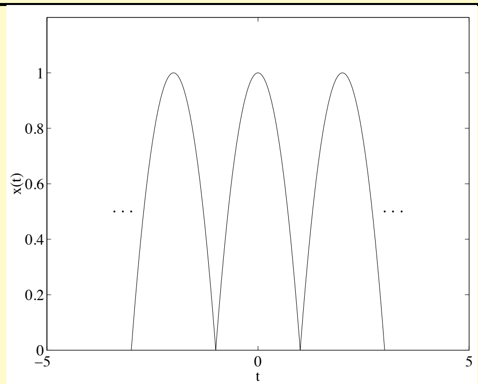
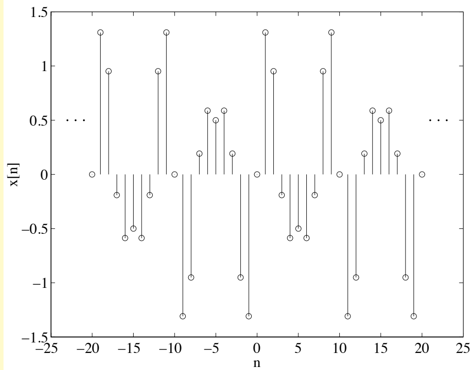
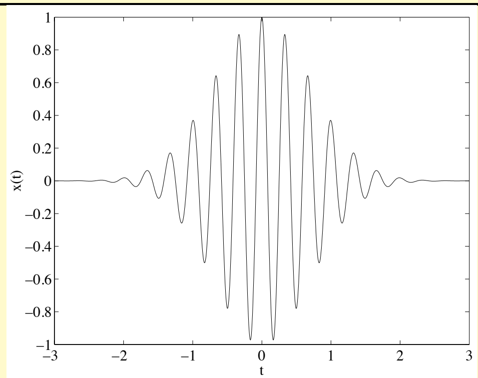
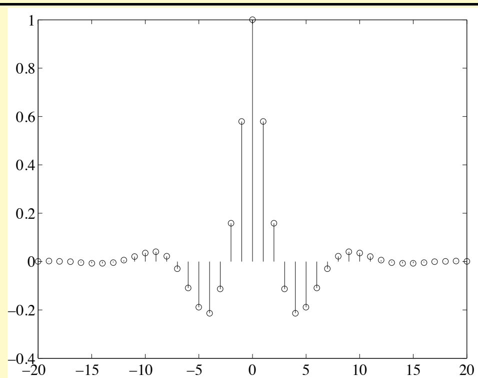
Tema 4: Transformada de Fourier

0. Introducción.
1. Transformada de Fourier continua (FT)
2. Transformada de Fourier discreta en el tiempo (DTFT)

4.0 Introducción (I)

T.	Continuo	Discreto	
Periódica	 FS	 DTFS (DFT)	Discreta
Aperiódica	 FT	 DTFT	Continua
	Aperiódica	Periódica	F.

4.0 Introducción (II)

T.	Continua	Discreta	
Periódica	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a[k] e^{jk\Omega_0 t}$ $a[k] = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk\Omega_0 t}\, dt$ FS	$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a[k] e^{jk\omega_0 n}$ $a[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$ DTFS (DFT)	Discreta
Aperiódica	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t}\, d\Omega$ $X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t}\, dt$ FT	$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n}\, d\omega$ $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$ DTFT	Continua
	Aperiódica	Periódica	F.

4.1: Transformada de Fourier continua

1. Análisis y síntesis.
2. Convergencia.
3. TF de señales periódicas.
4. Propiedades.
    1. Convolución.
    2. Multiplicación-modulación.
5. Sistemas descritos por ED coef. const.

4.1.1 Análisis y síntesis (I)

- Si $\tilde{x}(t+T) = \tilde{x}(t)$, $\forall t$, admite un desarrollo en FS.

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a[k] e^{jk\Omega_0 t}, \qquad a[k] = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \tilde{x}(t) e^{-jk\Omega_0 t}\, dt.$$

- Si definimos $x(t)$ como un periodo de $\tilde{x}(t)$:
  - $x(t)$ es de longitud finita (cero en el resto).
  - $x(t)$ no es periódica.
  - $x(t)$ no tendrá desarrollo en FS.
  - Sin embargo, podemos interpretar

$$x(t) = \lim_{T \to \infty} \tilde{x}(t).$$

4.1.1 Análisis y síntesis (II)

$$a[k] = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t)e^{-jk\Omega_0 t}\,dt \equiv \frac{1}{T}X(jk\Omega_0),$$

donde $X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}\,dt$.

- Si sustituimos en la expresión de síntesis

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t} \stackrel{\downarrow\Omega_0}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}\Omega_0$$

- Interpretación gráfica.

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} \tilde{x}(t) = \lim_{\Omega_0\to 0} \tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}\,d\Omega$$

4.1.1 Análisis y síntesis (III)

- Ecuación de análisis:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}\,dt;$$

transformada (o integral) de Fourier.

- Ecuación de síntesis:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}\,d\Omega;$$

transformada inversa de Fourier.

4.1.2 Ejemplo {`ej0.m`}

- Sea $x(t) = [|t| < T_1]$ (un pulso de anchura $2T_1$).

$$X(j\Omega) = 2\frac{\operatorname{sen} \Omega T_1}{\Omega}.$$

- Sea $\tilde{x}(t)$ la extensión periódica de $x(t)$

$$a[k] = \frac{2}{T}\frac{\operatorname{sen} k\Omega_0 T_1}{k\Omega_0} \qquad \longrightarrow \qquad Ta[k] = X(j\Omega)|_{\Omega=k\Omega_0}$$

- Salvo un factor de escala (T), los coeficientes $a[k]$ son muestras equiespaciadas de la TF.
- Si $T \to \infty$, las muestras tienden a un continuo.

4.1.3 Convergencia (I)

- En la deducción, se ha supuesto $x(t)$ de duración finita.
- Sin embargo, la TF puede aplicarse a muchas señales que no son de duración finita.
- Existen dos familias de condiciones.
  - Señales de energía finita.
  - Señales que verifican las condiciones de Dirichlet.
- Si admitimos la utilización de impulsos, podemos aplicar la TF a ciertas señales que no verifican ninguno de los dos criterios.

4.1.3 Convergencia (II)

Señales $x(t)$ de energía finita:

- Existe su TF $X(j\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$.
- Si $\hat{x}(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}\{X(j\Omega)\}$, $\epsilon(t) \equiv \hat{x}(t) - x(t)$: energía nula.
- $x(t)$ y $\hat{x}(t)$ pueden diferir en algunos puntos discretos.

Condiciones de Dirichlet. Si:

1. Integrable en valor absoluto,
2. # finito de máx. y mín. en cualquier intervalo finito,
3. Idem para discontinuidades,

entonces $x(t) = \hat{x}(t)$ excepto en las discontinuidades, donde es la media.

Ejemplos

- $x(t) = e^{-at}u(t)$. Si $a < 0$, no converge.

$$X(j\Omega) = \frac{1}{a + j\Omega},$$

  módulo y fase.

- $x(t) = e^{-a|t|}$ (par)

$$X(j\Omega) = \frac{2a}{a^2 + \Omega^2} \in \mathbb{R}.$$

Ejemplos (II)

- $X(j\Omega) = [|\Omega| < W]$: un pulso de anchura $2W$.

$$x(t) = \frac{\operatorname{sen}(Wt)}{\pi t} = \frac{W}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(Wt)}{Wt}.$$

  Si W crece, π/W decrece. Dualidad FT.

- $x(t) = \delta(t)$, $X(j\Omega) = 1$.
- $X(j\Omega) = 2\pi\delta(\omega)$, $x(t) = 1$.
- $x(t) = t[|t| \leq 1]$ (impar).

$$X(j\Omega) = \frac{2j}{\Omega} \cos\Omega - \frac{2j}{\Omega^2} \operatorname{sen}\Omega \in \mathbb{I}$$

4.1.4 TF de señales periódicas (I)

- Sea $x(t) = x(t+T)$, $\forall t$.
- Como es periódica, no puede verificar ninguno de los dos criterios de convergencia.
- Sin embargo, puede tener TF.
- En caso de tenerla, su TF está relacionada con su FS

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a[k] e^{jk\Omega_0 t}.$$

- Paradigma de señal periódica: exponencial compleja.
- Veremos cuál es la TF de $e^{j\Omega_0 t}$.

4.1.4 TF de señales periódicas (II)

- Sea $P(j\Omega) = 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$. Entonces $p(t) = \mathcal{F}^{-1}\{P(j\Omega)\}$.

$$p(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P(j\Omega)e^{j\Omega t}\,d\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\Omega-\Omega_0)e^{j\Omega t}\,d\Omega = e^{j\Omega_0 t}.$$

- Por tanto, la combinación lineal de pulsos frecuenciales

$$X(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a[k]\delta(\Omega - k\Omega_0)$$

es la TF de

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a[k]e^{jk\Omega_0 t}.$$

4.1.4 TF de señales periódicas (III)

- Sea $x(t) = x(t+T)$, $\forall t$.
- La frecuencia angular es $\Omega_0 = 2\pi/T$.
- Sean $a[k]$ los coeficientes de su FS.

$$a[k] = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}\,dt.$$

- La TF de $x(t)$ es un tren de deltas de Dirac
  - Colocadas en $\Omega = k\Omega_0$.
  - De área proporcional a $a[k]$.

$$X(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a[k]\delta(\Omega - k\Omega_0)$$

Ejemplos

- $x(t) = \operatorname{sen} \Omega_0 t$,

$$a[\pm 1] = \pm 1/2j.$$

- $x(t) = \cos \Omega_0 t$,

$$a[\pm 1] = 1/2.$$

- Si

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT),$$

entonces

$$X(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0).$$

4.1.5 Propiedades (I)

Si $X(j\Omega)$ es la transformada de Fourier de $x(t)$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}\, d\Omega, \qquad \text{(síntesis)}$$

$$X(j\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}\, dt, \qquad \text{(análisis)}$$

diremos que $x(t)$ y $X(j\Omega)$ son un par transformado, y lo representaremos por

$$x(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\Omega).$$

4.1.5 Propiedades (II)

- Lin.: $z(t) = Ax(t) + By(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} AX(j\Omega) + BY(j\Omega)$ (A).
- Desp. temporal: $x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\Omega t_0} X(j\Omega)$ (A).
- Inversión temporal: $x(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(-j\Omega)$ (A).
- Conjugación: $x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(-j\Omega)$ (A).
- Escalado temporal y frecuencial: $x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X(j\Omega/a)$.
- Diferenciación (L): $\dot{x}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\Omega X(j\Omega)$ (S).
- Integración (C): $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\Omega} X(j\Omega) + \pi X(0) \delta(\Omega)$.

4.1.5 Propiedades (III)

- Relación de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega.$$

  $|X(j\Omega)|^2$: espectro de densidad de energía.

- Multiplicación.
- Convolución.
- Dualidad.

4.1.5.1 Convolución (I)

- Exponenciales complejas: autofunciones de los LTI.
- Si $x(t) = e^{st}$, $y(t) = h(t) * x(t) = H(s)e^{st}$, donde

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}\, d\tau$$

  es la función del sistema.
- Si $s = j\Omega$, $x(t) = e^{j\Omega t}$, $y(t) = H(j\Omega)x(t)$, donde

$$H(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\Omega\tau}\, d\tau$$

  es la TF de la respuesta impulsiva $h(t)$ y se denomina respuesta frecuencial del sistema.

4.1.5.1 Convolución (II)

- Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos señales con TF

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\Omega\tau}\, d\tau, \qquad Y(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\nu)e^{-j\Omega\nu}\, d\nu.$$

- ¿Cuál es IFT del producto?

$$¿z(t)? \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Z(j\Omega) = X(j\Omega)Y(j\Omega).$$

4.1.5.1 Convolución (III)

$$
\begin{aligned}
Z(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(\nu)e^{-j\Omega(\tau+\nu)}\,d\tau\,d\nu \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right)e^{-j\Omega t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} z(t)e^{-j\Omega t}\,dt,
\end{aligned}
$$

donde $z(t) = x(t) * y(t)$.
Por tanto

$$x(t) * y(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\Omega)Y(j\Omega).$$

4.1.5.1 Convolución (IV)

- Más sencillo un producto que una convolución.
- Salida en ambos dominios

$$y(t) = h(t) * x(t), \qquad Y(j\Omega) = H(j\Omega)X(j\Omega).$$

- Conexión en serie de dos sistemas LTI

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t), \qquad H(j\Omega) = H_1(j\Omega)H_2(j\Omega).$$

- No todas las $h(t)$ tienen TF:
  - Si el sistema es estable, $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$, $\exists$ TF si se verifican las otras dos CD.
  - Si no existe la TF (inestable): transf. de Laplace.

4.1.5.1 Ejemplos

- Sean

$$x(t) = e^{-bt}u(t), b > 0; \qquad \text{y } h(t) = e^{-at}u(t), b \neq a > 0.$$

Calcular la salida en el dominio del tiempo y en el de la frecuencia. ($y(t) = \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{a-b}u(t)$).

- Si $a = b$,

$Y(j\Omega) = \frac{1}{(a+j\Omega)^2} = j\frac{d}{d\Omega}\frac{1}{a+j\Omega} \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} y(t) = te^{-at}u(t)$.

- Tabla de propiedades (4.1) y pares transformados (4.2).
- Apéndice sobre expansión en fracciones simples.

4.1.5.2 Multiplicación-modulación (I)

- Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos señales con TF $X(j\Omega)$ e $Y(j\Omega)$.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta)e^{j\theta t}\,d\theta, \qquad y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(j\alpha)e^{j\alpha t}\,d\alpha.$$

- ¿Cuál es la TF de su producto?

$$z(t) = x(t)y(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \text{¿}Z(j\Omega)\text{?}.$$

4.1.5.2 Multiplicación-modulación (II)

$$z(t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta)Y(j\alpha)e^{j(\theta+\alpha)t}\,d\theta\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta)Y(j(\Omega-\theta))\,d\theta\right)e^{j\Omega t}\,d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}Z(j\Omega)e^{j\Omega t}\,d\Omega,$$

donde $Z(j\Omega) = X(j\Omega) * Y(j\Omega)$. Por tanto

$$x(t)y(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}X(j\Omega) * Y(j\Omega).$$

4.1.5.2 Multiplicación-modulación (III)

Ejemplo: enviar una señal de voz por radio {`ej2.m`}.

- Multiplicar una señal por otra $\rightarrow$ modulación (AM).
- Ancho de banda 8 KHz.
- Teléfono 3 KHz. GSM : ¿Catarro?
- Dibujar una señal de voz $s(t)$ y su espectro.
- Dibujar $p(t)$ y $P(j\Omega) = \pi\delta(\Omega - \Omega_0) + \pi\delta(\Omega + \Omega_0)$
- Dibujar $e(t) = p(t)s(t)$ y su espectro.
- Recepción $r(t) = e(t)p(t)$. Filtro paso bajo.

4.1.6 Sistemas EDCC

Sistema descrito por ED lineal de coeficientes constantes

$$\sum_{k=0}^{N} a[k]\frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b[k]\frac{d^k x(t)}{dt^k};$$

¿cuánto vale la respuesta frecuencial $H(j\Omega)$?.

- Sabemos que si $x(t) = e^{j\Omega t}$, entonces $y(t) = H(j\Omega)e^{j\Omega t}$.

$$H(j\Omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b[k](j\Omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a[k](j\Omega)^k},$$

  una función racional en $j\Omega$.
- También puede verse a partir de $\mathcal{F}\{\dot{x}(t)\} = j\Omega X(j\Omega)$.

Ejemplos

- Calcular $H(j\Omega)$ y $h(t)$ del sistema $\dot{y}(t) + ay(t) = x(t)$.

$$H(j\Omega) = \frac{1}{a + j\Omega}, \qquad h(t) = e^{-at}u(t).$$

- Idem para $\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = \dot{x}(t) + 2x(t)$.

$$H(j\Omega) = \frac{2 + j\Omega}{3 + 4j\Omega + (j\Omega)^2}, \quad h(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-3t})u(t).$$

- Salida si $x(t) = e^{-t}u(t)$.

$$Y(j\Omega) = \frac{1/4}{1 + j\Omega} + \frac{1/2}{(1 + j\Omega)^2} + \frac{-1/4}{3 + j\Omega}.$$

Ejercicios

- Demostrar que si $x(t)$ real, $\Re(X(j\Omega))$ y $|X(j\Omega)|$ son pares, mientras que la parte real y la fase son impares.
- Demostrar que si $x(t)$ par y real, $X(j\Omega)$ también.
- Hacer ejercicios 4.37 y 4.40.

Ejercicio 4.37

Sea $x(t)$ la señal triangular unidad.

1. Calcular $X(j\Omega)$ (dos formas).
   a) Como $x(t)$ es par,

$$X(j\Omega) = 2\int_0^\infty x(t)\cos\Omega t\,dt = 2\int_0^1 (1-t)\cos\Omega t\,dt$$
$$= \frac{2(1-\cos\Omega)}{\Omega^2}.$$

   b) Aplicar $x(t) = y(t) * y(t)$, donde $y(t) = [|t| < 1/2]$,

$$Y(j\Omega) = 2\frac{\sin(\Omega/2)}{\Omega}.$$

Ejercicio 4.37 (II)

2. Dibujar la señal $\tilde{x}(t) = x(t) * p(t)$, donde

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 4k).$$

3. Encontrar $g(t) \neq x(t)$, tal que $g(t) * p(t) = \tilde{x}(t)$.
4. Demostrar que, aunque $G(j\Omega) \neq X(j\Omega)$. Necesariamente son iguales para $\Omega = k\pi/2$.
   $\tilde{X}(j\Omega) = X(j\Omega)P(j\Omega) = G(j\Omega)P(j\Omega)$.
   Sabemos que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0).$$

Ejercicio 4.40

Utilizar las propiedades de la TF para demostrar por inducción

$$x_n(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t), a > 0 \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_n(j\Omega) = \frac{1}{(a+j\Omega)^n}.$$

- Si $n = 1$, $e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a+j\Omega}$.
- Si $n = 2$, $te^{-at}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(a+j\Omega)^2}$.
- Si suponemos válido para n, $x_{n+1}(t) = \frac{t}{n}x_n(t)$. Vamos a utilizar la propiedad de la derivada frecuencial de la TF.

Ejercicio 4.40 (II)

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}\,dt \rightarrow \frac{d}{d\Omega}X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty}(-jtx(t))e^{-j\Omega t}\,dt.$$

Es decir,

$$-jtx(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{d}{d\Omega}X(j\Omega) : \qquad tx(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\frac{d}{d\Omega}X(j\Omega).$$

Por tanto,

$$x_{n+1}(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{j}{n}\frac{d}{d\Omega}X(j\Omega) = X_{n+1}(j\Omega).$$

4.2: DTFT

1. Análisis y síntesis.
2. Convergencia.
3. DTTF de señales periódicas.
4. Propiedades.
5. Dualidad.
6. Sistemas descritos por ED coef. const.

4.2.1 Análisis y síntesis (I)

- Si $\tilde{x}[n+N] = \tilde{x}[n]$, $\forall n$, admite un desarrollo en DTFS.

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a[k] e^{jk\omega_0 n}, \quad a[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk\omega_0 n};$$

  donde $\omega_0 = 2\pi/N$.

- Si definimos $x[n]$ como un periodo de $\tilde{x}[n]$:
  - $x[n]$ es de longitud finita ($x[n] = 0$ si $n \notin [-N_1, N_2]$).
  - $x[n]$ no es periódica.
  - $x[n]$ no tendrá desarrollo en DTFS.
  - Para cualquier valor finito de n,

$$x[n] = \lim_{N\to\infty} \tilde{x}[n].$$

4.2.1 Análisis y síntesis (II)

- Como $\tilde{x}[n] = x[n]$ para $-N_1 \leq n \leq N_2$,

$$a[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} \tilde{x}[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} x[n] e^{-jk\omega_0 n} \equiv \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}),$$

donde

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}.$$

- Esta función $X(e^{j\omega})$ es periódica de periodo 2π (demostrar y dibujar).

4.2.1 Análisis y síntesis (III)

- Si sustituimos en la expresión de síntesis

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N\rangle} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0.$$

- $X(e^{j\omega})$ y $e^{j\omega n}$ periódicas (2π): su producto también.
- $\sum$: N intervalos consecutivos de anchura $\omega_0 = 2\pi/N$.
- Es la aproximación de la integral de $X(e^{j\omega})e^{j\omega n}$.
- Como el integrando es periódico, podemos integrar en cualquier intervalo de anchura 2π.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi\rangle} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n}\, d\omega.$$

4.2.1 Análisis y síntesis (IV)

- Ecuación de análisis:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}.$$

transformada de Fourier (para señales discretas).

- Ecuación de síntesis:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi \rangle} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega.$$

transformada inversa de Fourier.
$x[n]$: CL exp. complejas ∞ juntas de amplitud $\frac{X(e^{j\omega})d\omega}{2\pi}$.

4.2.1 Análisis y síntesis (V)

- Las ecuaciones de síntesis y análisis son inversas:
  - si $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ y $\hat{x}[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\}$,
  - entonces $x[n] = \hat{x}[n]$.

$$\begin{aligned}
\hat{x}[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\omega k}\right) e^{j\omega n}\, d\omega \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega k} e^{j\omega n}\, d\omega\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] = x[n].
\end{aligned}$$

Ejemplo {`ej1.m`}

Calcular la DTFT de la secuencia $x[n] = a^n u[n]$, con $|a| < 1$.

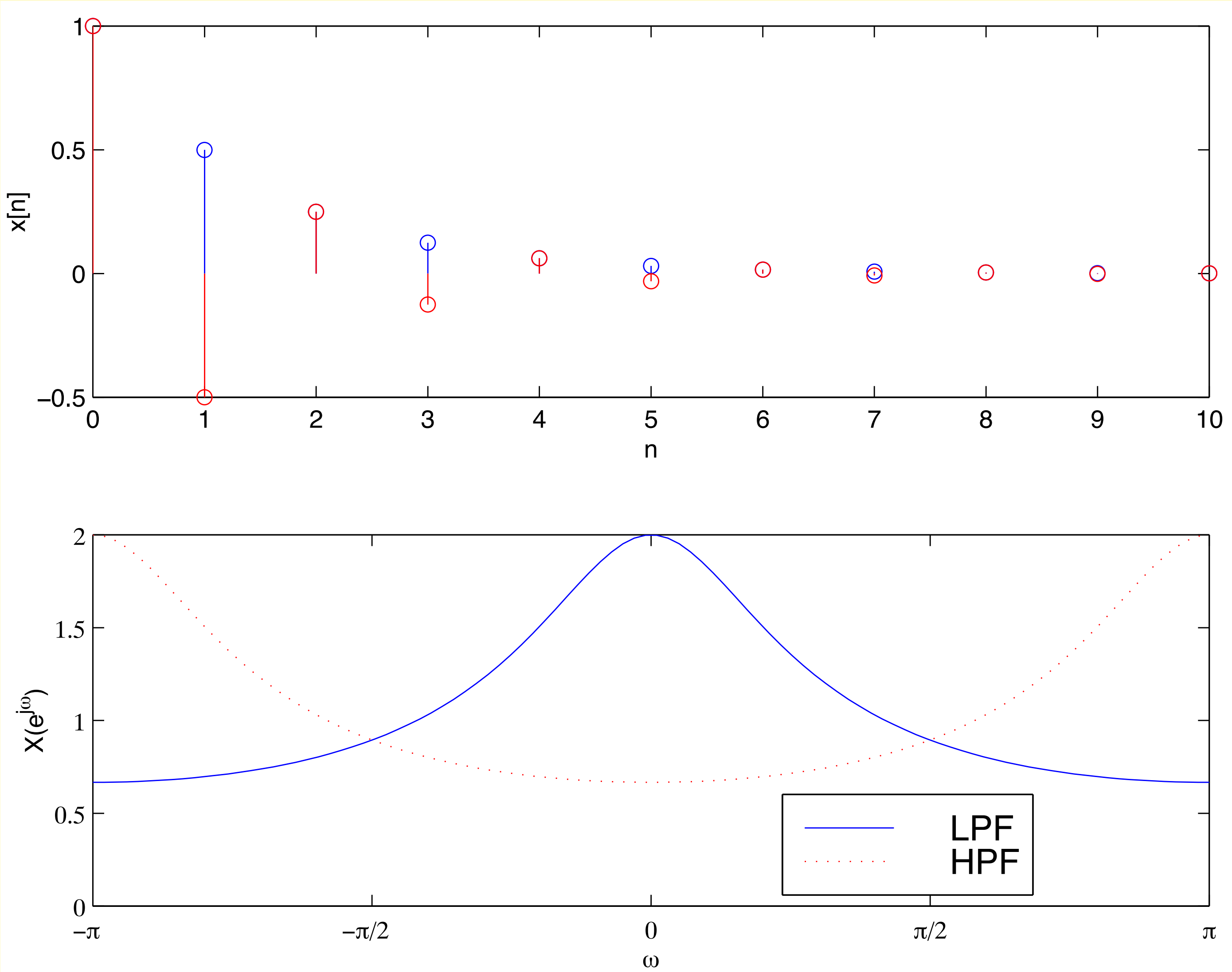
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n\geq 0} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}.$$

El módulo es

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\omega}}.$$

- $|X(e^{j\omega})|_{\omega=0} = (1-a)^{-1}$, $|X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = (1+a)^{-1}$.
- Si $a > 0$, $1/(1-a) > 1/(1+a)$: LPF.
- Si $a < 0$: HPF.

Ejemplo (II)



Ejemplo {`ej2.m`} (III)

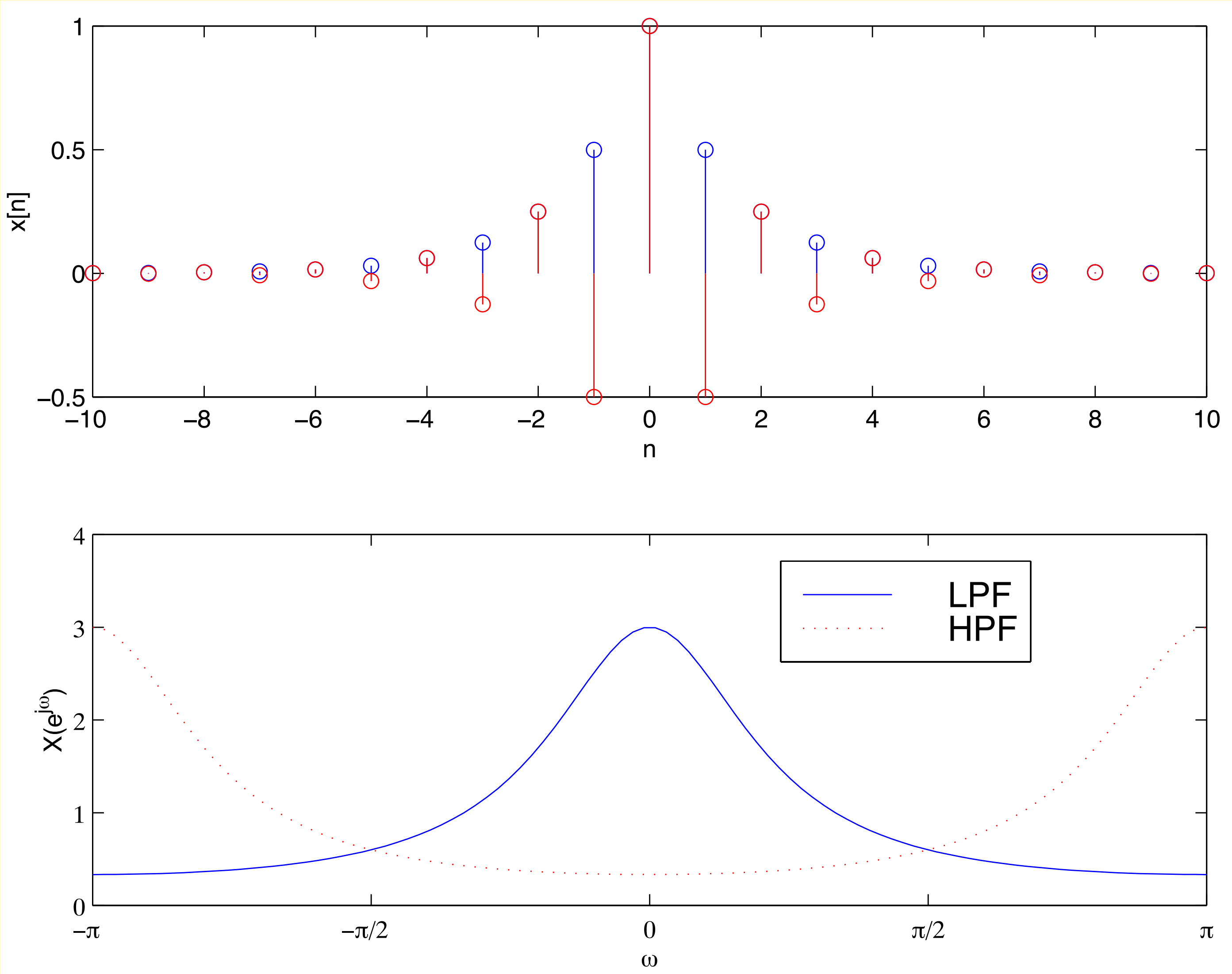
Calcular la DTFT de la secuencia $x[n] = a^{|n|}$, con $|a| < 1$.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n\geq 0} a^n e^{-j\omega n} + \sum_{n\geq 0} a^n e^{j\omega n} - 1$$

$$= \frac{(1+a)(1-a)}{1+a^2-2a\cos\omega}.$$

- Es una función real y par.
- $X(e^{j0}) = (1+a)/(1-a)$. $X(e^{j\pi}) = (1-a)/(1+a)$.
- Si $0 < a < 1$, HPF, en caso contrario LPF.

Ejemplo (IV)



Ejemplo {`ej3.m`} (V)

Calcular la DTFT de la secuencia $x[n] = 1$ si $|n| \leq N_1$.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N_1} e^{-j\omega n} + \sum_{n=-N_1}^{0} e^{-j\omega n} - 1$$

$$= \frac{1 - e^{-j\omega(N_1+1)}}{1 - e^{-j\omega}} + \frac{e^{j\omega(N_1+1)} - e^{j\omega}}{e^{j\omega} - 1}.$$

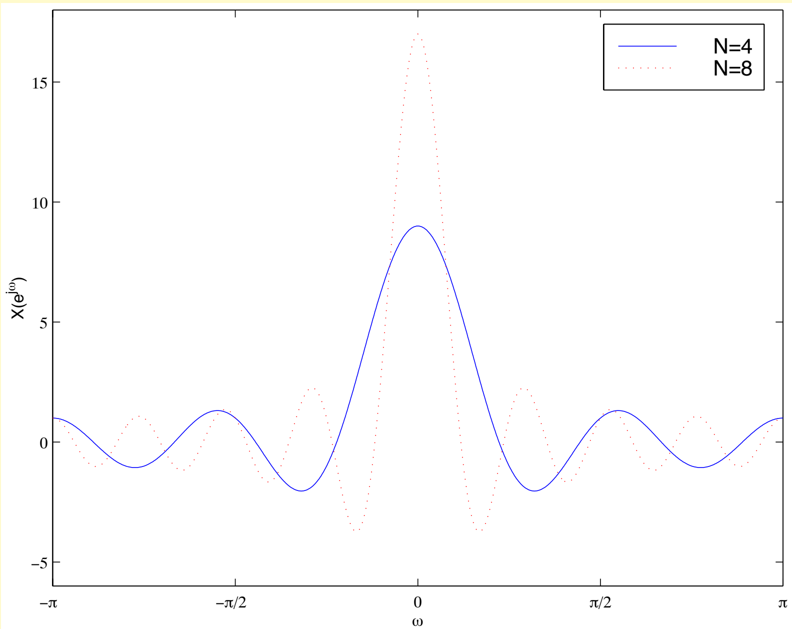
Multiplicando num. y den. del primer término por $e^{j\omega}$,

$$X(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega N_1} - e^{j\omega(N_1+1)}}{1 - e^{j\omega}}.$$

Ejemplo (VI)

Multiplicando numerador y denominador por $e^{-j\omega/2}$,

$$X(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega(N_1+1/2)} - e^{j\omega(N_1+1/2)}}{e^{-j\omega/2} - e^{j\omega/2}} = \frac{\sin\omega(N_1+1/2)}{\sin\omega/2}.$$



Entre 0 y π existen N_1+1 extremales.

4.2.2 Convergencia (I)

- En la deducción, se ha supuesto $x[n]$ de duración finita.
- Sin embargo, la DTTF puede aplicarse a muchas señales que no son de duración finita.
- ¿Bajo que condiciones $|X(e^{j\omega})| < \infty,\ \forall\omega$?:
- Existen dos familias de condiciones.
  - Señales de energía finita.
  - Señales sumables en valor absoluto (las otras dos CD no aplican).
- Si admitimos la utilización de impulsos, podemos aplicar la DTTF a ciertas señales que no verifican ninguno de los dos criterios.

4.2.2 Convergencia (II)

- Concepto de convergencia uniforme (CU):
- Si definimos

$$X_M(e^{j\omega}) \equiv \sum_{n=-M}^{M} x[n]e^{-j\omega n},$$

decimos que $X_M(e^{j\omega})$ converge uniformemente a $X(e^{j\omega})$ si

$$\lim_{M\to\infty} X_M(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}),$$

para todo ω.

4.2.2 Convergencia (III)

- Señales $x[n]$ sumables en valor absoluto: si

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty,$$

es una condición suficiente que garantiza CU.

- Algunas secuencias no son sumables $|\cdot|$ pero si $|\cdot|^2$.
- En este caso (energía finita) existe la DTFT, pero no se garantiza CU.
- La señal de error tiende a energía nula

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|^2 \, d\omega = 0.$$

4.2.3 DTTF de señales periódicas (I)

- Podemos definir la DTFT para algunas señales que no son sumables $|\cdot|$ ni $|\cdot|^2$ si incorporamos δ.
- En el caso continuo,

$$x(t) = e^{j\Omega_0 t} \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$$

(dibujar $x(t)$ en polar y $X(j\omega)$).

- La DTFT es periódica, el análogo es

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)$$

(dibujar)

4.2.3 DTTF de señales periódicas (II)

- La $x[n]$ asociada es (ecuación de síntesis)

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\, d\omega = \int_{2\pi} e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)\, d\omega.$$

- En cualquier intervalo de integración de anchura 2π sólo cabe una δ (dibujar).
- Supongamos en $\omega = \omega_0 + 2\pi r$: $x[n] = e^{j(\omega_0 + 2\pi r)n} = e^{j\omega_0 n}$.

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \overset{\mathcal{DTFT}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k).$$

4.2.3 DTTF de señales periódicas (III)

- Sea $x[n] = x[n+N]$ una secuencia periódica arbitraria.
- Tendrá DTFS: una CL de exp. complejas:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a[k]e^{jk\omega_0 n}, \quad \text{donde } \omega_0 = \frac{2\pi}{N}.$$

- Como la DTFT es lineal y sabemos la DTFT de una exp. compleja:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=\langle N\rangle} a[k]2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l).$$

4.2.3 DTTF de señales periódicas (IV)

$$x[n] = a[0]e^{j0\omega_0 n} + a[1]e^{j\omega_0 n} + a[2]e^{j2\omega_0 n} + \cdots + a[N-1]e^{j(N-1)\omega_0 n}.$$

$$\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) = 2\pi a[0] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 0 - 2\pi k) \\
+ 2\pi a[1] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) \\
+ \ldots \\
+ 2\pi a[N-1] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - (N-1)\omega_0 - 2\pi k).
\end{aligned}$$

4.2.3 DTTF de señales periódicas (V)

- Como $\omega_0 = 2\pi/N$, entre 0 y 2π hay N puntos (dibujar).
- Por tanto,

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a[k]\delta(\omega - k\omega_0)$$

- Relación entre DTFT y DTFS:

$$a[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]e^{-jk\omega_0 n}.$$

Ejemplo (I)

Calcular la DTFS y la DTFT de

$$x[n] = 2\cos\left(\frac{3\pi}{8}n + \frac{\pi}{3}\right) + 4\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right).$$

- Tenemos dos señales periódicas de frecuencias angulares $\omega_1 = 3\pi/8$ y $\omega_2 = \pi/2$.
- En conjunto, tenemos una señal periódica, cuya DTFS será

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

- Lo primero es calcular ω_0.

Ejemplo (II)

- Deberá verificarse

$$\omega_1 = m\omega_0, \quad \text{y } \omega_2 = n\omega_0,$$

con $m, n \in \mathbb{Z}$ ($\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{Q}$).

- $\omega_1/\omega_2 = m/n$: $m = 3$, $n = 4$. $\omega_0 = \pi/8$.
- Expandiendo las funciones trigonométricas,

$$x[n] = e^{j\left(\frac{3\pi}{8}n+\frac{\pi}{3}\right)} + e^{-j\left(\frac{3\pi}{8}n+\frac{\pi}{3}\right)} - 2je^{j\frac{\pi}{2}n} + 2je^{-j\frac{\pi}{2}n},$$

- obtenemos los coeficientes de la DTFS:

$$a[\pm 3] = e^{\pm j\frac{\pi}{3}}, \quad a[\pm 4] = \mp 2j, \quad a[k] = 0 \text{ en otro caso.}$$

Ejemplo (III)

- Para la DTFT,

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a[k]\delta(\omega - k\omega_0),$$

las δ están en $\omega = k\omega_0$.

- Un periodo de la DTFT es

$$X(e^{j\omega}) = 2j\delta(\omega - (-4\pi/8)) + e^{-j\pi/3}\delta(\omega + 3\pi/8) + e^{j\pi/3}\delta(\omega - 3\pi/8) - 2j\delta(\omega - 4\pi/8),$$

para $-\pi < \omega \leq \pi$.

4.2.4 Propiedades (I)

Si $X(e^{j\omega})$ es la DTFT de $x[n]$

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi \rangle} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega, \qquad \text{(síntesis)}$$

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]e^{-j\omega n}, \qquad \text{(análisis)}$$

diremos que $x[n]$ y $X(e^{j\omega})$ son un par transformado

$$x[n] \overset{\mathcal{DTFT}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}).$$

- Consultar las tablas 5.1 (propiedades) y 5.2 (pares transformados).

4.2.5 Dualidad (I)

- ¿Qué entendemos por dualidad?:
  - Cuando las características temporales de una señal son análogas a las frecuenciales de otra.
  - Toda propiedad que aplica a una señal en el dominio temporal tiene una propiedad dual en el frecuencial.
- Relaciones de dualidad:
  - Pueden deducirse analizando las cuatro representaciones de Fourier de la tabla resumen.
  - Por ejemplo, hemos visto la dualidad entre una señal (continua y aperiódica) y su TF.

4.2.5 Dualidad (II)

Dualidad de la DTFS:

- $x[n]$ y $a[k]$ son periódicas de periodo N.
- $a[k]$ son los coeficientes de la DTFS de $x[n]$.
- $x[-n]/N$ son los coeficientes de la DTFS de $a[k]$.
- Dem: hacer $n = -k$ y $k = n$ en (A) de la DTFS.
- Ejemplo de dualidad
- Ej: si $x[n] \overset{\mathcal{DTFS}}{\longleftrightarrow} a[k]$, entonces

$$x[n-n_0] \overset{\mathcal{DTFS}}{\longleftrightarrow} a[k]e^{-jk\omega_0 n_0}, \quad \text{y } e^{jk_0\omega_0 n}x[n] \overset{\mathcal{DTFS}}{\longleftrightarrow} a[k-k_0].$$

4.2.5 Dualidad (III)

Dualidad entre FS

- $x(t)$ continua y periódica,
- $a[k]$ discreta y aperiódica,

y DTFT

- $X(e^{j\omega})$ continua y periódica,
- $x[n]$ discreta y aperiódica.

4.2.5 Dualidad (IV)

Dualidad FS–DTFT:

- Como $x(t) = x(t+T)$:
  - tiene una representación como CL exp. complejas temporales $e^{jk\Omega_0 t}$,
  - donde $\Omega_0 = 2\pi/T$.
- Como $X(e^{j\omega})$ periódica de periodo $W = 2\pi$:
  - tiene una representación como CL de exponenciales complejas frecuenciales $e^{jn\omega n}$,
  - coeficiente de la CL: $x[-n]$.
- Observar qué ocurre en la expresión de $x(t)$ si $T = 2\pi$.

4.2.6 Sistemas EDCC (I)

¿Cuánto vale la respuesta frecuencial $H(e^{j\omega})$ del sistema descrito por la ED lineal de coeficientes constantes

$$\sum_{k=0}^{N} a[k]y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b[k]x[n-k]?$$

1. A partir de las propiedades de desplazamiento temporal $-x[n-n_0] \overset{\mathcal{DTFT}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})-$ y de linealidad

$$\sum_{k=0}^{N} a[k]e^{-jk\omega}Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} b[k]e^{-jk\omega}X(e^{j\omega}).$$

4.2.6 Sistemas EDCC (II)

2. A partir de la propiedad de convolución,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}.$$

- La respuesta frecuencial de un sistema descrito por una EDCC es una función racional en $e^{j\omega}$.

Ejercicios

- 5.51: si un sistema LTI tiene respuesta impulsiva

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n],$$

calcular una EDCC que relacione la entrada con la salida.
Sugerencia: aunque no lo pide, podemos calcular $H(e^{j\omega})$.

$$\alpha^n u[n] \overset{\mathcal{DTFT}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \quad H(e^{j\omega}) = \frac{3/2 - 1/2e^{-j\omega}}{1 - 3/4e^{-j\omega} + 1/8e^{-j2\omega}}$$