Señales y sistemas.

Segundo curso de Ingeniería de Telecomunicación
Universidad de Cantabria

19 de septiembre de 2001

1. Indique, para las respuestas impulsivas siguientes, si los sistemas correspondientes (i) tienen memoria, (ii) son causales, (iii) son estables:

   a) $h(t) = e^{-2|t|}$ *(0.3 puntos)*,

   b) $h(t) = e^{2t}u(t)$ *(0.3 puntos)*,

   c) $h(t) = u(t+1) - 2u(t-1)$ *(0.3 puntos)*,

   d) $h(t) = 3\delta(t)$ *(0.3 puntos)*,

   e) $h[n] = 2^n u[-n]$ *(0.3 puntos)*.

2. Una señal continua $x(t)$ está limitada en banda al rango $|\omega| < 5\pi$. Esta señal se contamina aditivamente por una señal sinusoidal de amplitud A y frecuencia angular 120π, de forma que $s(t) = x(t) + A\,\mathrm{sen}(120\pi t)$. La señal contaminada $s(t)$ se muestrea a la frecuencia angular $\omega_s = 13\pi$.

   ¿A qué frecuencia angular —en radianes por segundo— aparece la interferencia sinusoidal tras el muestreo? *(1.5 puntos)*.

3. Dada una secuencia discreta $x[n]$, se define la secuencia expandida

$$x_{(\uparrow L)}[n] = \begin{cases} x[n/L], & \text{si } n \text{ es múltiplo de } L, \\ 0, & \text{si no lo es.} \end{cases}$$

   La secuencia $x_0[n] = x[\mathrm{int}(n/L)]$, donde $\mathrm{int}(w)$ es la parte entera de w —el mayor entero menor o igual que w—, puede expresarse como $x_0[n] = x_{(\uparrow L)}[n] * h_0[n]$, donde

$$h_0[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < L, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   Observe que $x_0[n]$ es el análogo discreto del retenedor de orden cero —$x_0[n]$ se obtiene a partir de $x[n]$ repitiendo cada valor L veces—. El proceso de interpolación se completa aplicando a $x_0[n]$ un filtro con respuesta frecuencial $H(e^{j\omega})$.

   a) Exprese $X_0(e^{j\omega})$ en términos de $X(e^{j\omega})$ y de $H_0(e^{j\omega})$. Dibuje $|X_0(e^{j\omega})|$ suponiendo $L = 4$ y

$$x[n] = \frac{\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{4}n}{\pi n},$$

   (1 punto).

b) Sea $X(e^{j\omega})$ una señal periódica de periódo 2π, cuyo periódo principal es

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 - \frac{|\omega|}{W}, & |\omega| \leq W, \\ 0, & W < |\omega| < \pi. \end{cases}$$

Especifique las restricciones sobre $H(e^{j\omega})$ de forma que se obtenga interpolación ideal en los casos

1) $L = 2$ y $W = 3\pi/4$ *(0.5 puntos)*,
2) $L = 4$ y $W = 3\pi/4$ *(0.5 puntos)*.

4. Responda a las siguientes preguntas sobre sistemas continuos:

a) Suponga un sistema con M polos ubicados en $d_k = \alpha_k + j\beta_k$ y M ceros en $c_k = -\alpha_k + j\beta_k$, $k = 1, \ldots, M$. Es decir, los ceros son simétricos a los polos con respecto al eje $j\omega$.

Demuestre que el módulo de la respuesta frecuencial de cualquier sistema que verifique esta condición es la unidad (dicho sistema se denomina *paso todo*, ya que deja pasar todas las frecuencias con ganancia unidad) *(1.5 puntos)*.

b) Considere el sistema descrito por la función de transferencia

$$H(s) = \frac{(s+2)(s-1)}{(s+4)(s+3)(s+5)}$$

Exprese $H(s)$ como la conexión en serie de dos subsistemas; de tal forma que el primero tenga un sistema inverso causal y estable, y que el segundo sea *paso todo* *(1 punto)*.

5. Los filtros causales siempre tienen una fase no nula. Una técnica para obtener fase nula a partir de un filtro causal consiste en filtrar la señal dos veces; una en la dirección normal (*forward*) y otra en la dirección inversa (*backward*). Esta operación puede describirse en términos de la entrada $x[n]$ y de la respuesta impulsiva del filtro $h[n]$ de la siguente forma. Primero se filtra la señal $x[n]$ según la dirección *forward*, obteniendo $y_1[n] = x[n] * h[n]$. Ahora se filtra $y_1[n]$ según la dirección *backward* para obtener $y_2[n] = y_1[-n] * h[n]$. La salida definitiva se consigue invirtiendo $y_2[n]$ para obtener $y[n] = y_2[-n]$. Suponga que todas las señales temporales son reales.

a) Demuestre que este conjunto de operaciones se puede representar equivalentemente por un filtro con respuesta impulsiva $h_0[n]$ —es decir, $y[n] = x[n] * h_0[n]$— y exprese $h_0[n]$ en términos de $h[n]$ *(1 punto)*.

b) Demostrar que $h_0[n]$ es una secuencia par y que la fase de la respuesta frecuencial de cualquier sistema con respuesta impulsiva par es nula *(0.5 puntos)*.

c) Demostrar que para todo polo o cero de $H(z)$ en $z = \beta$, $H_0(z)$ tiene una pareja de polos o ceros en $z = \beta$ y $z = 1/\beta$ *(1 punto)*.

Soluciones al examen de Señales y sistemas

19 de septiembre de 2001

Segundo curso de Ingeniería de Telecomunicación
Universidad de Cantabria
Luis Vielva

Ejercicio 1

	a	b	c	d	e
Memoria	s	s	s	n	s
Causal	n	s	n	s	n
Estable	s	n	n	s	s

Ejercicio 2 Si se muestrea con $\omega_s = 2\pi/T = 13\pi$, el periodo de muestreo es $T = 2/13$. La señal muestreada será

$$s[n] = s(nT) = x[n] + A \operatorname{sen}\left(120\pi \frac{2}{13} n\right) = x[n] + A \operatorname{sen} \frac{240\pi}{13} n$$
$$= x[n] + A \operatorname{sen}\left(9(2\pi) + \frac{6\pi}{13} n\right) = x[n] + A \operatorname{sen} \frac{6\pi}{13} n.$$

Es decir, la frecuencia discreta de la interferencia sinusoidal es $\Omega = 6\pi/13$ rad y por tanto, $\omega = \Omega/T = 3\pi$ rad/s.

Ejercicio 3 Si, tal y como se indica, $x_0[n] = x_{(\uparrow L)}[n] * h_0[n]$, entonces $X_0(e^{j\omega}) = X_{(\uparrow L)}(e^{j\omega}) H_0(e^{j\omega})$. Estas dos transformadas de Fourier discretas pueden calcularse como

$$H_0(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{j\omega L}}{1 - e^{j\omega}} = e^{j\omega(L-1)/2} \frac{\operatorname{sen} \frac{\omega L}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}}.$$

$$X_{(\uparrow L)}(e^{j\omega}) = \sum_n x_{(\uparrow L)}[n] e^{-j\omega n} = \sum_n x[n] e^{-j\omega n L} = X(e^{j\omega L}).$$

Por tanto, el módulo solicitado será

$$|X_0(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega L})| \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{\omega L}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right|.$$

(a) La transformada de Fourier de la secuencia $x[n]$, que puede obtenerse de las tablas, es

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{3\pi}{4}, \\ 0, & \frac{3\pi}{4} < |\omega| < \pi. \end{cases}$$

(b) Para obtener interpolación ideal, hay que eliminar las componentes que no estén centradas en el origen (o en otros múltiplos de 2π). Además, hay que aplicar una correción de magnitud y fase

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(\omega/2)}{\operatorname{sen}(\omega L/2)} e^{j\omega L/2}, & |\omega| < W/L, \\ 0, & W/L < |\omega| < 2\pi - W/L. \end{cases}$$

Si $L = 2$ y $W = 3pi/4$,

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} \dfrac{e^{j\omega}}{\cos(\omega/2)}, & |\omega| < 3\pi/8, \\ 0, & 3\pi/8 < |\omega| < 13\pi/8. \end{cases}$$

Si $L = 4$ y $W = 3\pi/4$,

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(\omega/2)}{\operatorname{sen}(2\omega)} e^{j2\omega}, & |\omega| < 3\pi/16, \\ 0, & 3\pi/16 < |\omega| < 29\pi/16. \end{cases}$$

Ejercicio 4

(a) La función de transferencia del sistema es

$$H(s) = \frac{\prod_{k=1}^{M} (s - c_k)}{\prod_{k=1}^{M} (s - d_k)} = \frac{\prod_{k=1}^{M} (s + \alpha_k - j\beta_k)}{\prod_{k=1}^{M} (s - \alpha_k - j\beta_k)}.$$

Particularizando para $s = j\omega$ se obtiene su respuesta frecuencial

$$H(j\omega) = \frac{\prod_{k=1}^{M} (\alpha_k + j(\omega - \beta_k))}{\prod_{k=1}^{M} (-\alpha_k + j(\omega - \beta_k))}.$$

Por tanto, su módulo será

$$|H(j\omega)| = \frac{\prod_{k=1}^{M} \sqrt{\alpha_k^2 + (\omega - \beta_k)^2}}{\prod_{k=1}^{M} \sqrt{\alpha_k^2 + (\omega - \beta_k)^2}} = 1.$$

(b) Los ceros de $H(s)$, que son los polos del sistema inverso, están en $s = -2$ y en $s = 1$; este último impide que el sistema inverso sea causal y estable. Multiplicando y dividiendo por $s + 1$ podemos hacer

$$H(s) = \frac{(s+2)(s-1)}{(s+4)(s+3)(s+5)} = \frac{(s+2)(s+1)}{(s+4)(s+3)(s+5)} \frac{s-1}{s+1}.$$

El primer subsistema tiene los ceros en el semiplano izquierdo, por lo que su inverso será causal y estable. El segundo subsistema, con un cero y un polo simétricos con respecto al eje imaginario, es *paso todo*.

Ejercicio 5

(a) Como $y_2[n] = y_1[-n] * h[n]$, la salida $y[n] = y_2[-n]$ puede ponerse como $y[n] = y_1[n] * h[-n] = x[n] * h[n] * h[-n]$. Por tanto, la respuesta impulsiva del sistema global es $h_0[n] = h[n] * h[-n]$.

(b) $h_0[n]$ es par, ya que $h_0[-n] = h[-n] * h[n] = h_0[n]$, en virtud de la propiedad conmutativa de la convolución. Para demostrar que la fase de la respuesta frecuencial es nula, comprobaremos que $H_0(e^{j\omega}) = H_0(e^{j\omega})^*$. La respuesta frecuencial es

$$H_0(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0[n] e^{-j\omega n},$$

por lo que su complejo conjugado es

$$H_0(e^{j\omega})^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0[n] e^{j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0[-n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0[n] e^{-j\omega n} = H_0(e^{j\omega}).$$

(c) Como $h_0[n] = h[n] * h[-n]$, entonces $H_0(z) = H(z)H(z^{-1})$. Si $H(e^{j\omega})$ tiene un polo en $z = \beta$, podremos poner

$$H(z) = \frac{z - c}{z - \beta},$$

con lo que

$$H_0(z) = \frac{z - c}{z - \beta} \frac{z^{-1} - c}{z^{-1} - \beta} = \frac{z - c}{z - \beta} \frac{z - 1/c}{z - 1/\beta}.$$

La demostración para los ceros es análoga.