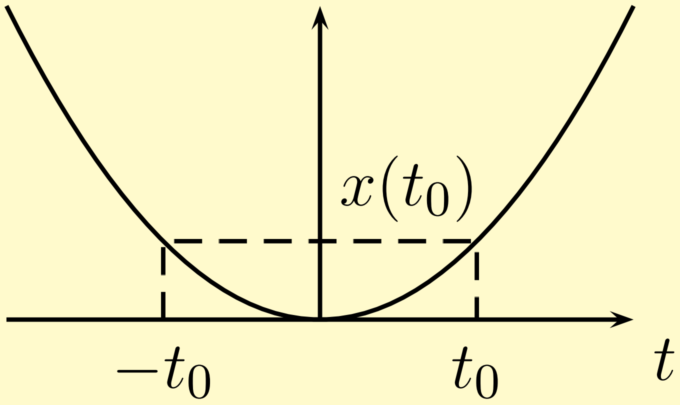
- Si existe $T > 0$ tal que $x(t+T) = x(t)$ para todo t.

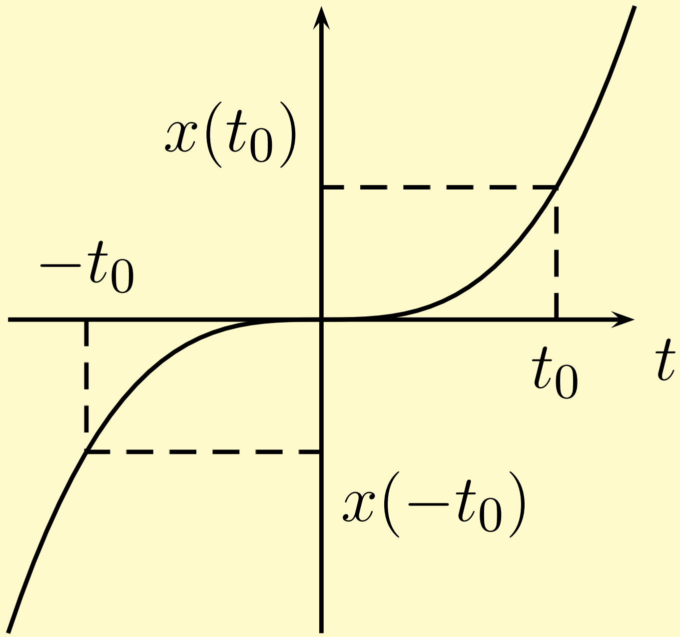


- Se verifica $x(t) = x(t+mT)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.
- T_0 es el periodo fundamental, excepto si $x(t) =$ cte.
- $x[n+N] = x[n]$, N_0. $N, 2N, 3N, \ldots$.
- Frecuencia angular:
  - Continua: $\Omega = \dfrac{2\pi}{T}$ rad/s.
  - Discreta: $\omega = \dfrac{2\pi}{N}$ rad.

1.4.2 Señales pares e impares

- Par: $x(t) = x(-t)$, $x[n] = x[-n]$.
- Impar: $x(t) = -x(-t)$, $x[n] = -x[-n]$.
- Si es impar, $x(0) = 0$, $x[0] = 0$.





1.4.2 Señales pares e impares (II)

- Toda señal puede ponerse como la suma de una señal par y otra impar.
- Si definimos

$$x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)),$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)).$$

- Entonces, $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$.

1.4.2 Señales pares e impares (II)

- Hacer ejercicios 1.34 y 1.37.
- Ejemplo, descomponer $x[n] = [n \geq 0]$.

$$
\begin{aligned}
x[-n] &= [-n \geq 0] = [n \leq 0], \\
x_e[n] &= \frac{1}{2}([n \geq 0] + [n \leq 0]) \\
&= \frac{1}{2}([n > 0] + 2[n = 0] + [n < 0]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[n = 0], \\
x_o[n] &= \frac{1}{2}([n > 0] - [n < 0]) = \frac{1}{2}[n > 0] - \frac{1}{2}[n < 0].
\end{aligned}
$$

Mostrar notación convencional.

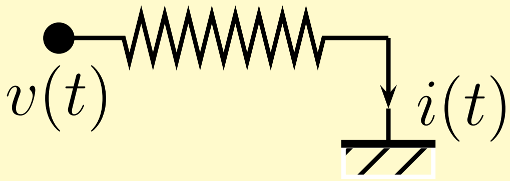
1.4.3 Señales simétricas conjugadas

- Es el criterio de paridad importante para señales complejas.
- $x(t)$ es simétrica conjugada si $x(-t) = x^*(t)$.
- Sea $x(t) = a(t) + jb(t)$ simétrica conjugada:

$$\begin{aligned} x(-t) &= a(-t) + jb(-t) \\ &= a(t) - jb(t). \end{aligned}$$

  - Por tanto, $a(t)$ es par y $b(t)$ impar.

1.4.4 Energía y potencia de una señal



- Potencia

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{1}{R}v^2(t).$$

- Energía $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R}v^2(t)\,dt.$$

- Potencia media:

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt.$$

1.4.4 Energía y potencia de una señal (II)

- Energía en un intervalo:

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \, dt, \qquad \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2.$$

- Potencia media en el intervalo:

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \, dt, \qquad \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2.$$

- Integral: área bajo la curva (de $|x(\cdot)|^2$).

1.4.4 Energía y potencia de una señal (III)

- Energía:

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt, \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2.$$

- Potencia:

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt, \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2.$$

1.4.4 Energía y potencia de una señal (IV)

- Señales de energía finita
  - $E_\infty < \infty$.
  - $P_\infty = \lim_{T\to\infty} \dfrac{E_\infty}{2T} = 0$.
  - Ej: $x(t) = [|t| \leq 1]$: $E_\infty = 2$, $P_\infty = 0$.
- Señales de potencia finita
  - $P_\infty > 0$, finita.
  - $E_\infty = \infty$.
  - Ej: $x[n] = 4$: $P_\infty = 16$, $E_\infty = \infty$.
- Ejemplo de señal con P_∞ y E_∞ infinitas: $x(t) = t$.

1.5 Señales elementales

- Son importantes porque:
  - Sirven de base para otras.
  - Modelan situaciones reales

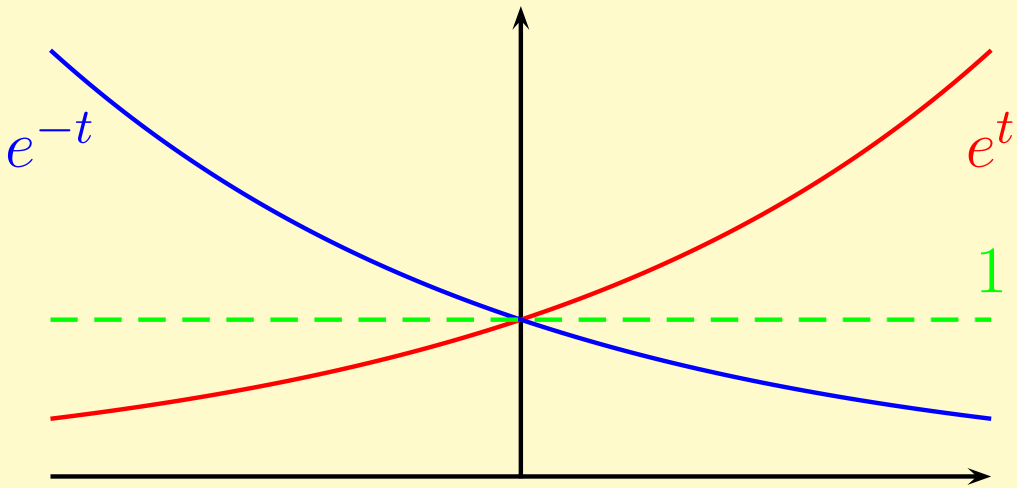
1. Señales exponenciales y sinusoidales.
   (a) Continuas.
   (b) Discretas.
   (c) Propiedades de periodicidad.
2. Impulso, escalón y rampa.
   (a) Discretas.
   (b) Continuas.

1.5.1.1 Exponenciales continuas

- Exponenciales complejas continuas:

$$x(t) = Ce^{at}, \quad \text{donde } a, C \in \mathbb{C}.$$

- Exponenciales reales: $a, C \in \mathbb{R}$.
- Si $a <\geq 0$: decreciente, creciente o constante.



1.5.1.1 Exponenciales continuas (II)

- Exponenciales complejas periódicas:

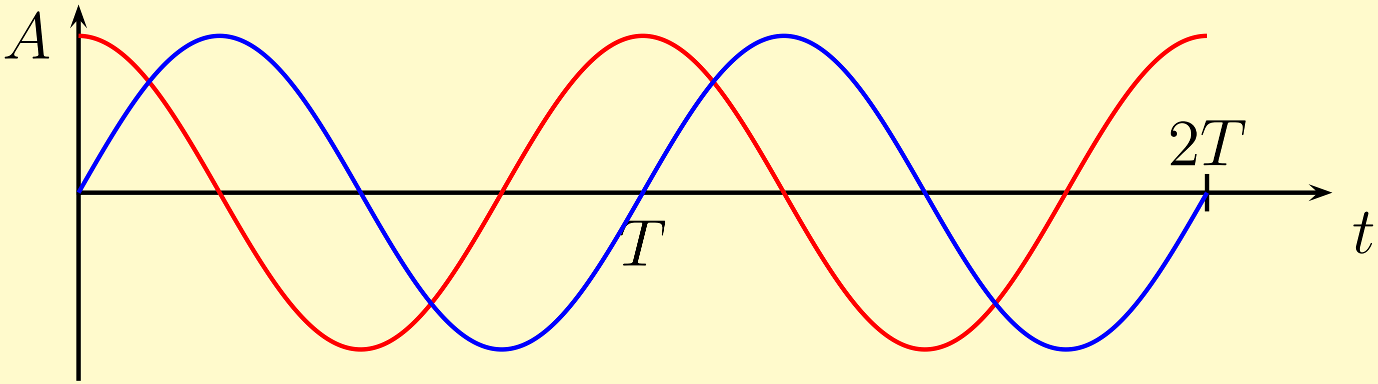
$$C \in \mathbb{C}, \qquad C = |C|e^{j\phi} = Ae^{j\phi};$$
$$a \in \mathbb{I}, \qquad a = j\Omega_0.$$

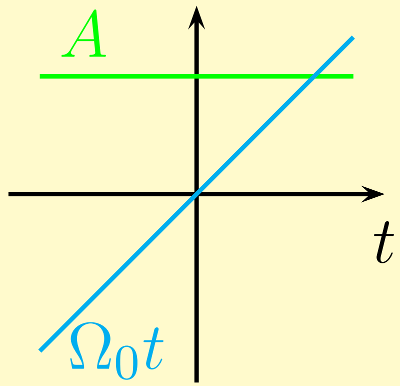
- $x(t) = |C|e^{j(\Omega_0 t + \phi)}$.
- Periódica si $x(t+T) = x(t)$.
- Período: $T = \frac{2\pi}{\Omega_0}$, ya que $e^{j\theta} = e^{j(\theta \pm 2\pi)}$. $T|_{\Omega_0} = T|_{-\Omega_0}$.
- Frecuencias negativas: gira en sentido contrario.
- Cualquier Ω_0 da lugar a una señal periódica.
- $\Omega_0 = 2\pi f_0$, $f_0 = \frac{1}{T}$.

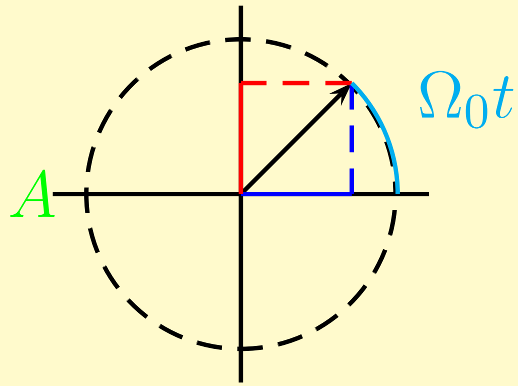
1.5.1.1 Exponenciales continuas (III)

- Si $x(t) = Ae^{j(\Omega_0 t+\phi)}$, según la regla de Euler:

$$\mathrm{Re}\{x(t)\} = A\cos(\Omega_0 t+\phi), \qquad \mathrm{Im}\{x(t)\} = A\,\mathrm{sen}(\Omega_0 t+\phi).$$







1.5.1.1 Exponenciales continuas (IV)

- Señales armónicamente relacionadas,

$$\phi_k(t) = e^{jk\Omega_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \ldots.$$

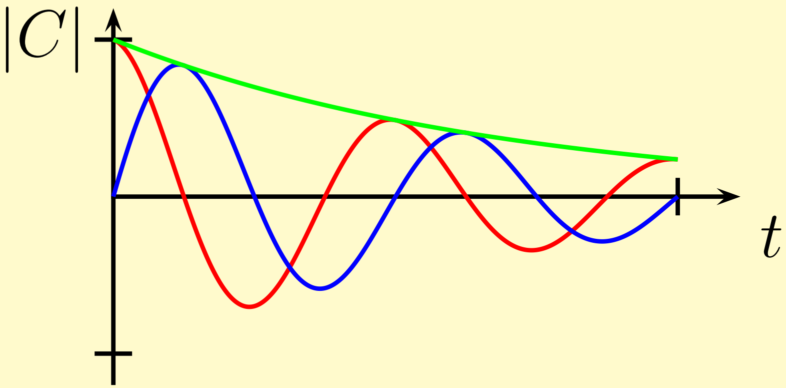
- Energía y potencia: sea $x(t) = e^{j\Omega_0 t}$,
  - $E_{T_0} = \int_0^{T_0} |e^{j\Omega_0 t}|^2 \, dt = T_0$,
  - $P_{T_0} = 1$,
  - $E_\infty = \infty$,
  - $P_\infty = 1$.

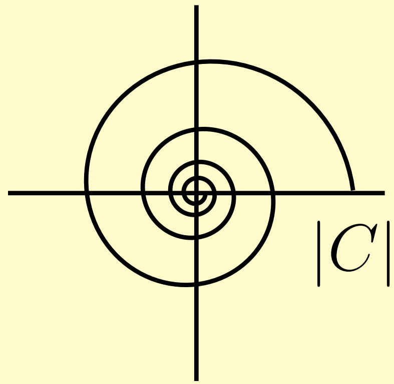
1.5.1.1 Exponenciales continuas (V)

- Caso general: $C = |C|e^{j\theta}$, $a = r + j\Omega_0$.

$$x(t) = |C|e^{rt}e^{j(\Omega_0 t+\theta)}$$
$$= |C|e^{rt}\cos(\Omega_0 t + \theta) + j|C|e^{rt}\,\mathrm{sen}(\Omega_0 t + \theta).$$

- Envolvente $|x(t)| = |C|e^{rt}$, real e imag, polar.





1.5.1.2 Exponenciales discretas

- Exponenciales complejas discretas,

$$x[n] = C\alpha^n, x[n] = Ce^{an}. \qquad C, \alpha, a \in \mathbb{C}.$$

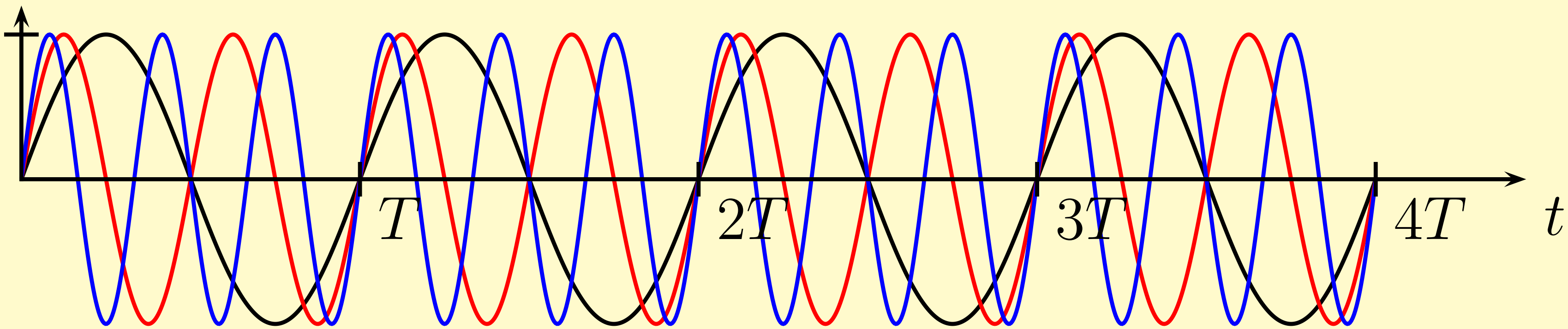
- Exponenciales reales: $C, \alpha \in \mathbb{R}$ {`expdisc.m`}
  - Si $|\alpha| > 1$ crece, si $|\alpha| < 1$ decrece.
  - Si $\alpha > 0$ no cambia de signo, si $\alpha < 0$ alterna.
  - Si $\alpha = 1$, $x[n] =$ cte, si $\alpha = -1$, $x[n] = C(-1)^n$

1.5.1.2 Exponenciales discretas (II)

- Exponenciales complejas
  - Si $\alpha = e^a = e^{r+j\omega}$, $x[n] = e^{an} = e^{rn}(\cos\omega n + j\,\mathrm{sen}\,\omega n)$.
  - Si $\omega = \pi$, $\cos\omega n = (-1)^n$, $\mathrm{sen}\,\omega n = 0$.
  - Si $t \notin \mathbb{Z}$, $e^{at} \in \mathbb{C}$. En las continuas no hay una exponencial real con $\alpha < 0$.
- Sinusoidales: $a \in \mathbb{I} \to |\alpha| = 1$.
  - $x[n] = Ae^{j(\omega_0 n+\phi)}$.
- General: $C = |C|e^{j\phi} = Ae^{j\phi}$, $\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$.
  - $x[n] = A|\alpha|^n e^{j(\omega_0 n+\phi)}$.

1.5.1.3 Propiedades de periodicidad

- Continuas, $x(t) = e^{j\Omega_0 t}$.
  1. Cuanto mayor Ω_0, menor T.
  2. Es periódica para todo Ω_0.



1.5.1.3 Propiedades de periodicidad (II)

- Discretas, $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ {`perdisc.m`}

  1. $e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j\omega_0 n} \longrightarrow \omega_0 \equiv \omega_0 + 2\pi$ indistinguibles. Intervalo frecuencial de 2π ($[0, 2\pi]$ o $[-\pi, \pi]$) $T \not\downarrow$ cuando $\omega_0 \uparrow$, $T_{\text{min}} = T|_{\omega_0=\pi}$: $e^{j\pi n} = (-1)^n$.
  2. $e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n} \rightarrow e^{j\omega_0 N} = 1$, por tanto $\omega_0 N = 2\pi m$, $\omega_0 = 2\pi\frac{m}{N}$, $\frac{\omega_0}{2\pi} \in \mathbb{Q}$.

  ω_0 es la frecuencia de la envolvente, la frecuencia fundamental ω_{fund} es la frecuencia de la secuencia discreta.

$$\omega_0 = 2\pi\frac{m}{N} \rightarrow N = m\frac{2\pi}{\omega_0} \; :, \qquad N = \frac{2\pi}{\omega_{\text{fund}}} \rightarrow \omega_{\text{fund}} = \frac{\omega_0}{m}.$$

1.5.1.3 Propiedades de periodicidad (III)

- Hacer ejercicios 1.35 y 1.36.
- Ejercicio: ¿son periódicas las siguientes señales? Calcular N y ω_{fund}. {`ejperdis.m`}
  a) $x[n] = \text{sen}(2n)$.
  b) $x[n] = \cos(0.2\pi n)$.
  c) $x[n] = e^{j6\pi n}$.
  d) $x[n] = e^{j6\pi n/35}$

1.5.1.3 Propiedades de periodicidad (IV)

a) Si $x[n] = \text{sen}(2n)$: $\omega_0 = 2 \neq 2\pi\frac{m}{N}$: no periódica.

b) Si $x[n] = \cos(0.2\pi n)$:

$$\omega_0 = 0.2\pi = 2\pi\frac{1}{10}, N = 10, \omega_{\text{fund}} = \omega_0.$$

c) Si $x[n] = e^{j6\pi n}$:

$$\omega_0 = 6\pi = 2\pi\frac{3}{1}, N = 1, \omega_{\text{fund}} = \omega_0/3 = 2\pi.$$

d) Si $x[n] = e^{j6\pi n/35}$:

$$\omega_0 = \frac{6\pi}{35} = 2\pi\frac{3}{35}, N = 35, \omega_{\text{fund}} = \omega_0/3 = 2\pi/35.$$

1.5.1.3 Propiedades de periodicidad (V)

- Exponenciales relacionadas armónicamente (periódo común N)

$$\phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- En el caso continuo, todas las $\phi_k(t) = e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$ son distintas, en el discreto no:

$$\phi_{k+N}[n] = e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = e^{j(k\frac{2\pi}{N}n+2\pi n)} = \phi_k[n],$$

- Sólo hay N distintas de periodo N:

$$\phi_0[n] = 1, \phi_1[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}n}, \ldots, \phi_{N-1}, \phi_N = \phi_0.$$

1.5.1.3 Propiedades de periodicidad (VI)

Ejemplo: {`ejh16.m`}

a) Si $x_1[n] = \operatorname{sen}(5\pi n)$ y $x_2[n] = \sqrt{3}\cos(5\pi n)$, calcular N.

b) Evaluar amplitud y fase de $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$.

a) Como $\omega_0 = 5\pi = 2\pi\frac{5}{2}$, $N = 2$, $\omega_{\text{fund}} = \frac{5\pi}{5} = \pi$.

b) $y[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi) = A\cos\omega_0 n\cos\phi - A\operatorname{sen}\omega_0 n\operatorname{sen}\phi$.

$$\begin{cases} A\cos\phi = \sqrt{3}, \\ A\operatorname{sen}\phi = -1 \end{cases} \qquad A^2 = 4 : A = 2, \qquad \operatorname{sen}\phi = -\frac{1}{2} : \phi = -\frac{\pi}{6}.$$

Por tanto, $y[n] = 2\cos(5\pi n - \pi/6)$.

1.5.2.1 Impulso, escalón y rampa

Caso discreto

- Impulso unitario o muestra unitaria {`deltad.m`},

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0, \end{cases} = [n = 0].$$

- Propiedad de muestreo:

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n] \neq x[0],$$
$$x[n]\delta[n - n_0] = x[n_0]\delta[n - n_0].$$

1.5.2.1 Impulso, escalón y rampa (II)

- Escalón unitario {`ud.m`}:

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n \geq 0, \end{cases} = [n \geq 0].$$

- $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$.
- $u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$ (ver para $n = 0, 1, \ldots$).
- $m = n - k \rightarrow u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$.

  $\boxed{\text{Dibujar con eje abscisas } k \text{ y de } n}$. Superposición.

1.5.2.1 Impulso, escalón y rampa (III)

- Rampa, $r[n] = nu[n]$ {`rampa.m`}:

$$r[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ n, & n \geq 0, \end{cases} = n[n \geq 0].$$

- Ejemplo: expresar $x[n] = [0 \leq n \leq 9]$ en función de $u[n]$ y de $\delta[n]$.

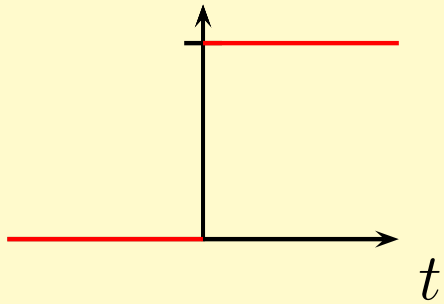
$$x[n] = \sum_{k=0}^{9} \delta[n-k],$$

$$x[n] = u[n] - u[n-10].$$

1.5.2.2 Impulso, escalón y rampa (I)

Caso continuo

- Escalón unitario, discontinuo en $t = 0$:



$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0, \end{cases}$$

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] \longleftrightarrow u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau,$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \longleftrightarrow \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$: problema formal.

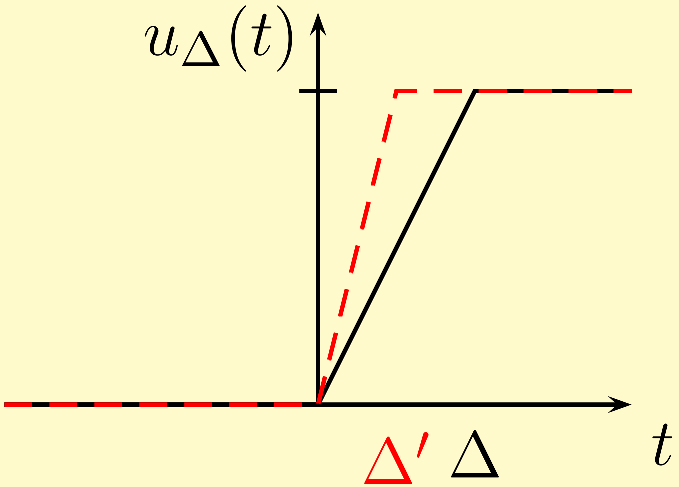
1.5.2.2 Impulso, escalón y rampa (II)

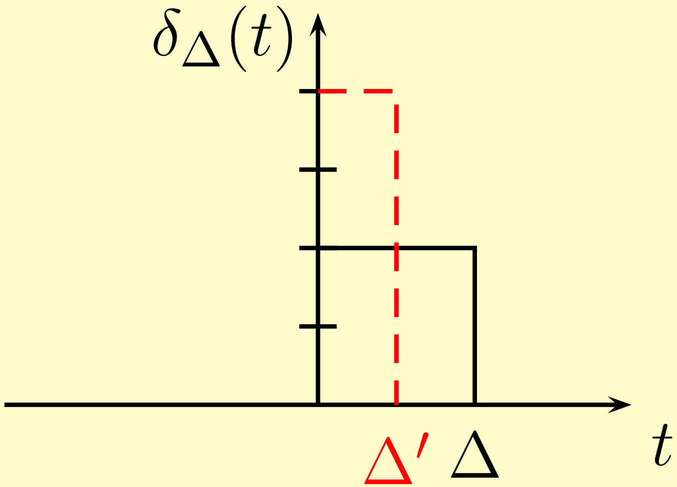
Definimos

$$u_\Delta(t) = \frac{t}{\Delta}[0 \leq t < \Delta] + [t > \Delta],$$

$$\lim_{\Delta \to 0} u_\Delta(t) = u(t),$$

$$\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt} = \frac{1}{\Delta}[0 \leq t < \Delta];$$



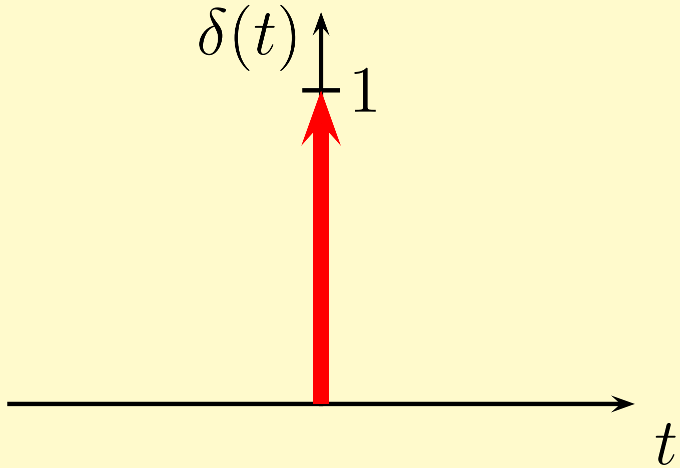


1.5.2.2 Impulso, escalón y rampa (III)

- Área de $\delta_\Delta(t) = 1$.

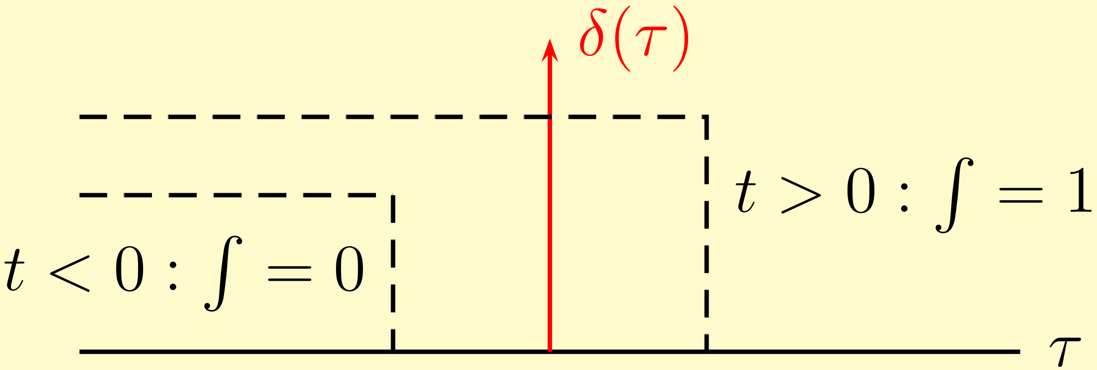
$$\delta(t) = \lim_{\Delta\to 0} \delta_\Delta(t).$$

- Delta de Dirac.
- Distribución.
- Representación:

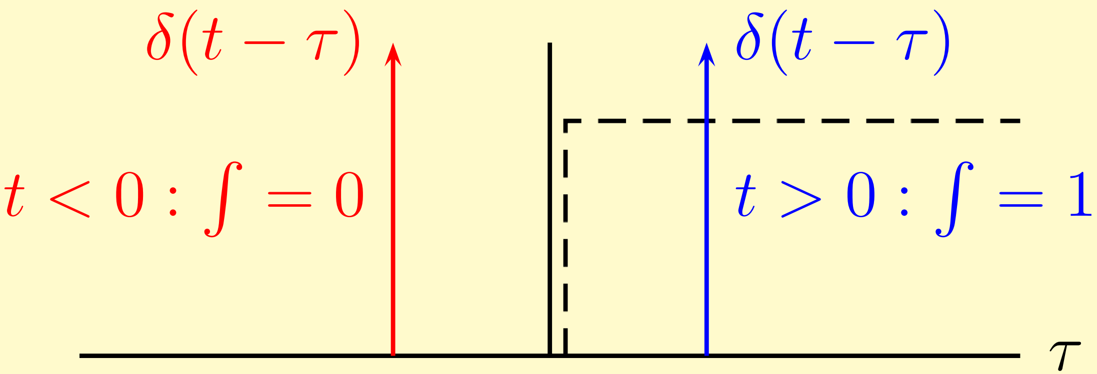


1.5.2.2 Impulso, escalón y rampa (IV)

- Interpretación: $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$.



- Si hacemos $\tau = t - \sigma$, $\sigma = t - \tau$, $d\sigma = -d\tau$;
  $u(t) = \int_{\infty}^{0} \delta(t-\sigma)\,(-d\sigma) = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\tau)\, d\tau$.



1.5.2.2 Impulso, escalón y rampa (V)

- $\delta(t)$ también tiene una propiedad de muestreo.
- Si $\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$, sea $x_\Delta(t) = x(t)\delta_\Delta(t)$.
- Si $x(t)$ es continua, en el origen $x(t)\delta_\Delta(t) \approx x(0)\delta_\Delta(t)$.
- Límite: $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$ y $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$.
- Definición: $\delta(t) = 0$ para $t \neq 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\, d\tau = 1$.
- Propiedad de selección

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)\, dt = x(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\, dt = x(t_0).$$

1.5.2.2 Impulso, escalón y rampa (VI)

- Función rampa

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t, & t \geq 0, \end{cases} \qquad u(t) = \frac{dr(t)}{dt}.$$

- Hacer el ejercicio 1.38.
- $\delta(t)$ es una función par: $\delta(t) = \delta(-t)$ ($\delta(t) = 0$, $t \neq 0$).
- Escalado: $\delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t)$, si $a > 0$.

1.6 Propiedades de los sistemas

- Estabilidad BIBO:
  - *toda entrada acotada produce una salida acotada*.
  - $y(t) = H(x(t))$.
  - El operador es BIBO-estable si cuando $|x(t)| \leq M_x < \infty$ para todo t, entonces $|y(t)| \leq M_y < \infty$ para todo t.
- Ejercicio: demostrar que el MA3 es estable.
- Ejercicio: ver qué ocurre con $y[n] = r^n x[n]$.

1.6 Propiedades de los sistemas (II)

- Memoria:
  - *Un sistema no tiene memoria si la salida en cada instante depende sólo de la entrada en ese instante*.
  - Si $y(t)$ depende de valores pasados **o futuros** de $x(t)$, tiene memoria.
  - ¿Tienen memoria los circuitos con R, C, L?.
  - ¿Tiene memoria el sistema MA3?
- Causalidad:
  - *Es causal si la salida depende sólo de valores pasados o presentes de la entrada.*
  - Cuando t no es el tiempo, o está grabada.
  - Aproximaciones del operador derivada.

1.6 Propiedades de los sistemas (III)

- Invertibilidad
  - *Un sistema es invertible si se puede recuperar la entrada a partir de la salida.*

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{H(\cdot)} \xrightarrow{y(t)} \boxed{?} \xrightarrow{x(t)}$$

  - Operador inverso, operador identidad.

$$H^{-1}\{y(t)\} = H^{-1}\{H\{x(t)\}\} \rightarrow H^{-1}H = I.$$

  - Cada entrada debe proporcionar una salida distinta.
  - ¿Es invertible el sistema $y(t) = x^2(t)$?
  - Diagrama de Veen

1.6 Propiedades de los sistemas (IV)

- Invarianza temporal:
  - Un sistema es TI si para toda entrada $x(t)$ con salida $y(t)$, la salida de $x(t-t_0)$ es $y(t-t_0)$.
  - Operador desplazamiento: $x(t-t_0) = S^{t_0}\{x(t)\}$.
  - Para un sistema H, $y(t) = H\{x(t)\}$.

$$y_i(t) = H\{x(t-t_0)\} = H\{S^{t_0}\{x(t)\}\} = HS^{t_0}\{x(t)\},$$
$$y(t-t_0) = S^{t_0}\{y(t)\} = S^{t_0}\{H\{x(t)\}\} = S^{t_0}H\{x(t)\}.$$

  - H es TI si $y_i(t) = y(t-t_0)$.
  - H es TI si conmunta con S: $HS^{t_0} = S^{t_0}H$ para todo t_0.

1.6 Propiedades de los sistemas (V)

- Linealidad:
  - Un sistemas es L si satisface el principio de superposición.
  - La salida a la entrada $x_i(t)$ es $y_i(t) = H\{x_i(t)\}$.
  - Sea $x(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t)$.

$$y(t) = H\{x(t)\} = H\left\{\sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t)\right\},$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i H\{x_i(t)\}.$$

  - H es L si conmuta con el operador suma.

1.6 Propiedades de los sistemas (VI)

Ejemplo: ¿es lineal el sistema $y[n] = nx[n]$?

- La salida asociada a la entrada $x_i[n]$ es $y_i[n] = nx_i[n]$.
- Dada la entrada $x[n] = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i[n]$,
- su salida es

$$y[n] = n \sum_{i=1}^{N} a_i x_i[n] = \sum_{i=1}^{N} a_i n x_i[n] = \sum_{i=1}^{N} a_i y_i[n].$$

- El sistema es lineal

1.6 Propiedades de los sistemas (VII)

Ejemplo: ¿es lineal el sistema $y(t) = x(t)x(t-1)$?

- La salida de $x_i(t)$ es $y_i(t) = x_i(t)x_i(t-1)$.
- Dada la entrada $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$,
- la salida es

$$\begin{aligned} y(t) &= (x_1(t) + x_2(t))(x_1(t-1) + x_2(t-1)) \\ &= x_1(t)x_1(t-1) + x_2(t)x_2(t-1) \\ &+ x_1(t)x_2(t-1) + x_2(t)x_1(t-1) \\ &= y_1(t) + y_2(t) + x_1(t)x_2(t-1) + x_2(t)x_1(t-1). \end{aligned}$$

- No es lineal

Ejercicio 1.34

Características de señales pares e impares

(a) Demostrar que si $x[n]$ es impar, entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = 0.$$

$$\begin{aligned}\sum_{n} x[n] &= \sum_{n<0} x[n] + x[0] + \sum_{n>0} x[n] \\ &= \sum_{n>0} x[-n] + \sum_{n>0} x[n] \\ &= -\sum_{n>0} x[n] + \sum_{n>0} x[n] = 0.\end{aligned}$$

Ejercicio 1.34 (II)

(b) Demostrar que si $x_1[n]$ es impar y $x_2[n]$ es par, entonces $y[n] = x_1[n]x_2[n]$ es impar.

$$y[-n] = x_1[-n]x_2[-n] = -x_1[n]x_2[n] = -y[n].$$

Ejercicio 1.34 (III)

(c) Si $x_p[n] = \mathrm{Par}\{x[n]\}$ y $x_i[n] = \mathrm{Imp}\{x[n]\}$, demostrar

$$\sum_n x^2[n] = \sum_n x_p^2[n] + \sum_n x_i^2[n].$$

Si $x[n] = x_p[n] + x_i[n]$,

$$x^2[n] = x_p^2[n] + x_i^2[n] + 2x_p[n]x_i[n].$$

Por tanto,

$$\sum_n x^2[n] = \sum_n x_p^2[n] + \sum_n x_i^2[n] + 2\sum_n x_p[n]x_i[n].$$

El último sumando vale 0. La E. de una señal es igual a la suma de las E. de sus componentes par e impar.

Ejercicio 1.34 (IV)

(c) También para continuas. Demostrar

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_p^2(t)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_i^2(t)\,dt.$$

Repetiremos los tres pasos del caso discreto. Si $x(t) = -x(-t)$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{0} x(t)\,dt + \int_{0}^{\infty} x(t)\,dt \\
&= -\int_{\infty}^{0} x(-t)\,dt + \int_{0}^{\infty} x(t)\,dt \\
&= \int_{0}^{\infty} x(-t)\,dt + \int_{0}^{\infty} x(t)\,dt = 0.
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.34 (V)

Si $x_1(t)$ es par y $x_2(t)$ impar, entonces $x(t) = x_1(t)x_2(t)$ es impar, ya que

$$x(-t) = x_1(-t)x_2(-t) = -x_1(t)x_2(t) = -x(t).$$

Por último,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} (x_p^2(t) + x_i^2(t) + 2x_p(t)x_i(t))\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_p^2(t)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_i^2(t)\,dt.\end{aligned}$$

Ejercicio 1.35

$$x[n] = e^{jm\frac{2\pi}{N}n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}m = 2\pi\frac{m}{N}.$$

Sea $N = N_0 \gcd(N, m)$, $m = m_0 \gcd(N, m)$, entonces

$$\omega_0 = 2\pi\frac{m_0 \gcd(N, m)}{N_0 \gcd(N, m)} = 2\pi\frac{m_0}{N_0}.$$

Ejercicio 1.36

Sea $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ de $\omega_{\text{fund}}\ \omega_0$ y periodo $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Sea $x[n] = x(nT) = e^{j\omega_0 nT}$.

a Demostrar que $x[n]$ es periódica sii $\frac{T}{T_0} \in \mathbb{Q}$.

$$\omega_0 T \ \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}\right) \ = 2\pi\frac{m}{N} \rightarrow \frac{T}{T_0} = \frac{m}{N} \in \mathbb{Q}.$$

b Suponer $\frac{T}{T_0} = \frac{p}{q} \equiv \frac{m}{N}$. ¿Cuáles son el periodo fundamental y la frecuencia fundamental de $x[n]$? Periodo fundamental: $N/\gcd(N,m) \equiv N$. Frecuencia fundamental: $\omega_{\text{fund}} = \omega_0 T/m$.

c $\frac{T}{T_0} = \frac{p}{q} \equiv \frac{m}{N}$. ¿Cuántos periodos de $x(t)$ se necesitan para obtener las muestras que forman un periodo de $x[n]$? $TN = mT_0$: m periodos de $x(t)$.

Ejercicio 1.36 (II)

```
T0 = 5;
t=linspace(0, 30, 1000);
x=cos(2*pi*t/T0);
plot(t, x);
hold on;
T=2;
n=[0:t(end)/T];
stem(n*T, cos(2*pi*n*T/T0), 'r');
T=exp(1);
n=[0:t(end)/T];
stem(n*T, cos(2*pi*n*T/T0), 'r');
```

Ejercicio 1.37

Si se define la correlación entre $x(t)$ e $y(t)$ como

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)y(\tau)\,d\tau.$$

(a) ¿Qué relación hay entre $\phi_{xy}(t)$ y $\phi_{yx}(t)$?

$$\phi_{yx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t+\tau)x(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\sigma)x(\sigma - t)\,d\sigma$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau - t)y(\tau)\,d\tau = \phi_{xy}(-t).$$

(b) Calcular la parte impar de $\phi_{xx}(t)$. Si $\phi_{xy}(-t) = \phi_{xy}(t)$, entonces $\phi_{xx}(-t) = \phi_{xx}(t)$ (par).

Ejercicio 1.37 (II)

(c) Si $y(t) = x(t+T)$, expresar $\phi_{xy}(t)$ y $\phi_{yy}(t)$ en términos de $\phi_{xx}(t)$

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)y(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x(\tau+t)\,d\tau$$
$$= (\tau + T = \sigma)\int_{-\infty}^{\infty} x(t-T+\sigma)x(\sigma)\,d\sigma = \phi_{xx}(t-T).$$

$$\phi_{yy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t+\tau)y(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+T+\tau)x(T+\tau)\,d\tau$$
$$= (\tau + T = \sigma)\int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma+t)x(\sigma)\,d\sigma = \phi_{xx}(t).$$