Tema 5: Muestreo

1. Motivación.
2. Esquema.
3. Conocimientos previos.
4. Muestreo uniforme.
5. Reconstrucción ideal.
6. Algunos aspectos prácticos.
7. Resumen.

Motivación

- Gran parte de las señales de nuestra experiencia cotidiana son continuas; sin embargo, cada vez más, se procesan digitalmente.
- El muestreo de señales continuas, y su reconstrucción a partir de secuencias discretas constituye la interfaz entre los mundos continuo y discreto.
- La teoría de muestreo desempeña un papel fundamental en determinar la exactitud y viabiliad de cualquier esquema de tratamiento digital.

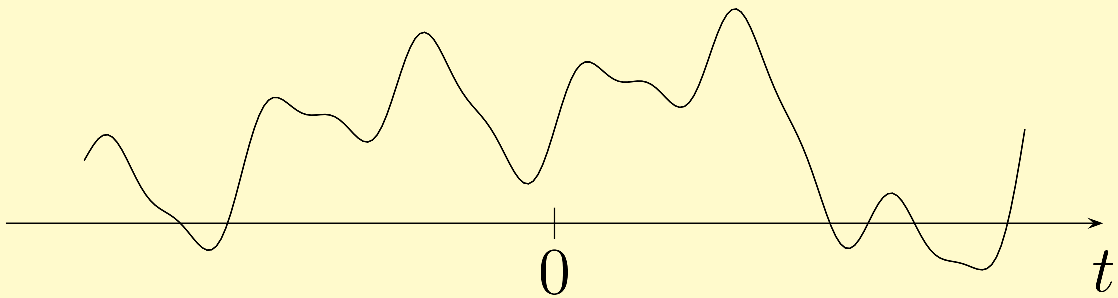
Esquema

- Ejemplos cotidianos de muestreo y reconstucción.
- Planteamiento del problema.
- Conocimientos previos necesarios.
- Muestreo uniforme: Teorema de Muestreo.
- Reconstrucción ideal.
- Algunos aspectos prácticos.
- Resumen de los conceptos más importantes.

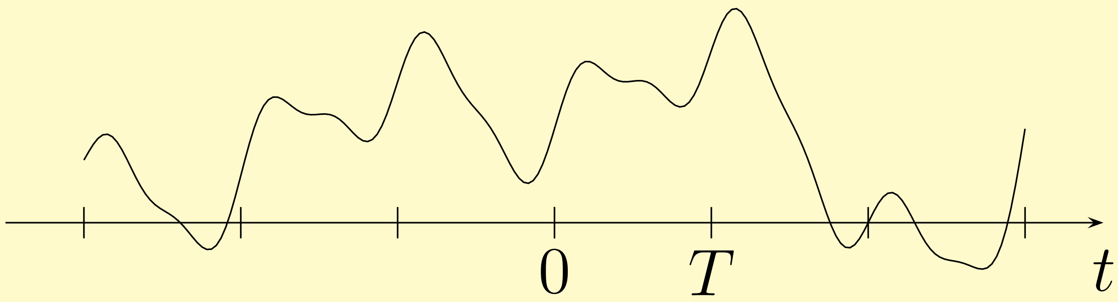
Ejemplos cotidianos de muestreo y reconstrucción

- El sonido se almacena en un CD como una secuencia discreta (44100 muestras por segundo).
- Una película de cine consiste en una secuencia de imágenes estáticas (24 por segundo). Sin embargo, nosotros lo percibimos como una secuencia continua.
- Una pantalla de ordenador muestra las imágenes en una matriz espacial discreta (800×600, 1024×768).

Planteamiento del problema

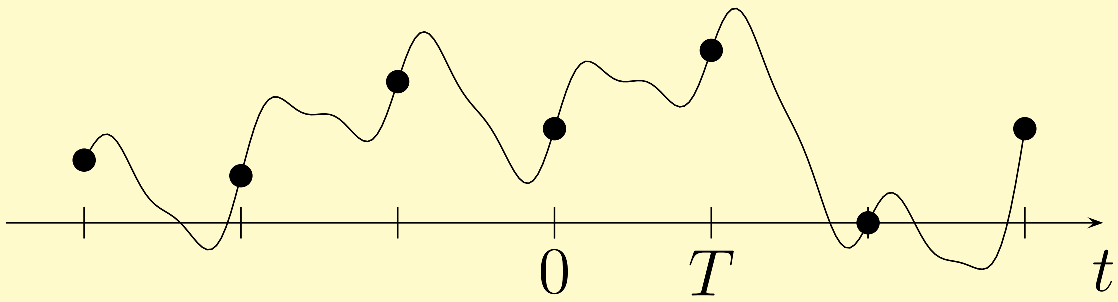


Planteamiento del problema



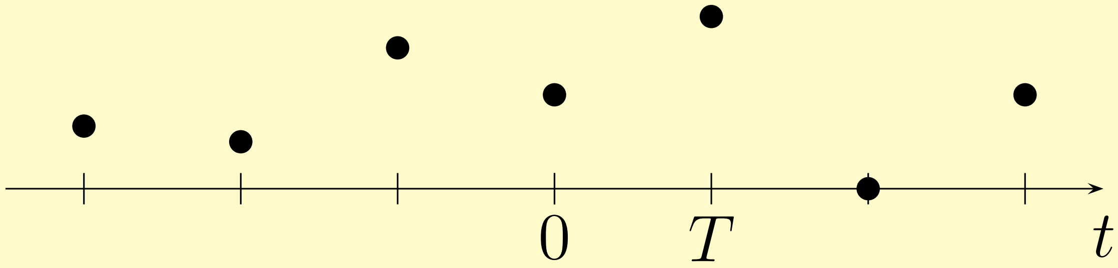
- Tomamos muestras de $x(t)$ en $t = nT$, $n \in \mathbb{Z}$.

Planteamiento del problema



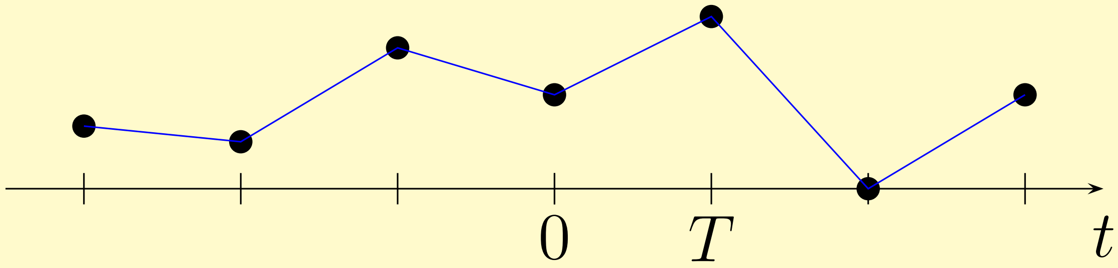
- Tomamos muestras de $x(t)$ en $t = nT$, $n \in \mathbb{Z}$.
- La secuencia $x[n] = x(nT)$ está unívocamente definida.

Planteamiento del problema



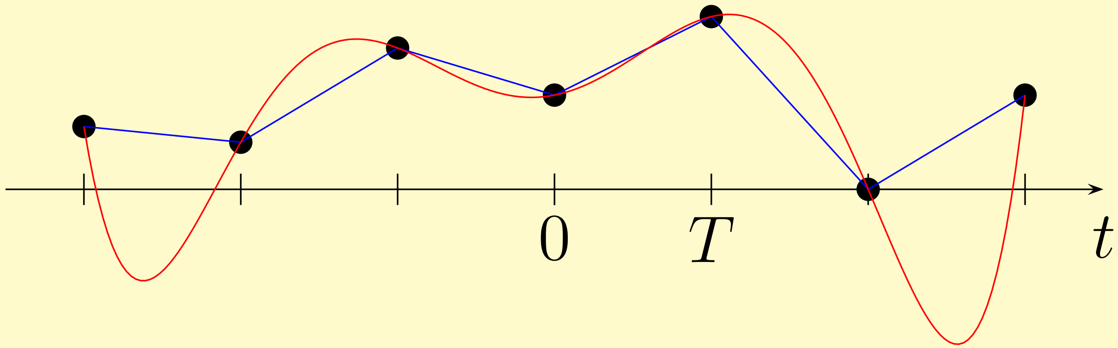
- Tomamos muestras de $x(t)$ en $t = nT$, $n \in \mathbb{Z}$.
- La secuencia $x[n] = x(nT)$ está unívocamente definida.
- Dada $x[n]$, ¿a qué señal continua representa?

Planteamiento del problema



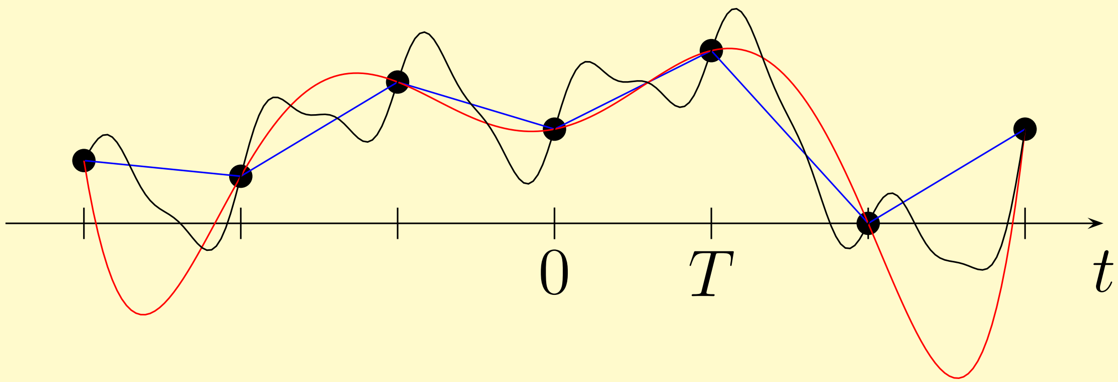
- Tomamos muestras de $x(t)$ en $t = nT$, $n \in \mathbb{Z}$.
- La secuencia $x[n] = x(nT)$ está unívocamente definida.
- Dada $x[n]$, ¿a qué señal continua representa?

Planteamiento del problema



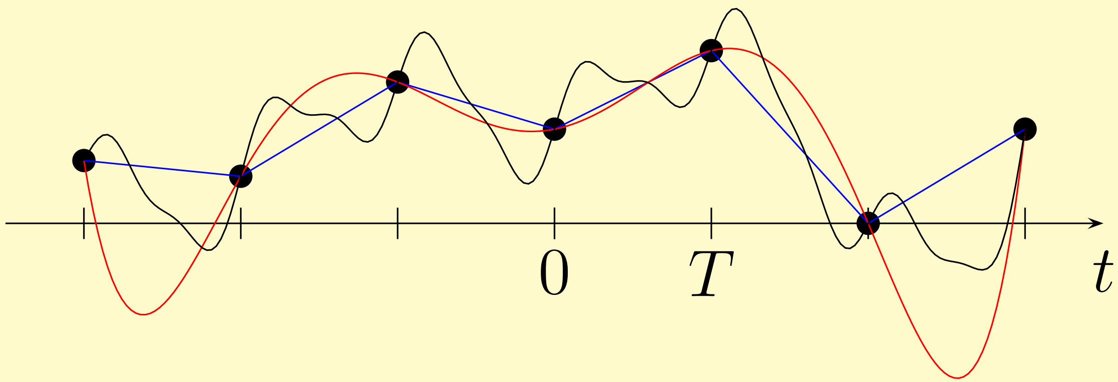
- Tomamos muestras de $x(t)$ en $t = nT$, $n \in \mathbb{Z}$.
- La secuencia $x[n] = x(nT)$ está unívocamente definida.
- Dada $x[n]$, ¿a qué señal continua representa?

Planteamiento del problema



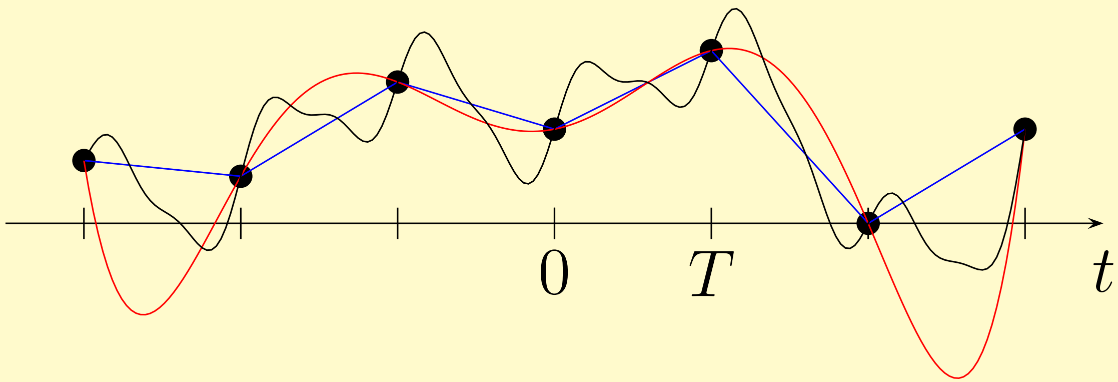
- Tomamos muestras de $x(t)$ en $t = nT$, $n \in \mathbb{Z}$.
- La secuencia $x[n] = x(nT)$ está unívocamente definida.
- Dada $x[n]$, ¿a qué señal continua representa?

Planteamiento del problema



- Tomamos muestras de $x(t)$ en $t = nT$, $n \in \mathbb{Z}$.
- La secuencia $x[n] = x(nT)$ está unívocamente definida.
- Dada $x[n]$, ¿a qué señal continua representa?
- La respuesta depende de un criterio *a priori*.

Planteamiento del problema



- Tomamos muestras de $x(t)$ en $t = nT$, $n \in \mathbb{Z}$.
- La secuencia $x[n] = x(nT)$ está unívocamente definida.
- Dada $x[n]$, ¿a qué señal continua representa?
- La respuesta depende de un criterio *a priori*.
- Espectro: señales limitadas en banda.

Conocimientos previos (I)

- Propiedades de la Delta de Dirac:

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0), \qquad x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0).$$

- Dos puntos de vista: dominio temporal y frecuencial.

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\Omega).$$

- Propiedades de multiplicación y convolución:

$$x(t)y(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} X(j\Omega) * Y(j\Omega), \quad x(t) * y(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\Omega)Y(j\Omega).$$

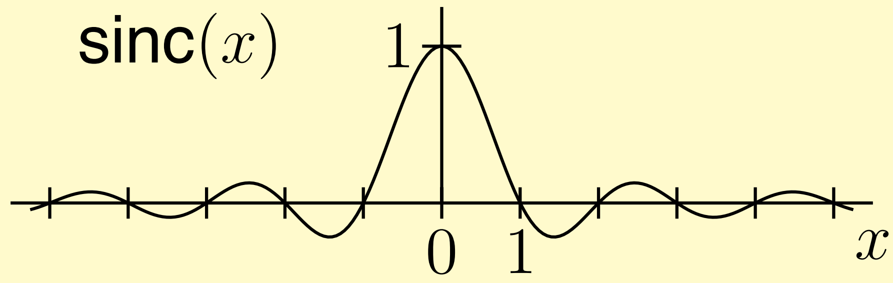
- Transformada de Fourier de un tren de deltas:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right).$$

Conocimientos previos (II)

- Transformada de Fourier de un pulso de anchura T:

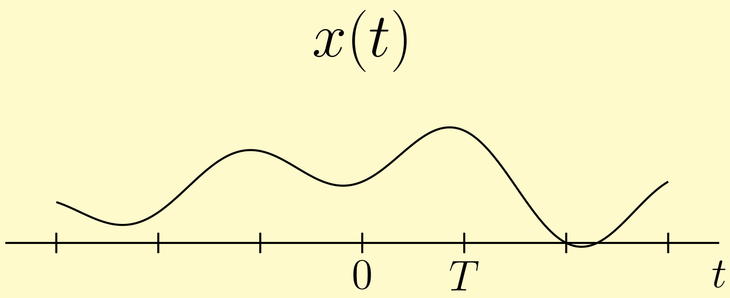
$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T/2, \\ 0, & |t| > T/2. \end{cases} \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} T\text{sinc}\left(\frac{\Omega T}{2\pi}\right).$$



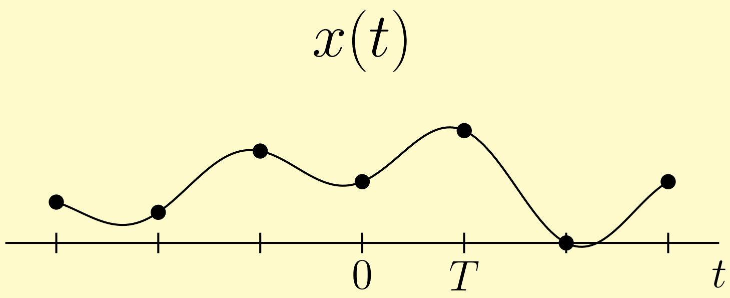
- Filtro paso bajo ideal de frecuencia de corte Ω_c:

$$\frac{\Omega_c}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{\Omega_c t}{\pi}\right) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c, \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c. \end{cases}$$

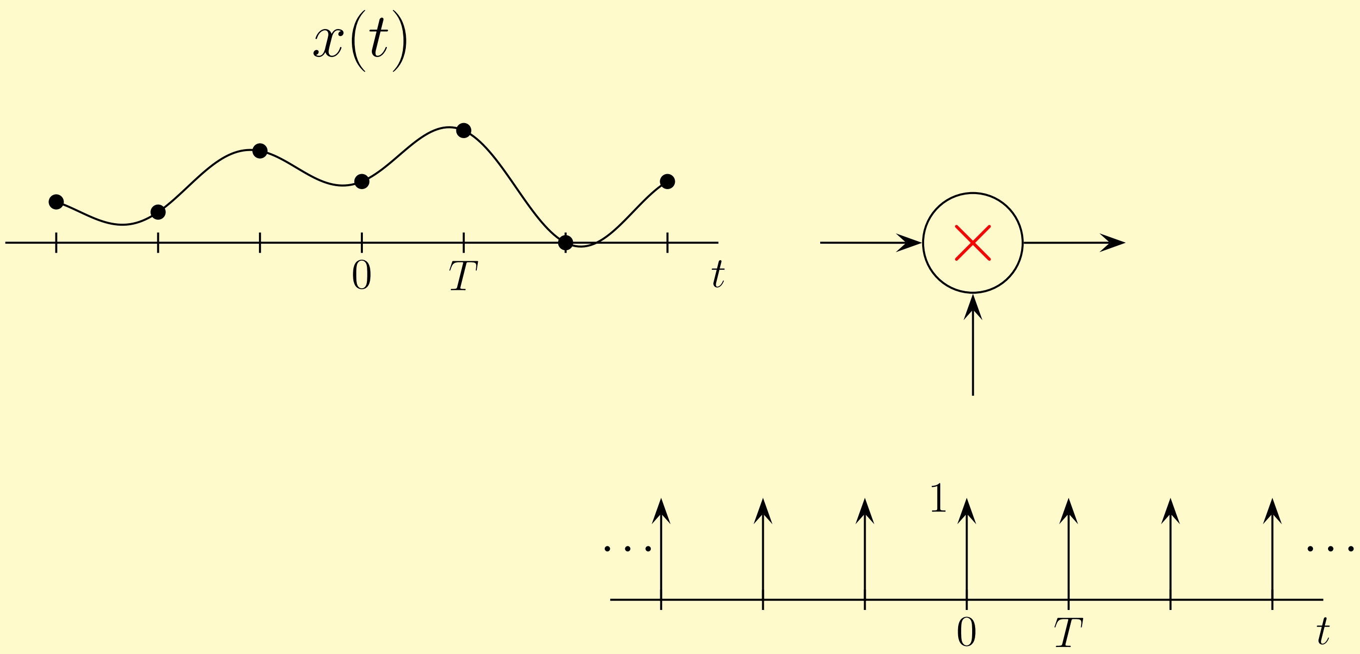
Muestreo uniforme (dominio del tiempo)



Muestreo uniforme (dominio del tiempo)



Muestreo uniforme (dominio del tiempo)

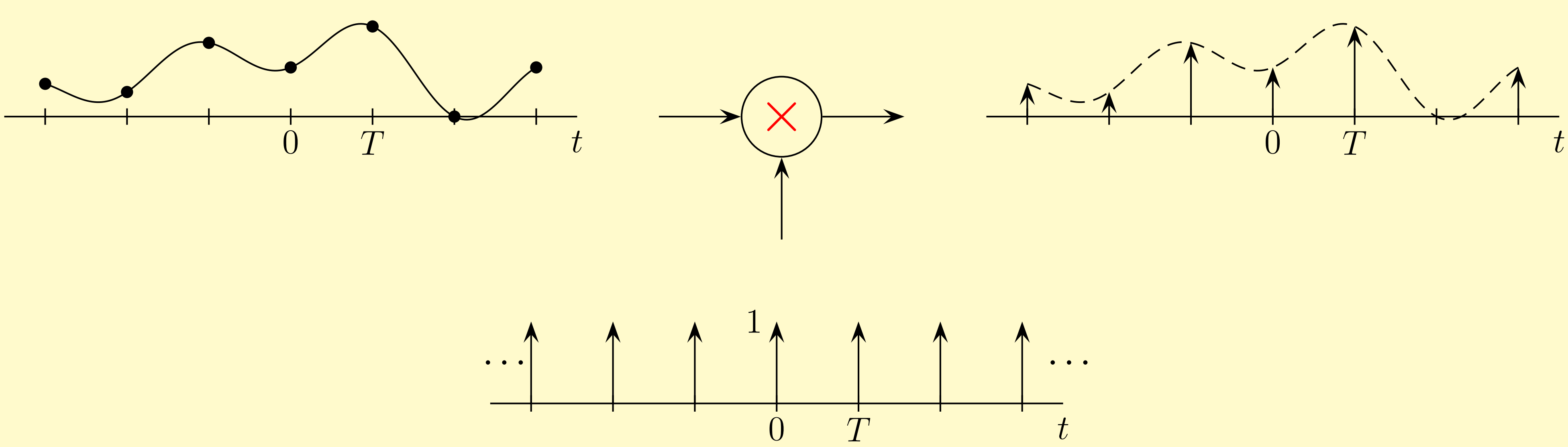


$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

Muestreo uniforme (dominio del tiempo)

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - kT)$$

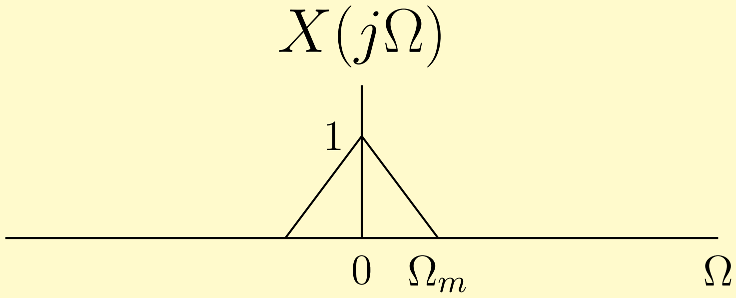
$x(t)$



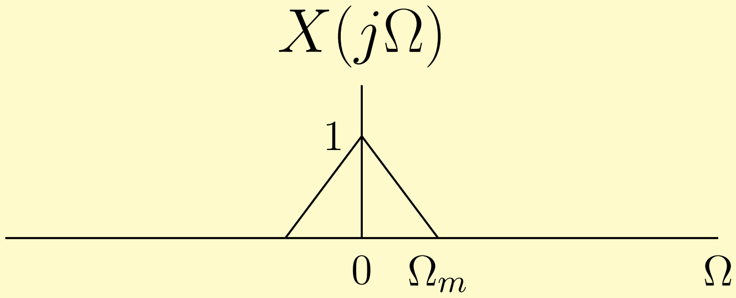
$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

Muestreo uniforme (dominio de la frecuencia)

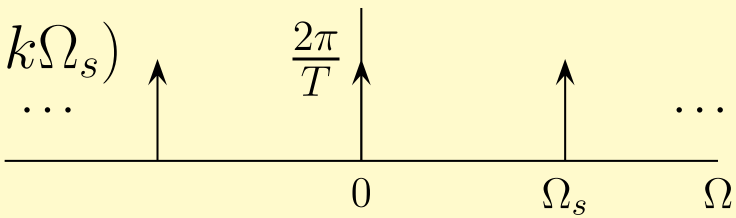
Muestreo uniforme (dominio de la frecuencia)



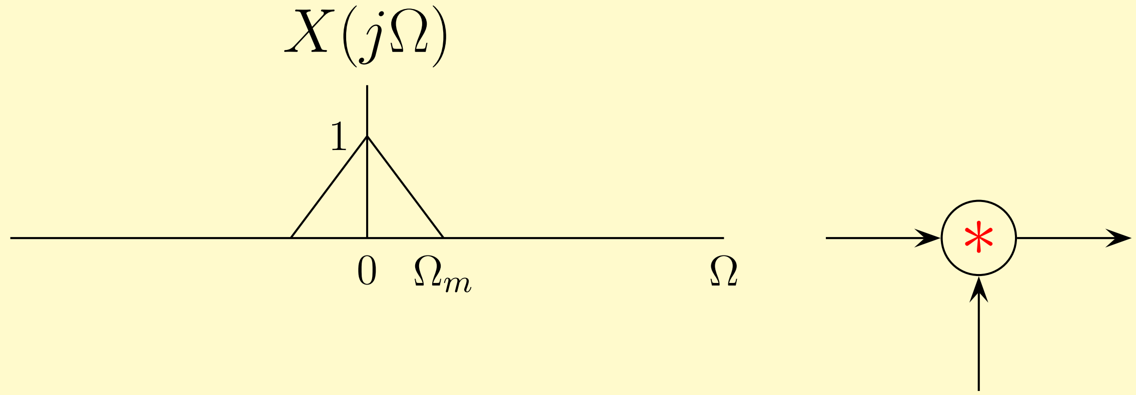
Muestreo uniforme (dominio de la frecuencia)



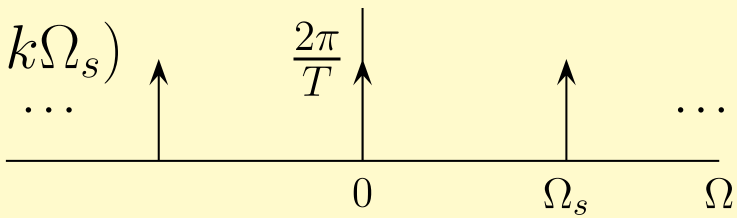
$$P(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$



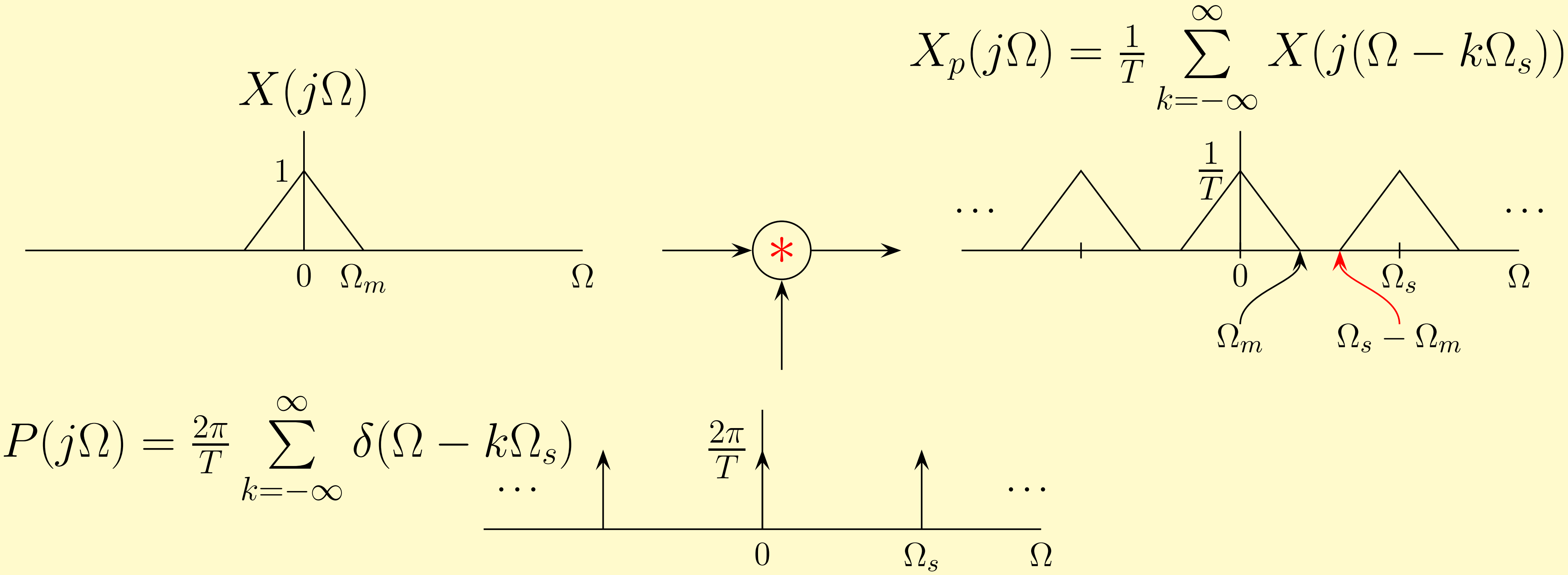
Muestreo uniforme (dominio de la frecuencia)



$$P(j\Omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega - k\Omega_s)$$



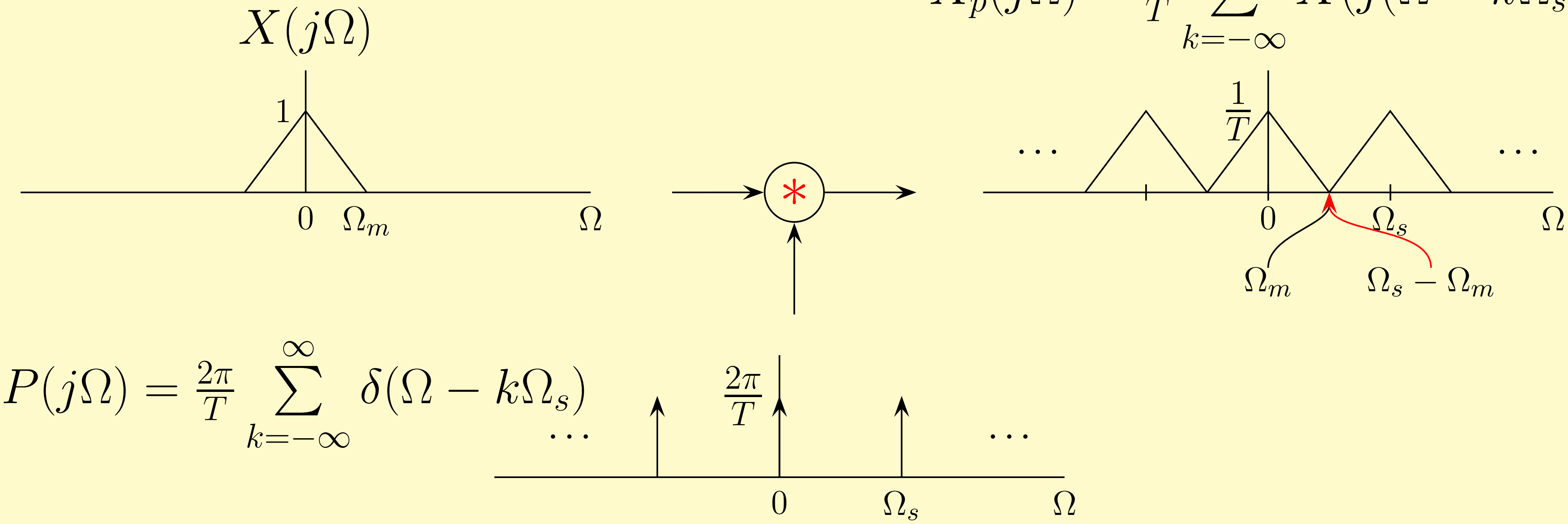
Muestreo uniforme (dominio de la frecuencia)



Muestreo uniforme (dominio de la frecuencia)

$$X_p(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - k\Omega_s))$$

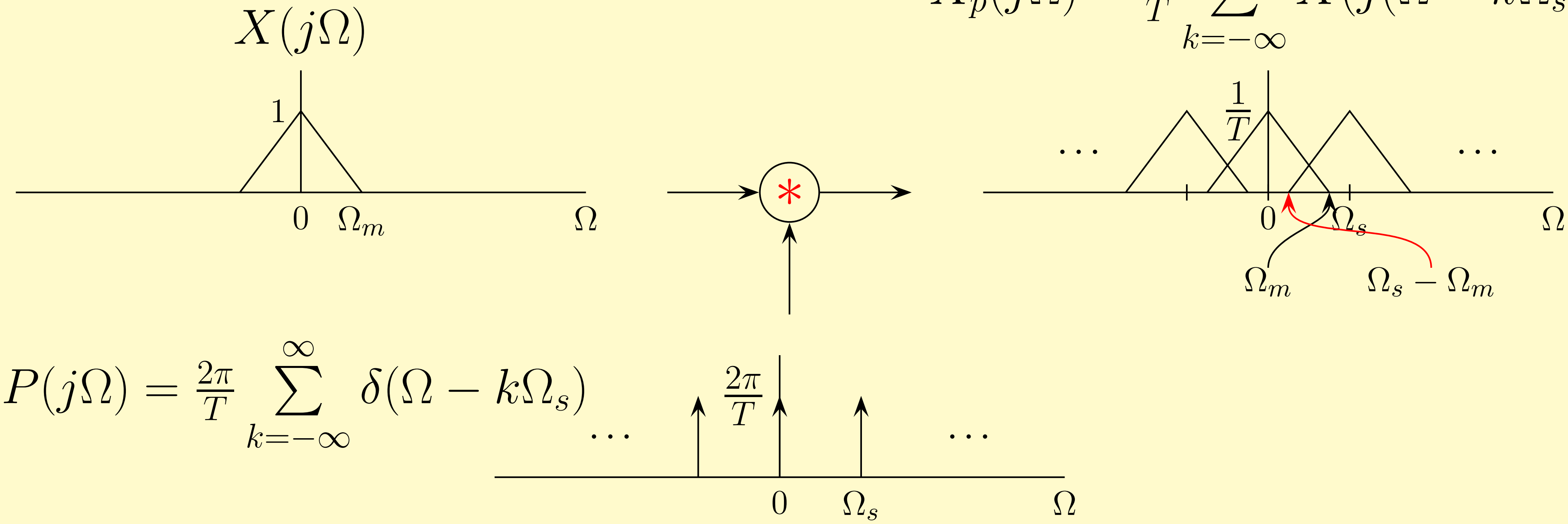
$$P(j\Omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$



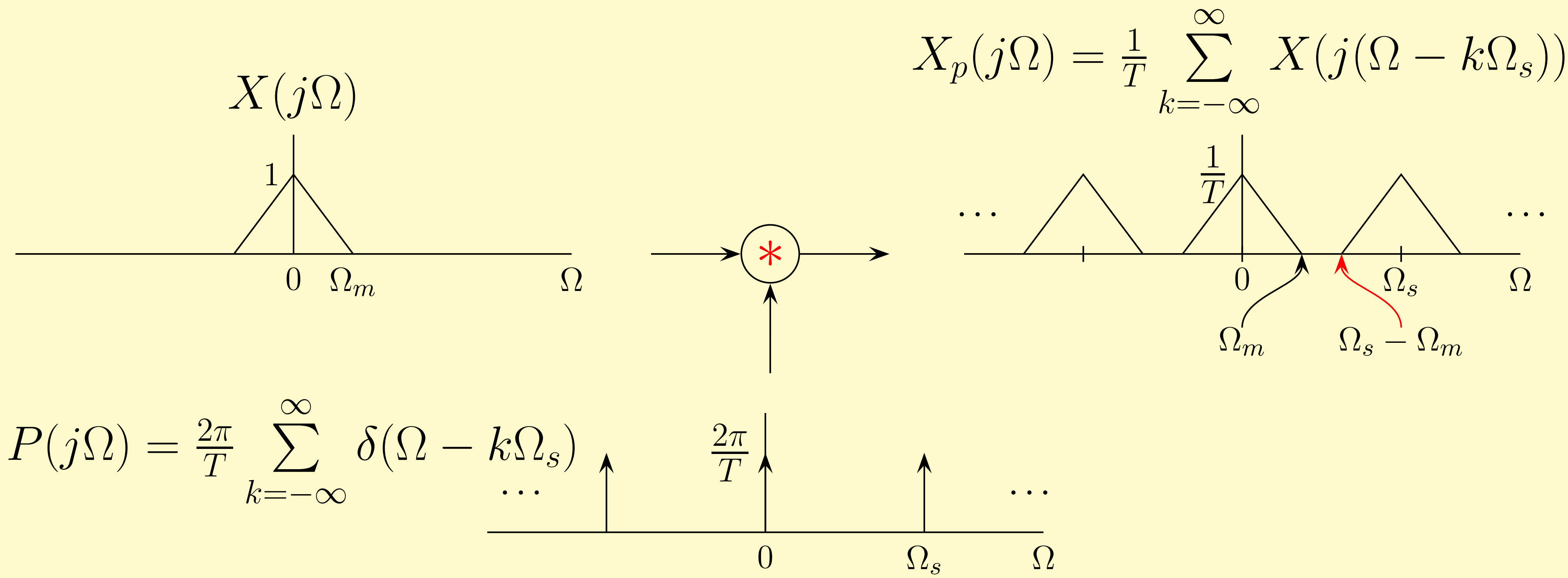
Muestreo uniforme (dominio de la frecuencia)

$$X_p(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - k\Omega_s))$$

$$P(j\Omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$



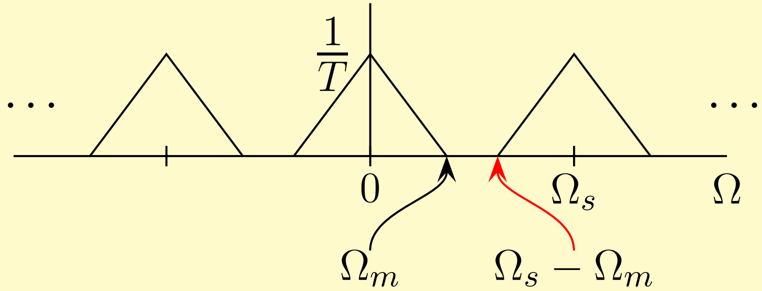
Muestreo uniforme (dominio de la frecuencia)



Teorema de muestreo: una señal continua limitada en banda, con ancho de banda Ω_m, puede reconstruirse a partir de sus muestras si la frecuencia de muestreo Ω_s es mayor que el doble del ancho de banda: $\Omega_s > 2\Omega_m$.

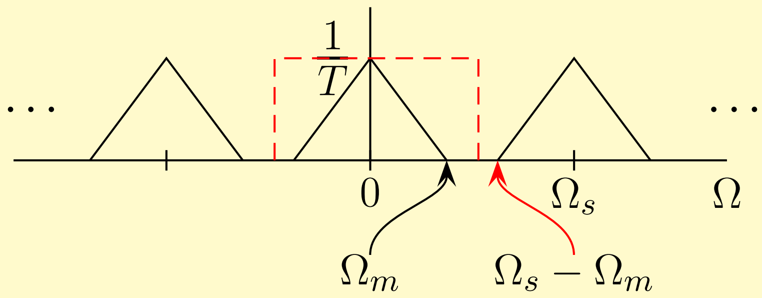
Reconstrucción ideal (dominio de la frecuencia)

$$X_p(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - k\Omega_s))$$



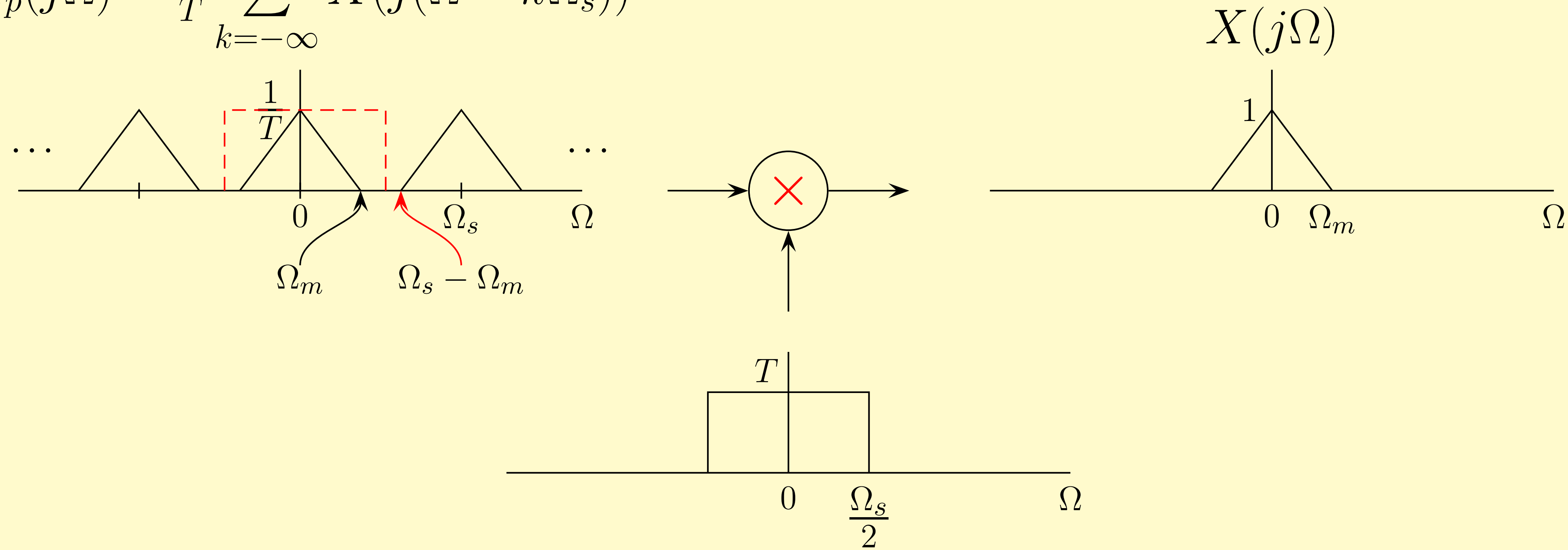
Reconstrucción ideal (dominio de la frecuencia)

$$X_p(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - k\Omega_s))$$



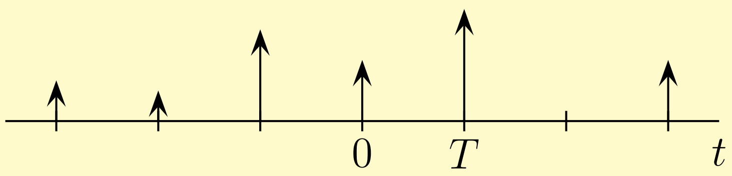
Reconstrucción ideal (dominio de la frecuencia)

$$X_p(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - k\Omega_s))$$



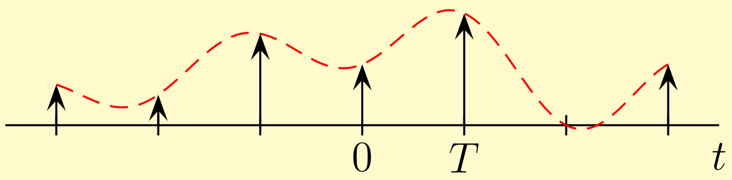
Reconstrucción ideal (dominio del tiempo)

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT)$$



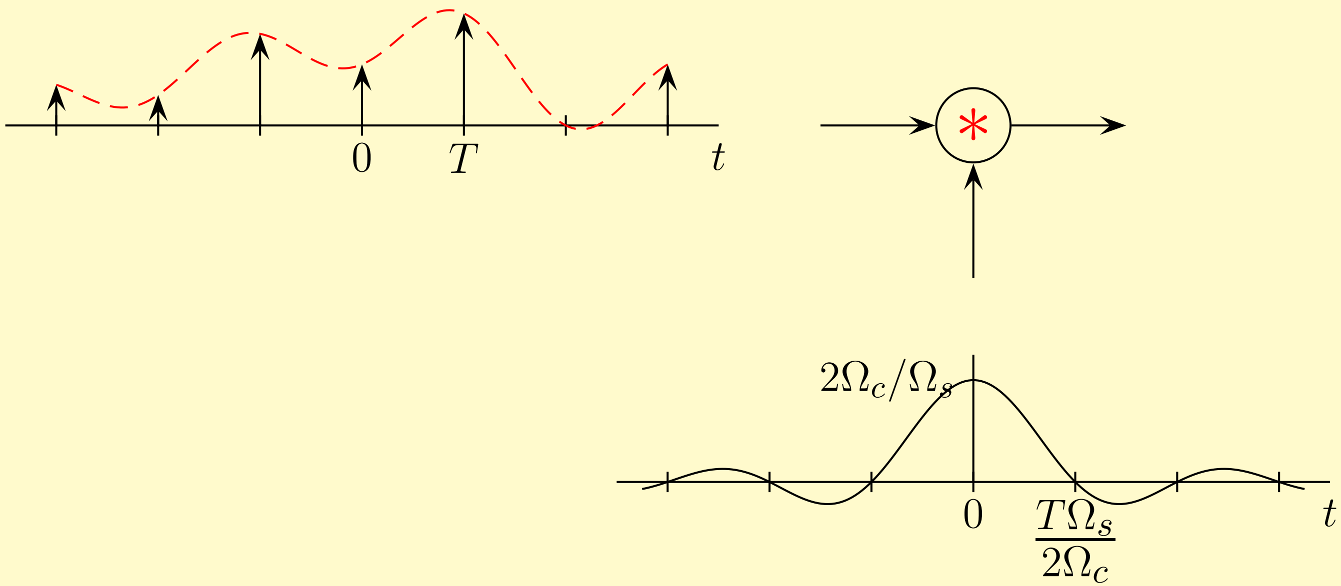
Reconstrucción ideal (dominio del tiempo)

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT)$$



Reconstrucción ideal (dominio del tiempo)

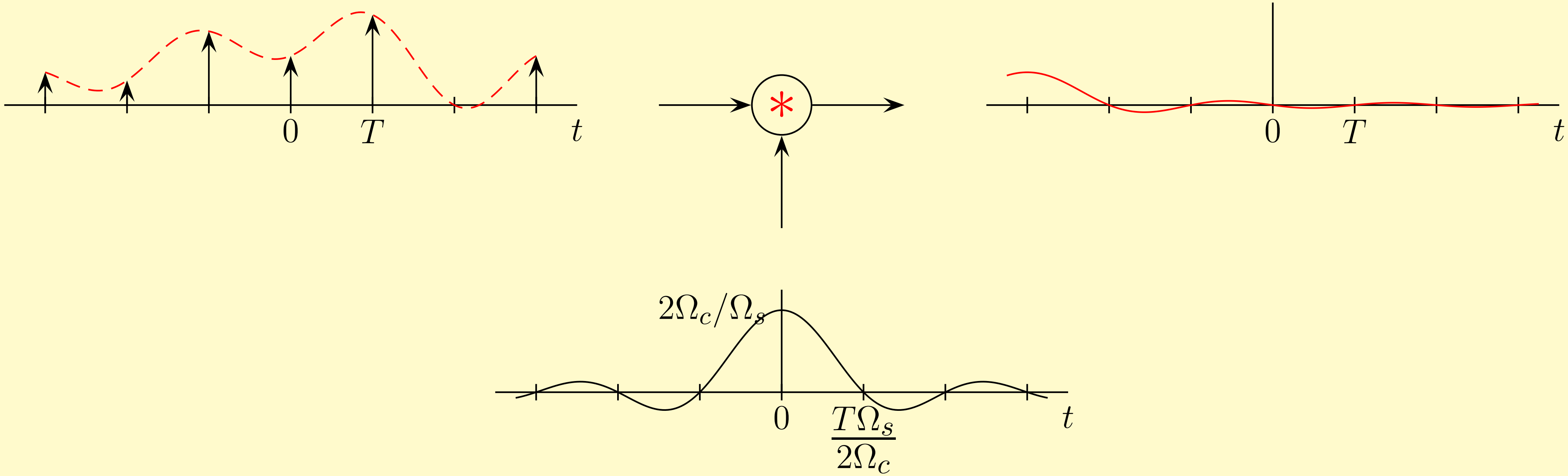
$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT)$$



$$h(t) = \textsf{sinc}\left(\frac{\Omega_s}{2\pi}t\right)$$

Reconstrucción ideal (dominio del tiempo)

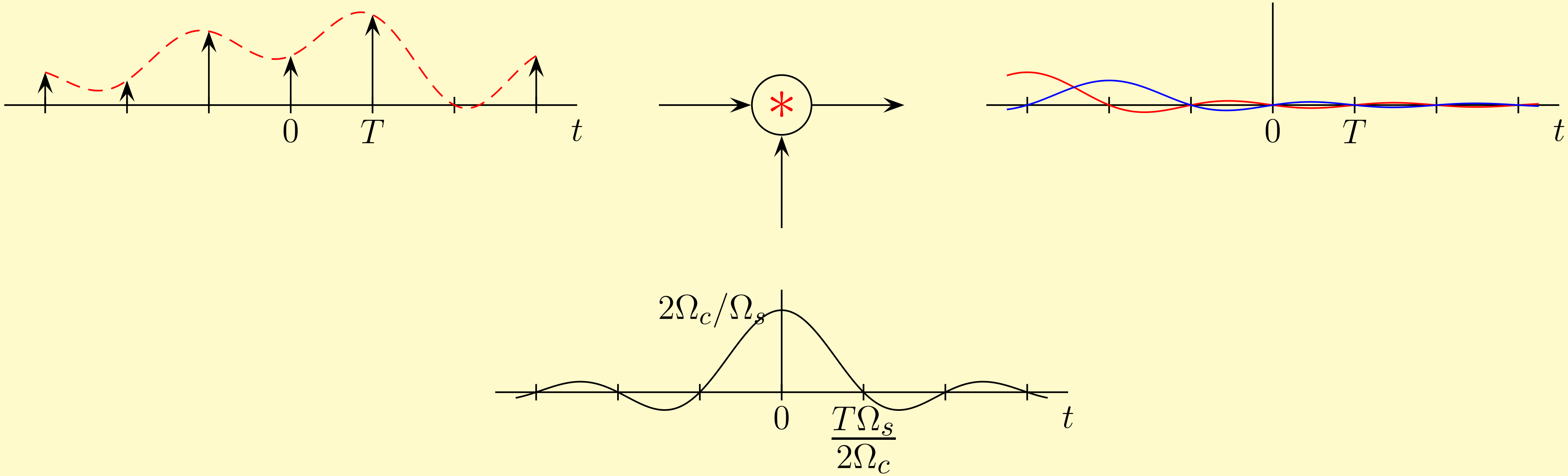
$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT)$$



$$h(t) = \textsf{sinc}\left(\frac{\Omega_s}{2\pi}t\right)$$

Reconstrucción ideal (dominio del tiempo)

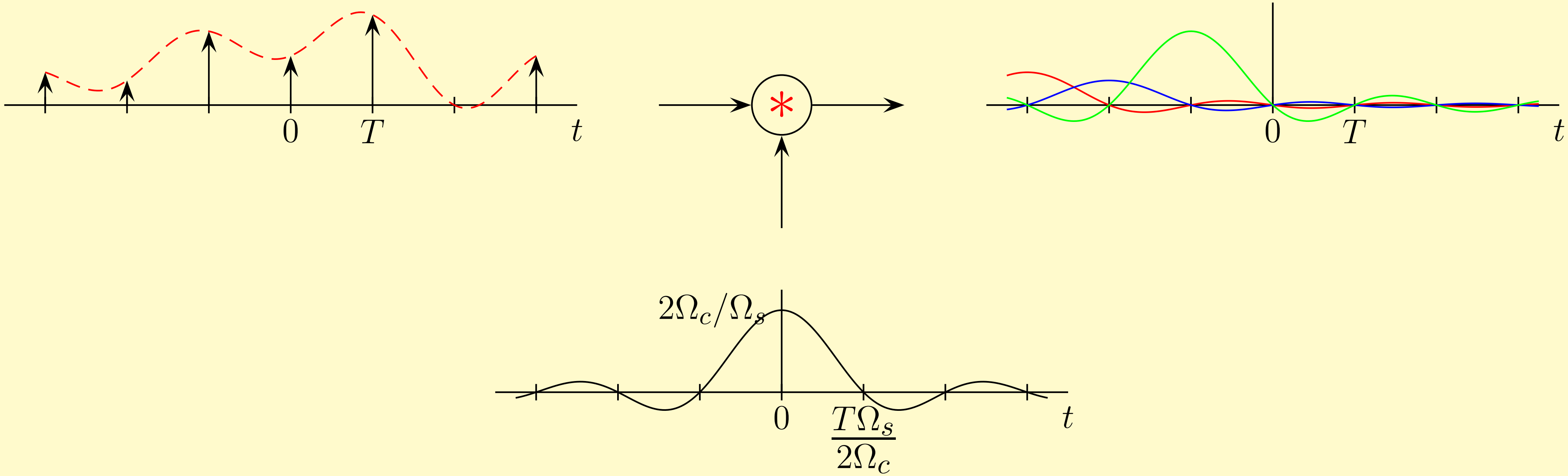
$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT)$$



$$h(t) = \text{sinc}\left(\frac{\Omega_s}{2\pi}t\right)$$

Reconstrucción ideal (dominio del tiempo)

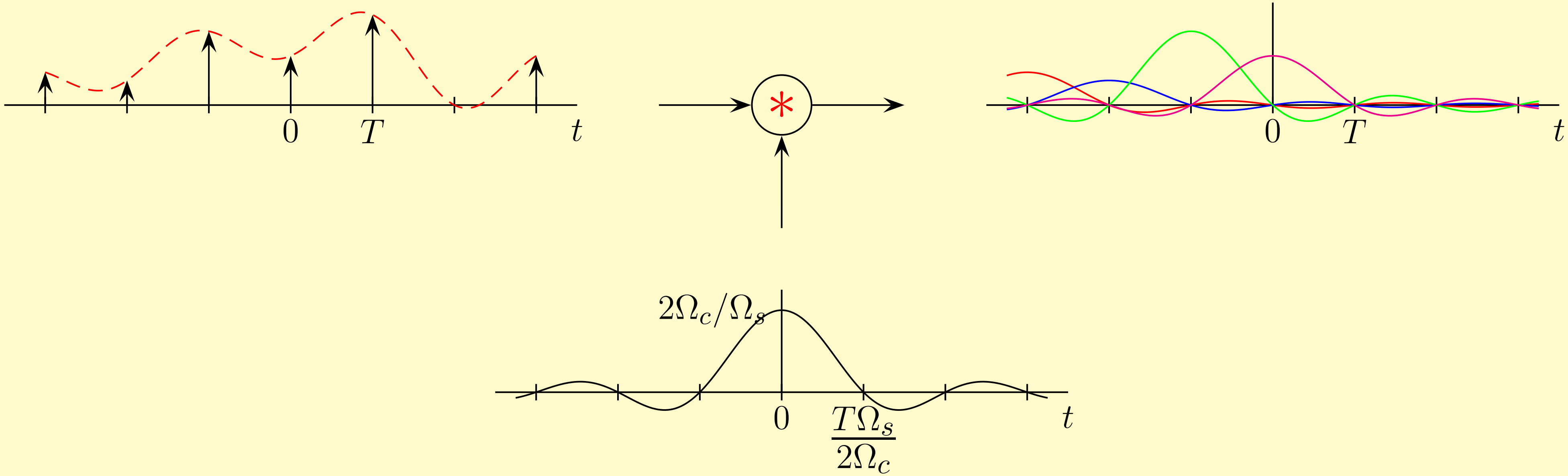
$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT)$$



$$h(t) = \mathsf{sinc}\left(\frac{\Omega_s}{2\pi}t\right)$$

Reconstrucción ideal (dominio del tiempo)

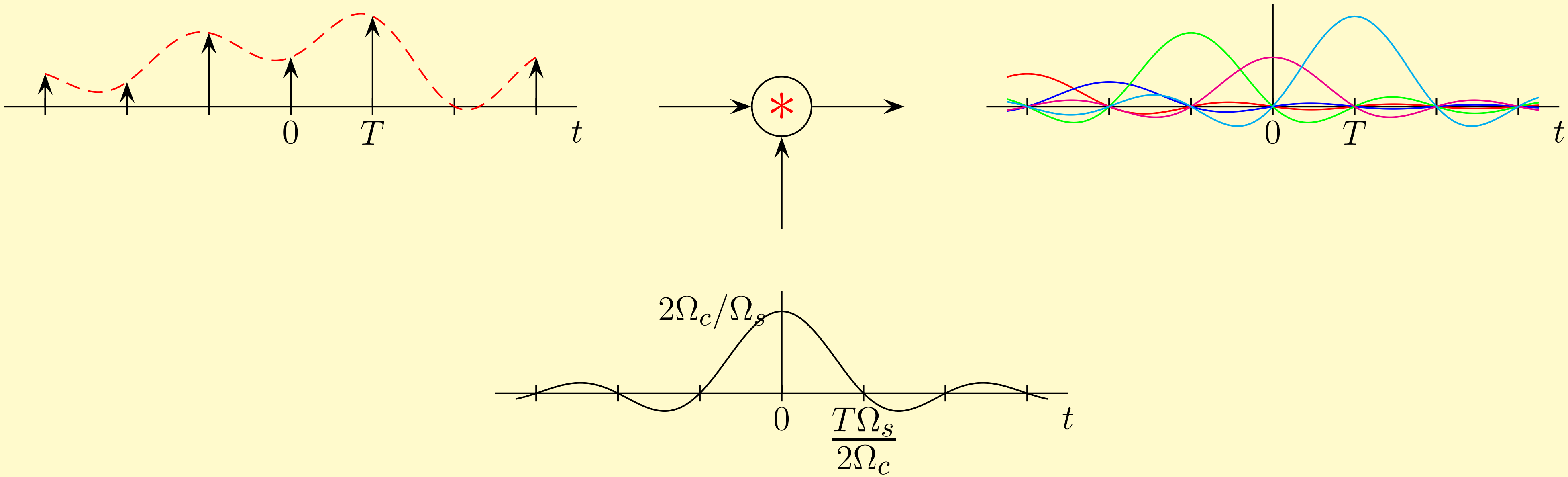
$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT)$$



$$h(t) = \mathsf{sinc}\left(\frac{\Omega_s}{2\pi}t\right)$$

Reconstrucción ideal (dominio del tiempo)

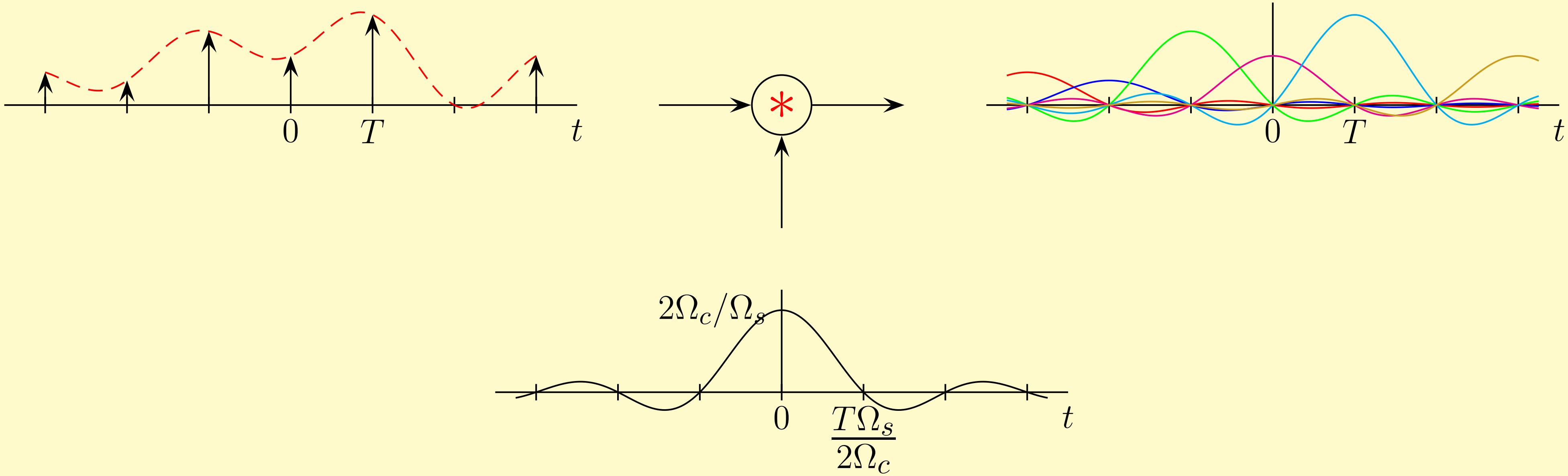
$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT)$$



$$h(t) = \mathsf{sinc}\left(\frac{\Omega_s}{2\pi}t\right)$$

Reconstrucción ideal (dominio del tiempo)

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT)$$

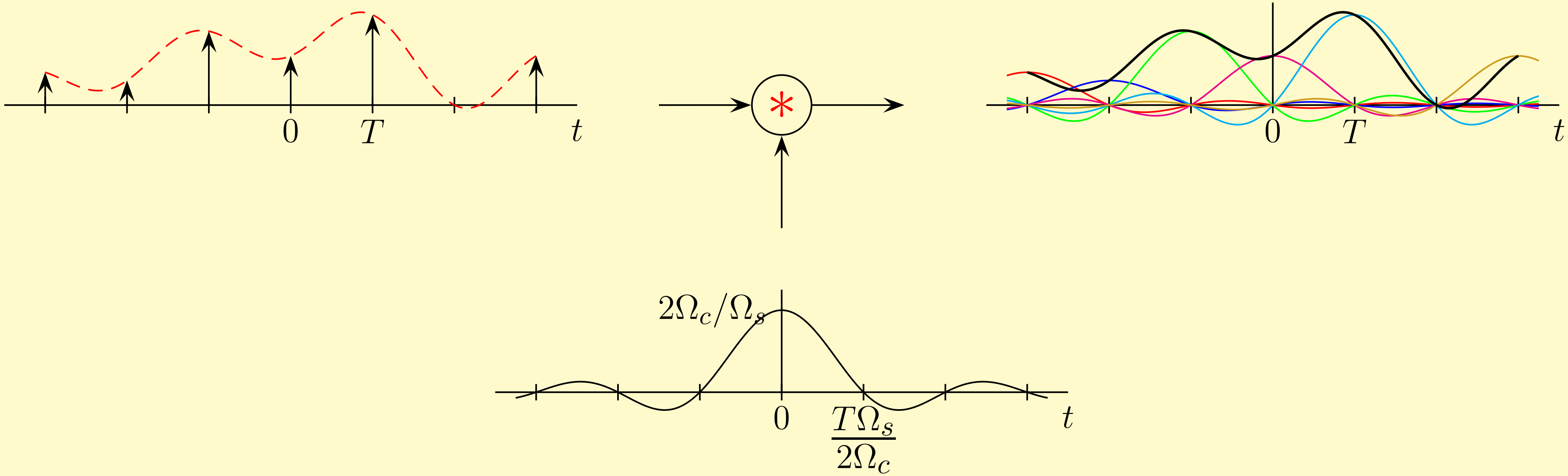


$$h(t) = \text{sinc}\left(\frac{\Omega_s}{2\pi}t\right)$$

Reconstrucción ideal (dominio del tiempo)

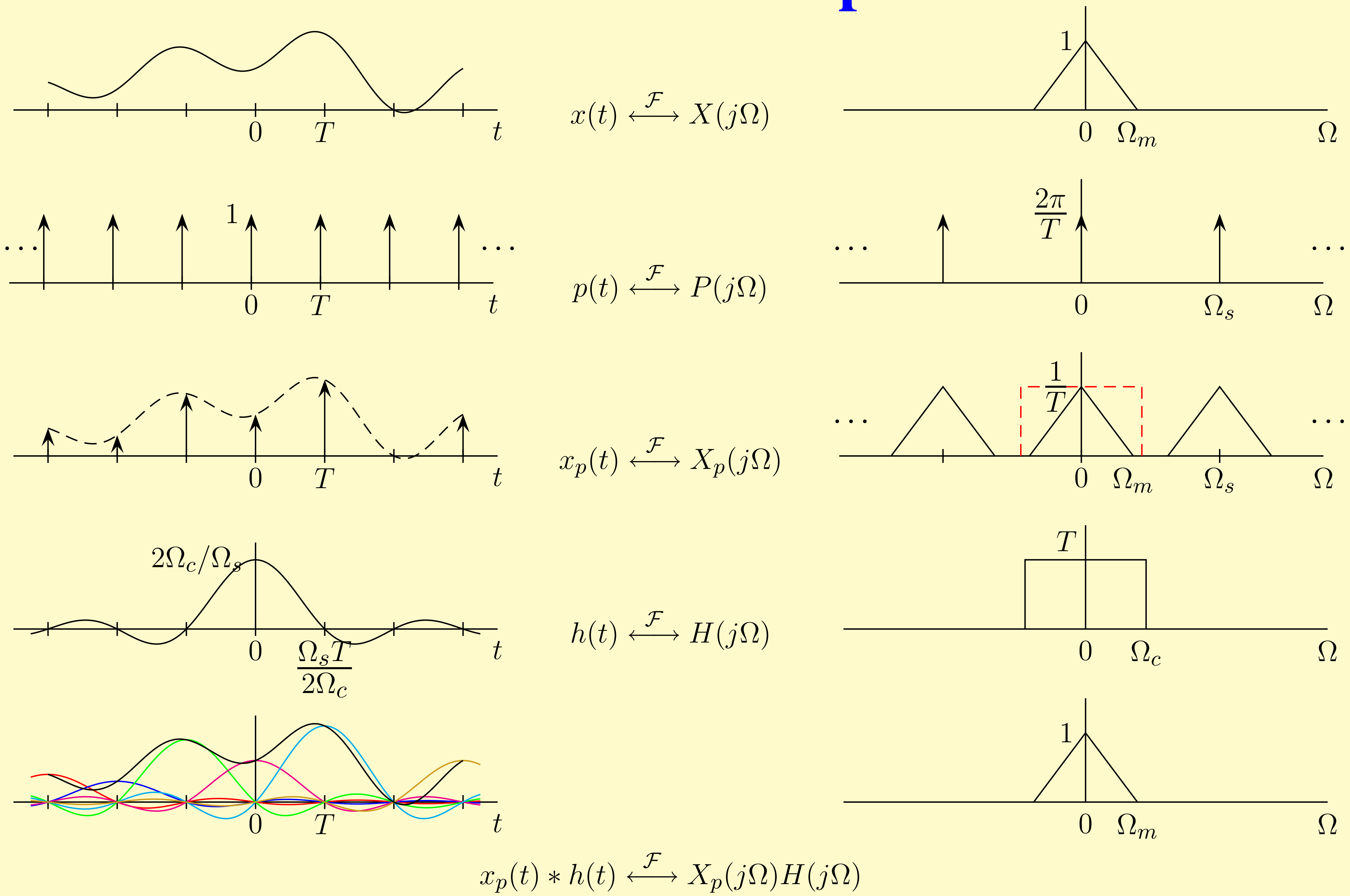
$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\textsf{sinc}\left(\frac{\Omega_s}{2\pi}(t - nT)\right)$$



$$h(t) = \textsf{sinc}\left(\frac{\Omega_s}{2\pi}t\right)$$

Proceso ideal completo

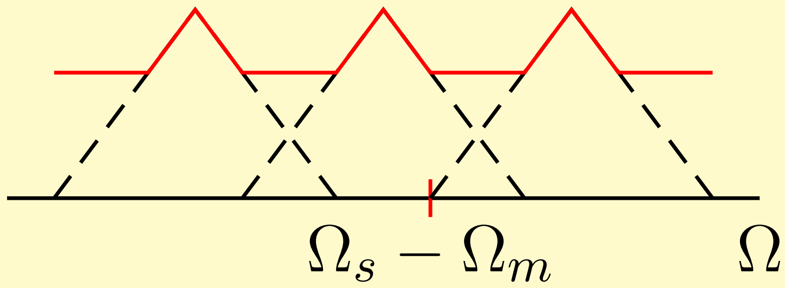


Algunos aspectos prácticos

- Hemos hecho la suposición de que la señal original está limitada en banda:
  - Filtro antialiasing.
- El filtro de reconstrucción ideal es irrealizable:
  - Otros esquemas de reconstrucción.
  - Sobremuestreo.

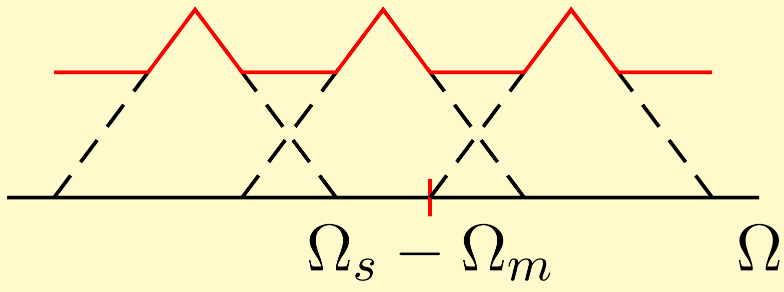
Filtro antialiasing

- Muestreo a $\Omega_s < 2\Omega_m$ sin filtro antialiasing:

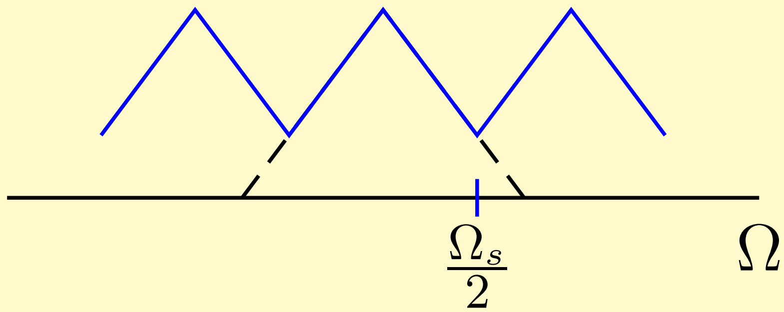


Filtro antialiasing

- Muestreo a $\Omega_s < 2\Omega_m$ sin filtro antialiasing:

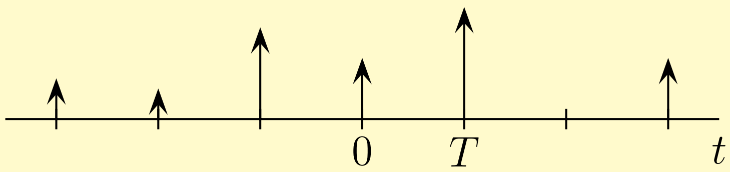


- Muestreo a $\Omega_s < 2\Omega_m$ con filtro antialiasing:



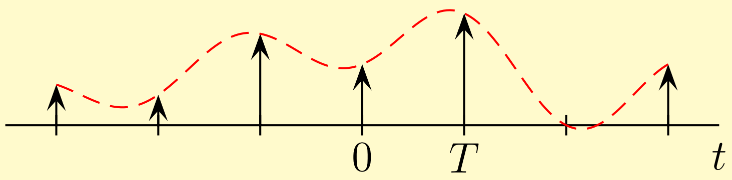
Reconstrucción práctica (dominio del tiempo)

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT)$$



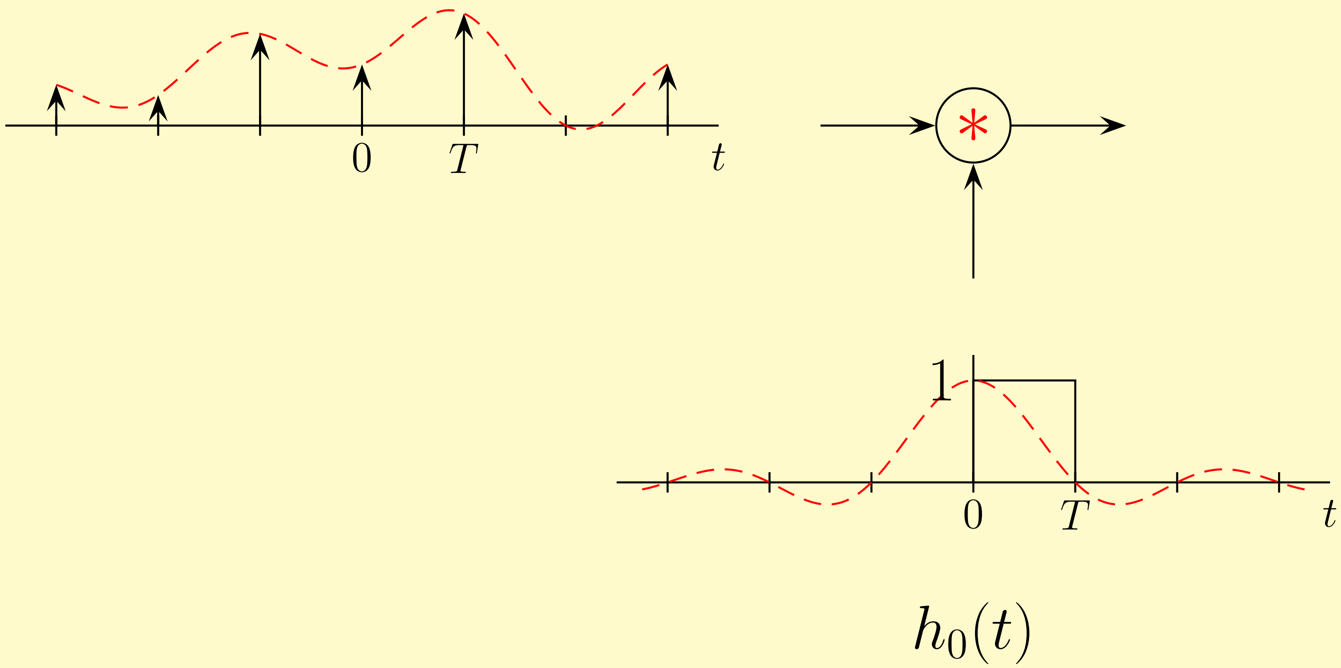
Reconstrucción práctica (dominio del tiempo)

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT)$$



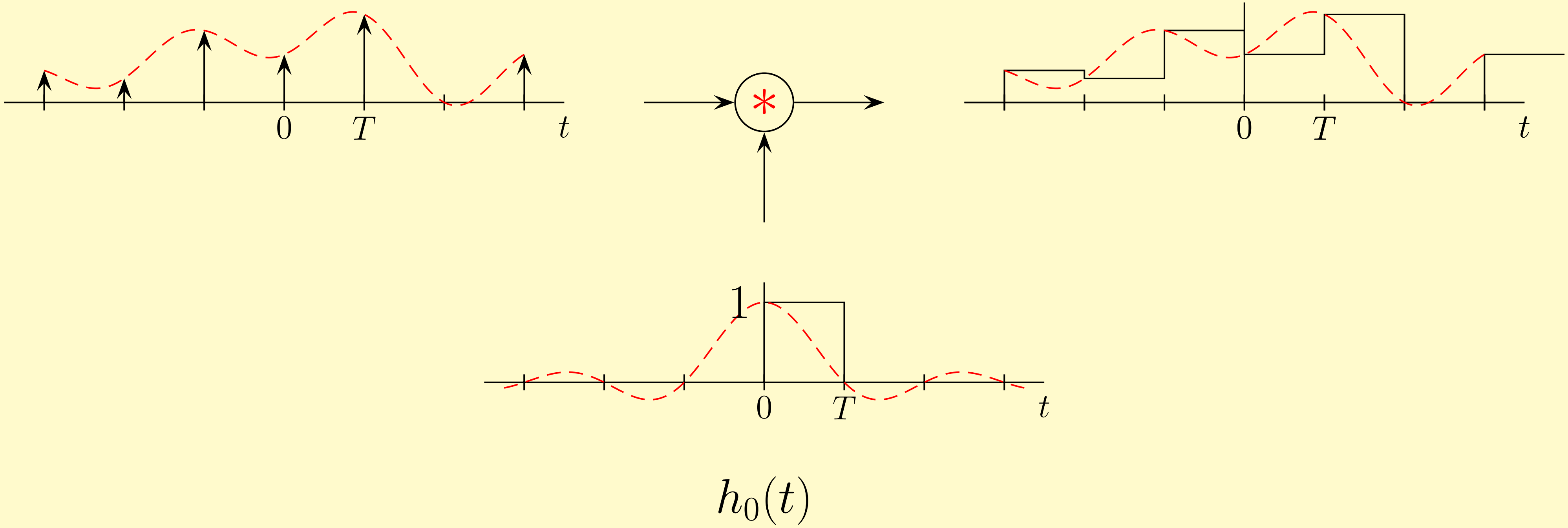
Reconstrucción práctica (dominio del tiempo)

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT)$$



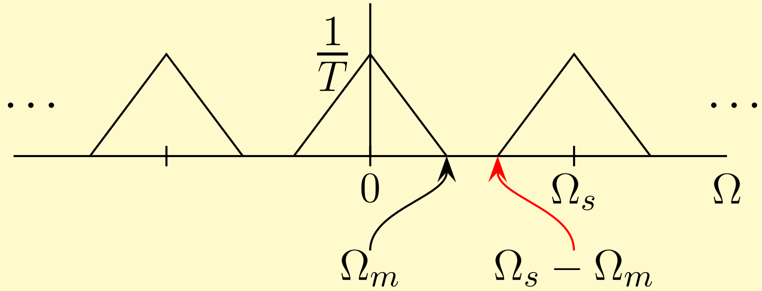
Reconstrucción práctica (dominio del tiempo)

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT) \qquad\qquad x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t - nT)$$



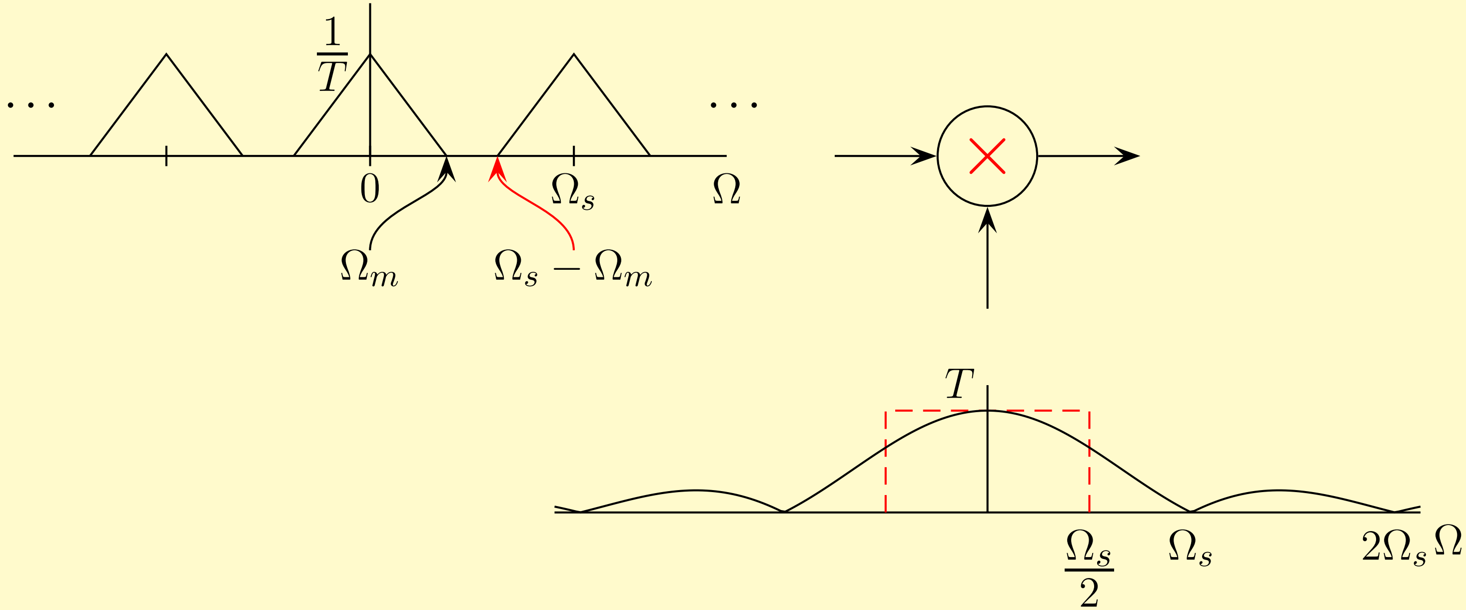
Reconstrucción práctica (dominio de la frecuencia)

$$X_p(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - k\Omega_s))$$



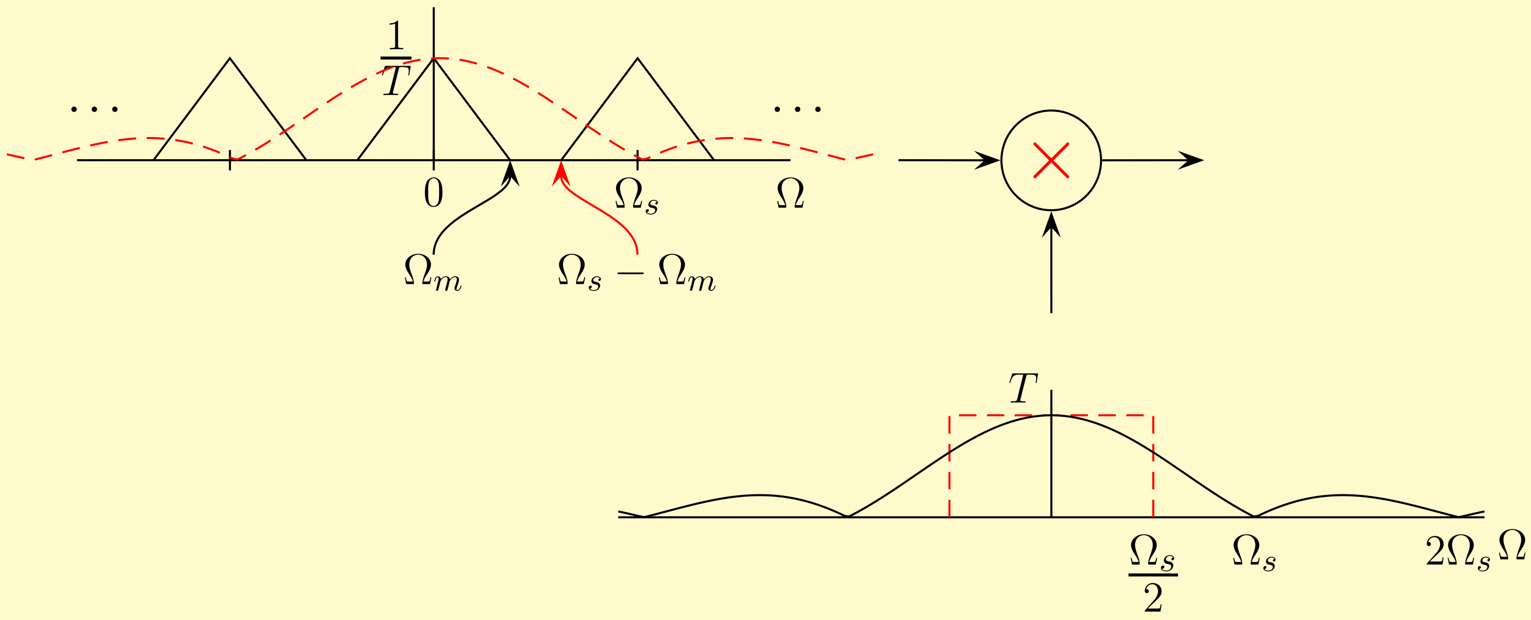
Reconstrucción práctica (dominio de la frecuencia)

$$X_p(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - k\Omega_s))$$



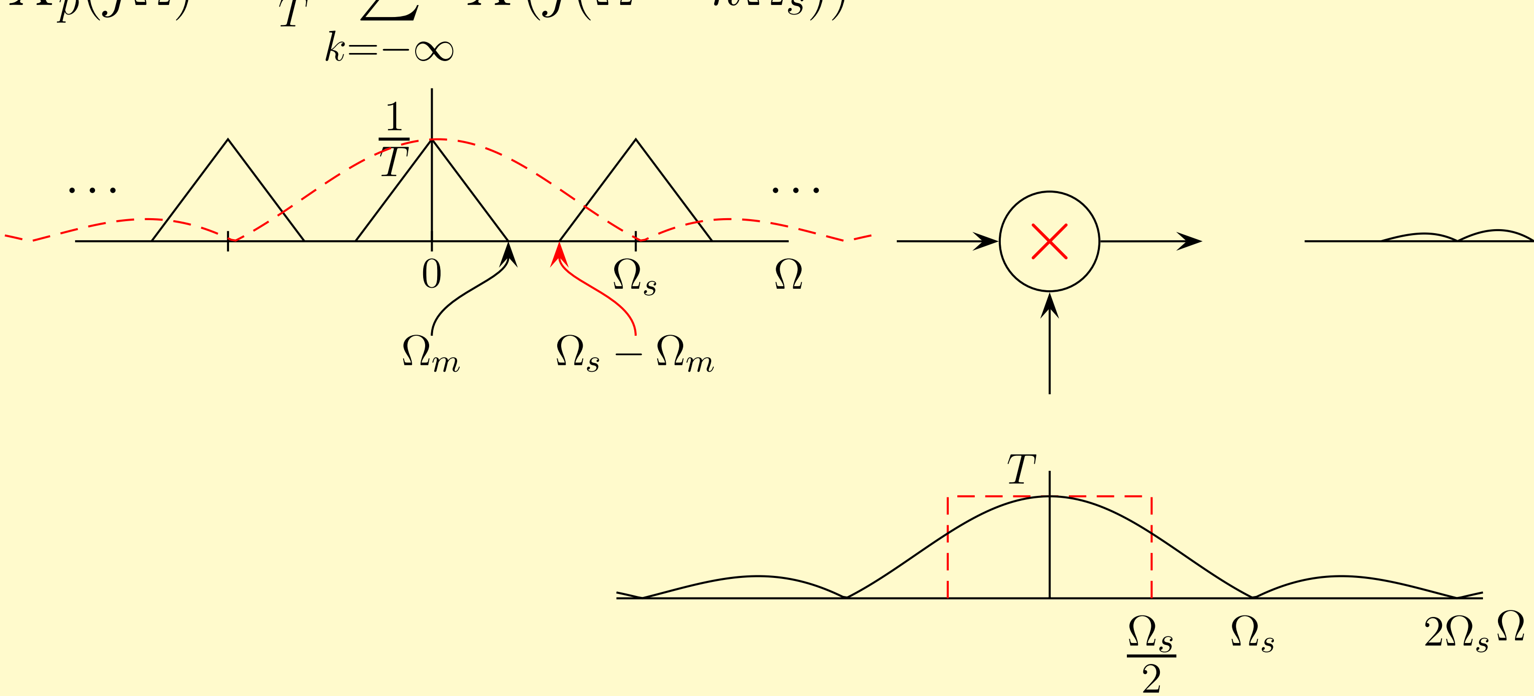
Reconstrucción práctica (dominio de la frecuencia)

$$X_p(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - k\Omega_s))$$



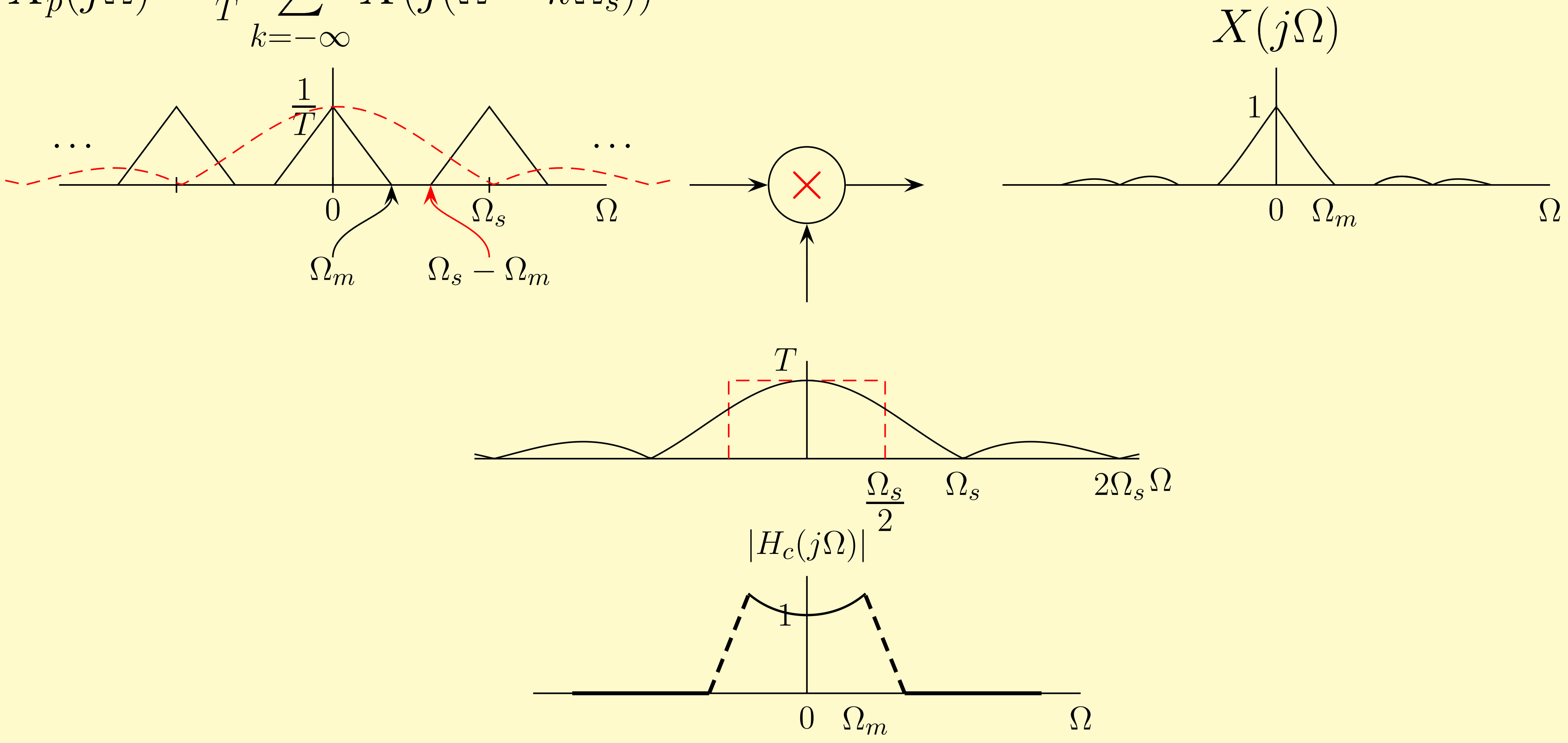
Reconstrucción práctica (dominio de la frecuencia)

$$X_p(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - k\Omega_s))$$



Reconstrucción práctica (dominio de la frecuencia)

$$X_p(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - k\Omega_s))$$



Resumen de los conceptos más importantes

- Teorema de Muestreo:
  - Una señal continua limitada en banda está perfectamente representada por una secuencia discreta de muestras equiespaciadas tomadas con una frecuencia no inferior al doble del ancho de banda.
- Aspectos prácticos:
  - Limitación de ancho de banda.
  - Filtro antialiasing.
  - El sobremuestreo facilita la reconstrucción.