Señales y sistemas.

Segundo curso de Ingeniería de Telecomunicación
Universidad de Cantabria

2 de febrero de 2001

1. Responda "verdadero" o "falso" a las siguientes cuestiones: *(2 puntos)*

   (a) Todo sistema LTI continuo estable tiene sus polos en el semiplano izquierdo.

   (b) La señal continua $2\delta(-2t-1)$ vale 2 en $t=-1/2$ y 0 en el resto.

   (c) Si $x(t)=e^{j\omega t}$, la extensión temporal de $x(2t)$ es la mitad que la de $x(t)$.

   (d) La respuesta impulsiva de un sistema LTI cuya relación entrada salida —$x[n]$ e $y[n]$ respectivamente— viene dada por $y[n]=ay[n-1]+x[n]$ es $h[n]=a^n u[n]$.

   (e) La respuesta impulsiva de un sistema LTI cuya relación entrada salida —$x[n]$ e $y[n]$ respectivamente— viene dada por $x[n]=ax[n-1]+y[n]$ es $h[n]=\delta[n]-a\delta[n-1]$.

   (f) Si diezmamos una señal por un factor 2 y a continuación la expandimos por un factor 2 obtendremos la señal original.

   (g) La transformada de Fourier de la señal triangular $x(t)=(1-|t|)[|t|<1]$ es real y positiva.

   (h) Si $x(t)=p(t)+q(t)$, el área de la región de convergencia (ROC) de $X(z)$ siempre es menor o igual que el área de las ROC de $P(z)$ y $Q(z)$.

   (i) Si $x(t)$ es real, la transformada de Fourier de $x(t)*x(-t)$ es $|X(j\omega)|^2$.

   (j) Al aplicar un filtro reconstructor $h(t)$ para obtener una señal continua $x_c(t)$ a partir de una muestreada por impulsos $x_d(t)$, el espectro $X_c(j\omega)$ es la convolución de $H(j\omega)$ y $X_d(j\omega)$.

2. La relación entre la entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$ de un sistema es

$$\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)-6y(t)=\ddot{x}(t)-\dot{x}(t)-2x(t).$$

   (a) Razonar si el sistema inverso es causal y estable. *(1 punto)*

   (b) Calcular la ecuación diferencial que relaciona la entrada y la salida del sistema inverso. *(1 punto)*

3. Este ejercicio pretende mostrar cómo calcular simultáneamente la transformada discreta de Fourier (DFT) de dos señales reales a partir de la DFT de una señal compleja.

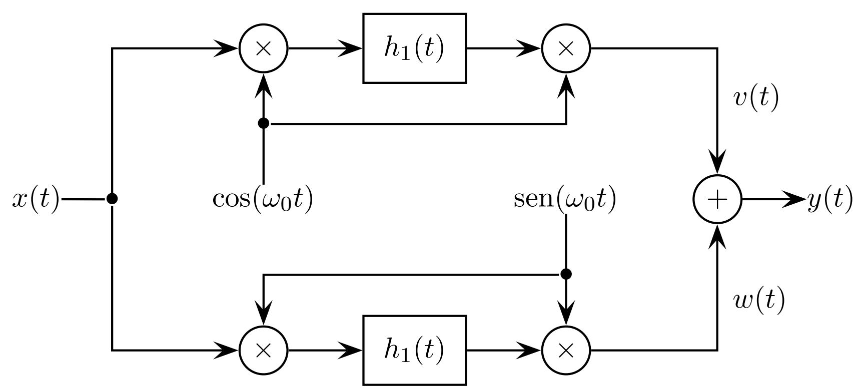
   Sean $x[n]$ e $y[n]$ dos señales discretas reales periódicas de período N, cuyos coeficientes de la DFT son $X[k]$ e $Y[k]$. Se define la secuencia compleja $z[n]=x[n]+jy[n]$, cuyos coeficientes de la DFT son $Z[k]$. Obtener expresiones que permitan calcular $X[k]$ e $Y[k]$ a partir de los coeficientes de la secuencia periódica de coeficientes $Z[k]$. *(2 puntos)*

4. El sistema en cuadratura que se muestra a continuación —que consta de dos sistemas LTI idénticos $h_1(t)$, cuatro moduladores (multiplicadores), y un sumador— es importante en ciertas aplicaciones de comunicaciones y procesado de señal. El sistema está compuesto por dos subsistemas en paralelo con salidas $v(t)$ y $w(t)$.

   (a) Demostrar que cada uno de los dos subsistemas es lineal, pero no invariante en el tiempo. *(1 punto)*

   (b) Demostrar que el sistema global con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ es LTI. *(0.5 puntos)*

   (c) Calcular la respuesta impulsiva $h(t)$ del sistema global. *(0.5 puntos)*



5. Un sistema discreto tiene la siguiente descripción mediante variables de estado

$$\mathbf{q}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{q}[n] + \mathbf{b}x[n],$$
$$y[n] = \mathbf{c}\mathbf{q}[n] + dx[n],$$

donde

$$\mathbf{q}[n] = \begin{pmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad d = 0.$$

Calcular $H(z) = Y(z)/X(z)$. *(2 puntos)*

Soluciones al examen de Señales y sistemas

2 de febrero de 2001

Segundo curso de Ingeniería de Telecomunicación
Universidad de Cantabria
Luis Vielva

Ejercicio 1

(a) Falso (sólo si es causal).

(b) Falso ($\delta(0) \neq 1$).

(c) Falso (la extensión de $x(t)$ es infinita).

(d) Verdadero (hacer $x[n] = \delta[n]$).

(e) Verdadero (hacer $x[n] = \delta[n]$).

(f) Falso (para toda señal original, la señal final verifica $x[2n] = 0$).

(g) Verdadero (Si $r(t)$ es un rectángulo, $x(t) = r(t) * r(t) \to X(j\omega) = R(j\omega)^2 > 0$, ya que, $R(j\omega) \in \mathbf{R}$).

(h) Falso (pueden cancelarse polos con ceros).

(i) Verdadero (si $x(t) \in \mathbf{R} \to X(-j\omega) = X^*(j\omega)$, por lo que $X(j\omega)X(-j\omega) = |X(j\omega)|^2$).

(j) Falso (la convolución es en el dominio del tiempo).

Ejercicio 2 Transformando la ecuación diferencial al dominio s,

$$(s^2 + s - 6)Y(s) = (s^2 - s - 2)X(s),$$

con lo que la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{s^2 - s - 2}{s^2 + s - 6} = \frac{(s-2)(s+1)}{(s+3)(s-2)} = \frac{s+1}{s+3}.$$

El sistema inverso tendrá como función de transferencia

$$H^{-1}(s) = \frac{s+3}{s+1}$$

cuyo único polo se encuentra en $s = -1$. Por tanto el sistema inverso puede ser simultáneamente causal y estable.

La ecuación diferencial que relaciona la salida —$y(t)$— y la entrada —$x(t)$— del sistema inverso es

$$\dot{y}(t) + y(t) = \dot{x}(t) + 3x(t).$$

Ejercicio 3 Si $x[n]$ es real, los coeficientes $X[k]$ de su DFT son simétricos conjugados $X^*[-k] = X[k]$.

Si construimos $z[n] = x[n] + jy[n]$, por ser la DFT una operación lineal,

$$Z[k] = X[k] + jY[k]. \tag{1}$$

De esta ecuación se deduce inmediatemente $Z[-k] = X[-k] + jY[-k]$, que tomando complejos conjugados proporciona $Z^*[-k] = X^*[-k] - jY^*[-k]$. Según la propiedad de simetría conjugada, tendremos

$$Z^*[-k] = X[k] - jY[k]. \tag{2}$$

Las ecuaciones (1) y (2) constituyen un sistema del que se puede despejar inmediatamente

$$X[k] = \frac{Z[k] + Z^*[-k]}{2}, \qquad Y[k] = \frac{Z[k] - Z^*[-k]}{2j}.$$

Ejercicio 4 Las señales $v(t)$ y $w(t)$ se generan multiplicando por una sinusoide, convolucionando por $h_1(t)$ y volviendo a multiplicar, por lo que

$$\begin{aligned} v(t) &= [(x(t)\cos(\omega_0 t)) * h_1(t)]\cos(\omega_0 t), \\ w(t) &= [(x(t)\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)) * h_1(t)]\,\mathrm{sen}(\omega_0 t). \end{aligned}$$

La demostración de que los subsistemas son lineales es inmediata, pues es la conexión en serie de tres operaciones lineales —multiplicar, convolucionar por un sistema LTI y multiplicar de nuevo—. Para demostrar que no son invariantes en el tiempo expresaremos $v(t)$ de forma expandida

$$v(t) = \cos(\omega_0 t)\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cos(\omega_0\tau)h_1(t-\tau)\,d\tau.$$

La salida correspondiente a $x(t-t_0)$ será

$$\cos(\omega_0 t)\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau - t_0)\cos(\omega_0\tau)h_1(t-\tau)\,d\tau.$$

Haciendo el cambio $\tau - t_0 = \nu$,

$$\cos(\omega_0 t)\int_{-\infty}^{\infty} x(\nu)\cos(\omega_0(\nu + t_0))h_1(t - t_0 - \nu)\,d\nu \neq v(t - t_0).$$

Teniendo en cuenta que $2\cos A\cos B = \cos(A-B) + \cos(A+B)$ y que $2\,\mathrm{sen}\,A\,\mathrm{sen}\,B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$, la salida del sistema global puede expresarse como

$$y(t) = v(t) + w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cos(\omega_0(t-\tau))h_1(t-\tau)\,d\tau. \tag{3}$$

El sistema es lineal puesto que es la conexión en paralelo de dos sistemas lineales. Para comprobrar que es invariante en el tiempo calcularemos la salida correspondientes a $x(t-t_0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau - t_0)\cos(\omega_0(t-\tau))h_1(t-\tau)\,d\tau,$$

que si hacemos de nuevo el cambio de variable $\nu = \tau - t_0$ puede ponerse como

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\nu) \cos(\omega_0(t - t_0 - \nu)) h_1(t - t_0 - \nu) \, d\nu = y(t - t_0).$$

La respuesta impulsiva puede calcularse inmediatamente a partir de (3), ya que

$$y(t) = x(t) * [\cos(\omega_0 t) h_1(t)],$$

por lo que $h(t) = \cos(\omega_0 t) h_1(t)$.

Ejercicio 5 Podemos resolver el ejercicio de varias formas, vamos a mostras dos de ellas

1. Aplicando transformada z a la ecuación de estado tendremos

$$\begin{aligned} z\mathbf{Q}(z) &= \mathbf{AQ}(z) + \mathbf{bX}(z), \\ Y(z) &= \mathbf{CQ}(z) + d\mathbf{X}(z); \end{aligned}$$

de donde se obtiene directamente

$$H(z) = \mathbf{c}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d = \frac{6}{z^2 - z + 1}.$$

2. La descripción mediante variables de estado puede expresarse escalarmente por

$$\begin{aligned} q_1[n+1] &= q_2[n], \\ q_2[n+1] &= -q_1[n] + q_2[n] + 2x[n], \\ y[n] &= 3q_1[n]; \end{aligned}$$

que tiene como transformada z

$$\begin{aligned} zQ_1(z) &= Q_2(z), \\ zQ_2(z) &= -Q_1(z) + Q_2(z) + 2X(z), \\ Y(z) &= 3Q_1(z). \end{aligned}$$

De donde se puede despejar directamente

$$H(z) = \frac{6}{z^2 - z + 1}.$$