E.T.S.I.I. y de Telecomunicación, UC
Ingeniería de Telecomunicación
13 de septiembre de 2003

Señales y sistemas, 2º Curso (tiempo: 4h)

Apellidos:	P1
Nombre:	P2
DNI:	P3
Firma:	P4
	P5
	T

Lab.	Compañero
Lab1/1	
Lab1/2	
Lab2/1	
Lab2/2	
Lab3	

1. Supón que conoces la siguiente información sobre una señal continua $x(t)$ de periodo $T = 3$ y coeficientes de su serie de Fourier $a[k]$:

$$a[k] = a[k+2], \quad a[k] = a[-k], \quad \int_{-0,5}^{0,5} x(t)\,dt = 1, \quad \int_{0,5}^{1,5} x(t)\,dt = 2.$$

Calcular y dibujar $x(t)$ *(2 puntos).*

2. Responde a las siguientes preguntas:

   I) Considera un sistema S cuya relación entrada–salida es

$$y[n] = x[n](g[n] + g[n-1]).$$

   Indicar si el sistema es o no invariante en el tiempo en los siguientes casos *(0.5 puntos)*:

   a) Si $g[n] = 1$.
   b) Si $g[n] = n$.
   c) Si $g[n] = 1 + (-1)^n$.

   II) Sea un sistema LTI cuya respuesta al impulso es

$$h[n] = (n+1)\alpha^n u[n], \qquad \text{con } |\alpha| < 1.$$

   Calcular la respuesta del sistema al escalón unitario $u[n]$ *(0.5 puntos)*.

$$\text{Sugerencia, } \frac{d}{d\alpha}\sum_{k=0}^{N+1}\alpha^k = \sum_{k=1}^{N+1} k\alpha^{k-1}.$$

3. Considera el sistema realimentado negativamente de la siguiente figura:

$x[n]$ $+$ $+$ $-$ $e[n]$ z^{-1} $y[n]$

Suponiendo que $y[n] = 0$ si $n < 0$, dibuja la salida $y[n]$

I) cuando $x[n] = \delta[n]$ *(0.5 puntos).*

II) cuando $x[n] = u[n]$ *(0.5 puntos).*

4. Supón que pides un prestamo de 100000 euros a un banco que pagarás en cuotas mensuales iguales de D euros. El interés, que se calcula mensualmente, es del 6 % anual sobre la cantidad que se debe al banco en cada momento.

   I) Supongamos que el crédito se solicita en el mes 0 y que se empieza a pagar mensualmente en el mes 1. Si denominamos $y[n]$ a la cantidad que se debe tras el n-ésimo mes, demostrar que $y[n]$ satisface una ecuación en diferencias, con la condición inicial $y[0] = 100000$ *(1 punto)*.

   II) Resolver la ecuación en diferencias para obtener $y[n]$ para $n \geq 0$ *(0.75 puntos)*.

   III) Si se pretende pagar el crédito en 20 años, tras 240 pagos, calcular el importe de la cuota mensual que debe pagarse. ¿Cuál es la cantidad total pagada al banco? *(0.25 puntos)*

5. Considera un sistema causal y estable con respuesta al impulso $h(t) \in \mathbb{R}$ y función de transferencia $H(s)$. Se sabe que $H(s)$ es racional, uno de sus polos está en $-1+j$, uno de sus ceros está en $3+j$, y tiene exactamente dos ceros en el infinito. Para cada una de las siguientes afirmaciones, determinar si es verdad, si es mentira, o si no hay suficiente información para decidir sobre su veracidad. Razona tus respuestas *(2 puntos)*:

   I) $h(t)e^{-3t}$ es integrable en valor absoluto.
   II) La ROC de $H(s)$ es $\Re(s) > -1$.
   III) La ecuación diferencial que relaciona la entrada $x(t)$ con la salida $y(t)$ del sistema puede escribirse de forma que todos sus coeficientes sean reales.
   IV) $\lim_{s\to\infty} H(s) = 1$.
   V) $H(s)$ tiene al menos cuatro polos.
   VI) $H(j\Omega) = 0$ para al menos un valor finito de Ω.
   VII) Si la entrada al sistema es $e^{3t}\sin(t)$, entonces su salida es $e^{3t}\cos(t)$.

Soluciones al examen de Señales y sistemas

septiembre de 2003

Segundo curso de Ingeniería de Telecomunicación
Universidad de Cantabria
Luis Vielva

Ejercicio 1

(i) Como $a[k] = a[-k]$, entonces $x(t) = x(-t)$.

(ii) Como $a[k] = a[k+2]$, la propiedad de desplazamiento frecuencial implica,

$$x(t) = x(t)e^{-j\frac{4\pi}{3}t} \qquad \Longrightarrow \qquad e^{-j\frac{4\pi}{3}t} = 1,$$

lo que sólo se verifica para $t = 0, \pm 1{,}5, \pm 3, \pm 4{,}5, \dots$, que han de ser por tanto los únicos instantes no nulos de $x(t)$.

(iii) Como $\int_{-0,5}^{0,5} x(t)\,dt = 1$, necesariamente $x(t) = \delta(t)$ para $-0{,}5 \leq t \leq 0{,}5$.

(iv) Como $\int_{0,5}^{1,5} x(t)\,dt = 2$, necesariamente $x(t) = 2\delta(t-1{,}5)$ para $0{,}5 \leq t \leq 1{,}5$.

Por lo tanto, como sabíamos que el periodo es $T = 3$, $x(t)$ es un tren de deltas de Dirac

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-3k) + 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-1{,}5-3k).$$

Ejercicio 2

(i) Calculamos la relación entrada–salida sustituyendo $g[n]$ en los tres casos:

a) $y[n] = 2x[n]$, invariante en el tiempo.

b) $y[n] = (2n-1)x[n]$, no invariante porque $y[n-N_0] \neq (2n-1)x[n-N_0]$.

c) $y[n] = (1+(-1)^n + 1 + (-1)^{n-1})x[n] = 2x[n]$, invariante.

(ii) La respuesta al escalón unitario es

$$\begin{aligned} s[n] = h[n] * u[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n]u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k+1)\alpha^k u[k]u[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\alpha^k u[n-k] = [n \geq 0]\sum_{k=0}^{n}(k+1)\alpha^k. \end{aligned}$$

Para sumar esta serie, hacemos uso de la sugerencia

$$\frac{d}{d\alpha}\sum_{k=0}^{N+1}\alpha^k = \sum_{k=1}^{N+1}k\alpha^{k-1} = \sum_{k=0}^{N}(k+1)\alpha^k.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} s[n] &= [n\geq 0]\frac{d}{d\alpha}\sum_{k=0}^{n+1}\alpha^k = [n\geq 0]\frac{d}{d\alpha}\frac{1-\alpha^{n+2}}{1-\alpha} \\ &= \left(\frac{1-\alpha^{n+2}}{(1-\alpha)^2} - \frac{(n+2)\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right)u[n]. \end{aligned}$$

Ejercicio 3 El sistema verifica las siguientes relaciones: $y[n] = e[n-1]$, $e[n] = x[n]-y[n]$. Si, como dice el enunciado, suponemos $y[n] = 0$ para $n < 0$, podemos construir una tabla para cada entrada; es decir, para $x[n] = \delta[n]$ y para $x[n] = u[n]$:

n	$x[n]$	$y[n]$	$e[n]$
-1	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	-1
2	0	-1	1
3	0	1	-1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

n	$x[n]$	$y[n]$	$e[n]$
-1	0	0	0
0	1	0	1
1	1	1	0
2	1	0	1
3	1	1	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Ejercicio 4

I) Lo que debemos en el mes n, $y[n]$, ha de ser igual a lo que debíamos en el mes anterior ($y[n-1]$), más el interés de dicha cantidad durante el mes (un interés del 6 % corresponde a un 0,5 % mensual), menos la cuota pagada D:

$$y[n] = y[n-1] + 0{,}005y[n-1] - D = 1{,}005y[n-1] - D.$$

Nada más pedir el crédito, en el mes 0, debemos toda la cantidad solicitada, luego $y[0] = 100000$.

II) Podemos resolver la ecuación en diferencias bien en el dominio del tiempo o aplicando la transformada z. Por ejemplo, en el dominio del tiempo, la solución de la homogénea y la particular de la completa son respectivamente $y_h[n] = A1{,}005^n$ e $y_p[n] = 200D$. Por lo tanto $y[n] = A1{,}0005^n + 200D$. Imponiendo la condición inicial $y[0] = 100000$, tenemos $A = 100000 - 200D$, con lo que

$$y[n] = (100000 - 200D)1{,}005^n + 200D.$$

III) Si pagamos en 240 meses,

$$0 = y[240] = (100000 - 200D)1{,}005^{240} + 200D,$$

con lo que $D = 716{,}43$ euros al mes, y la cantidad total pagada al banco es de 171943,45 euros.

Ejercicio 5 Como $h(t)$ es real, sus polos y ceros deben ocurrir en pares complejos conjugados. Como $H(s)$ tiene exactamente dos ceros en infinito, $H(s)$ tiene al menos dos polos finitos más. En caso de que $H(s)$ tenga más de cuatro polos, entonces tendrá un cero en algún punto por cada polo adicional. Como $h(t)$ es causal y estable, todos los polos de $H(s)$ deben residir en el semiplano izquierda, y la ROC debe incluir al eje imaginario.

I) Cierto, ya que $g(t) = h(t)e^{-3t}$ tiene como transformada de Laplace $G(s) = H(s+3)$. La ROC de $G(s)$ será la misma que la de $H(s)$ desplazada 3 unidades a la izquierda, por lo que también contendrá al eje imaginario.

II) No hay suficiente información. No sabemos dónde está el polo más a la derecha de $H(s)$ (aunque sabemos que está en el semiplano izquierdo).

III) Cierto. como $H(s)$ es racional, puede expresarse como el cociente de dos polinomios en s. Además, como $h(t)$ es real, los coeficientes de $H(s)$ también

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)}.$$

La ecuación diferencial es la transformada inversa de Laplace de $Y(s)Q(s) = X(s)P(s)$, que, por lo que acabamos de decir, tiene que tener necesariamente coeficientes reales.

IV) Falso. Sabemos que $H(s)$ tiene dos ceros en el infinito, por tanto $\lim_{s\to\infty} H(s) = 0$.

V) Cierto. Ver la discusión al comienzo del problema.

VI) No hay información suficiente. Los posibles ceros adicionales de $H(s)$ pueden estar en cualquier lugar. Ver la discusión al comienzo del problema.

VII) Falso. Podemos expresar la entrada como

$$3^{3t}\sin t = \frac{1}{2j}e^{(3+j)t} - \frac{1}{2j}e^{(3-j)t}.$$

Tanto $e^{(3+j)t}$ como $e^{(3-j)t}$ son funciones propias del sistema LTI, por tanto sus salidas asociadas serán $H(3+j)e^{(3+j)t}$ y $H(3-j)e^{(3-j)t}$. Como $H(s)$ tiene ceros en $s = 3 \pm j$, la salida del sistema debe ser cero.