E.T.S.I.I. y de Telecomunicación, UC
Ingeniería de Telecomunicación
28 de enero de 2004

Señales y sistemas, 2º Curso (tiempo: 4h)

Apellidos:	P1
Nombre:	P2
DNI:	P3
Firma:	P4
	P5
	T

1. Calcular la respuesta frecuencial $H(j\Omega)$, y decir en cada caso si se trata de un filtro paso alto, paso bajo, o paso banda, de: *(1 punto)*

   I) Un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = \delta(t) - e^{-t}u(t)$.

   II) Un sistema LTI cuya función de transferencia es $H(s) = \frac{s}{s+1}$.

   III) Un sistema LTI descrito por la ecuación diferencial

$$\dot{y}(t) + y(t) = \dot{x}(t).$$

2. Un sistema causal tiene respuesta al impulso $h_a[n] = a^n u[n]$ y un sistema anticausal tiene respuesta al impulso $h_b[n] = b^n u[-n-1]$, con $|a| < |b|$. Si se conectan ambos sistemas en serie,

   I) Calcular la función de transferencia, $H(z)$, del nuevo sistema y su región de convergencia. *(0.5 puntos)*

   II) Calcular la respuesta al impulso $h[n]$ del nuevo sistema a partir de la $H(z)$ del apartado anterior. *(0.5 puntos)*

   III) Calcular la respuesta al impulso $h[n]$ del nuevo sistema trabajando directamente con $h_a[n]$ y $h_b[n]$ en el dominio del tiempo. *(0.5 puntos)*

3. La salida $v(t)$ de un sistema LTI viene descrita por la siguiente ecuación diferencial

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 2y(t) = \cos(t + \pi/6).$$

Calcular la respuesta estacionaria (la que sigue existiendo cuando han desaparecido los transitorios debidos a posibles soluciones que se amortiguan exponencialmente).[1] *(1.5 puntos)*

[1]Recordemos que $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$ y $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$.

4. Un sistema tiene dos entradas ($f(t)$ y $g(t)$) y dos salidas ($v(t)$ y $w(t)$). La relación entre las entradas y las salidas está descrita por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\begin{aligned} 3\ddot{v}(t) + 2\dot{v}(t) + v(t) - 2w(t) &= 5f(t) - 7g(t), \\ 2\ddot{w}(t) - 3\dot{w}(t) + 5v(t) &= 3g(t). \end{aligned}$$

Se pretende describir el sistema global mediante su representación mediante variables de estado

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}(t) &= \mathbf{AQ}(t) + \mathbf{BX}(t), \\ \mathbf{Y}(t) &= \mathbf{CQ}(t) + \mathbf{DX}(t); \end{aligned}$$

donde $\mathbf{Q}(t)$ es el vector de variables de estado, $\mathbf{X}(t)$ es el vector de las entradas e $\mathbf{Y}(t)$ es el vector de las salidas, definidos estos últimos por

$$\mathbf{X}(t) \equiv \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}(t) \equiv \begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix}.$$

I) ¿Cuántas variables de estado son necesarias? ¿Cuáles son las dimensiones de las matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$? *(0.5 puntos)*

II) Supongamos que escogemos $q_1(t) = v(t)$ y $q_2(t) = w(t)$. Supongamos además que, en caso de necesitarse más variables de estado, se utilizan variables de estado que sean derivadas de variables de estado previamente definidas. Calcular cuánto valen las matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$. *(1.5 puntos)*

5. Supón que queremos diseñar un generador de ondas sinusoidales continuas capaz de producir señales de cualquier frecuencia angular que satisfaga $\Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_2$, donde Ω_1 y Ω_2 son números reales positivos.

   Nuestro diseño será como sigue: dispondremos de un vector precalculado con las muestras de un coseno discreto de periodo N; es decir, tendremos almacenados los N números

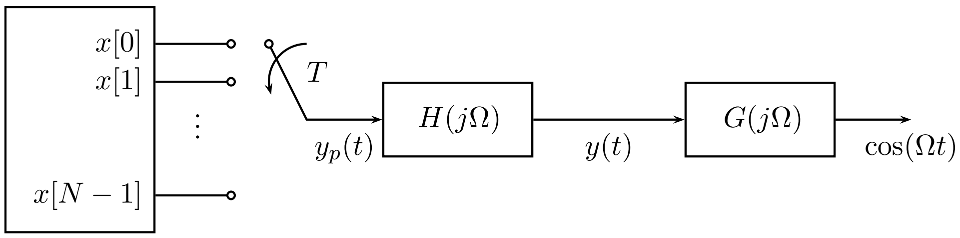
$$x[k] = \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right), \quad k = 0, \ldots, N-1.$$

   Cada T segundos producimos un impulso escalado por un valor de $x[k]$, recorriendo los valores $k = 0, \ldots, N-1$ de forma cíclica (cuando acabemos con $N-1$ volvemos a comenzar con 0)

$$y(kT) = x[k \text{ módulo } N] = \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right).$$

   De tal forma que la señal a la salida del conmutador será

$$y_p(t) = \sum_{k=\langle N\rangle} \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \delta(t - kT).$$



   I) Demostrar que, seleccionando T, podemos ajustar la frecuencia del coseno que se está muestreando. Es decir, demostrar que

$$y_p(t) = (\cos(\Omega_0 t)) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT),$$

   donde $\Omega_0 = 2\pi/(NT)$. Calcular el rango de valores de T de tal forma que $y_p(t)$ pueda representar muestras de un coseno con una frecuencia que varía en el rango deseado $\Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_2$. *(0.5 puntos)*

   II) Dibujar $Y_p(j\Omega)$. Tras tener la señal muestreada $y_p(t)$, se aplica el filtro $H(j\Omega)$, que es un filtro paso bajo ideal de frecuencia de corte Ω_c; es decir, $H(j\Omega) = [|\Omega| < \Omega_c]$. Calcular el rango de Ω_c para que $y(t)$ sea un coseno continuo en el rango de frecuencias deseado. *(0.5 puntos)*

   III) Calcular el menor valor de N admisible en el diseño para que $y(t)$ sea un efectivamente un coseno en el rango $\Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_2$. *(0.5 puntos)*

   IV) La amplitud de $y(t)$ variará, dependiendo del valor de Ω escogido dentro del rango deseado. Por lo tanto, debemos diseñar un sistema $G(j\Omega)$ que normalize la señal a amplitud unidad. Calcular la función de transferencia $G(j\Omega)$ de dicho equalizador. *(0.5 puntos)*

Soluciones al examen de Señales y sistemas

febrero de 2004

Segundo curso de Ingeniería de Telecomunicación
Universidad de Cantabria
Luis Vielva

Ejercicio 1

I) La función de transferencia es

$$H(s) = 1 - \frac{1}{s+1} = \frac{s}{s+1}.$$

Por lo que la respuesta en frecuencia es

$$H(j\Omega) = H(s)|_{s=j\Omega} = \frac{j\Omega}{1+j\Omega}.$$

el módulo de la respuesta en frecuencia es

$$|H(j\Omega)| = \frac{|\Omega|}{\sqrt{1+\Omega^2}},$$

que verifica

$$|H(0)| = 0, \quad \lim_{\Omega\to\infty} |H(j\Omega)| = 1,$$

por lo que se trata de un filtro paso alto.

II) Idéntico al apartado anterior, ya que la $H(s)$ pedida es la calculada antes.

III) Aplicando transformada de Laplace a la ecuación diferencial

$$\dot{y}(t) + y(t) = \dot{x}(t),$$

obtenemos $Y(s)(s+1) = sX(s)$, por lo que

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s}{s+1},$$

y estamos en el mismo caso que los dos anteriores.

Ejercicio 2

I) Las funciones de transferencia de los subsistemas causal y anticausal son

$$H_a(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad H_b(z) = \frac{-1}{1-bz^{-1}},$$

cuyas regiones de convergencia son $|z| > |a|$ y $|z| < |b|$ respectivamente. La conexión en serie de los subsistemas tiene como función de transferencia el producto

$$H(z) = H_a(z)H_b(z) = \frac{-1}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} = \frac{-z^2}{(z-a)(z-b)},$$

cuya ROC es la región $|a| < |z| < |b|$.

II) Para calcular la respuesta al impulso, descomponenmos $H(z)$ en fracciones simples

$$H(z) = \frac{A}{1 - az^{-1}} + \frac{B}{1 - bz^{-1}},$$

de donde se obtiene $A + B = 1$ y $-Ab - aB = 0$, cuya solución es $A = a/(b - a)$, $B = -b/(b - a)$. Por lo tanto

$$H(z) = \frac{1}{b - a}\left(a\frac{1}{1 - az^{-1}} - b\frac{1}{1 - bz^{-1}}\right),$$

y la respuesta al impulso es su transformada inversa

$$h[n] = \frac{1}{b - a}(aa^n u[n] + bb^n u[-n - 1]) = \frac{1}{b - a}(a^{n+1}u[n] + b^{n+1}u[-n - 1]).$$

Ejercicio 3 Como la ecuación diferencial es

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 2y(t) = \cos(t + \pi/6), \tag{1}$$

la ecuación característica es $\alpha^2 + 2\alpha + 2 = 0$, cuyas raíces son $\alpha = -1 \pm j$. Teniendo en cuenta que la entrada es un coseno de pulsación $\Omega = 1$, la solución completa es de la forma

$$y^c(t) = Ae^{(-1+j)t} + Be^{(-1-j)t} + C\cos(t + D).$$

Esta solución tiene dos términos que se amortiguan cuando t crece (los dos términos que multiplican a las exponenciales crecientes) y un término que permanece y es la respuesta estacionaria (el término en coseno). Por lo tanto, la respuesta estacionaria es de la forma

$$y(t) = C\cos(t + D).$$

Esta solución —que en realidad es la solución particular de la completa— debe ser solución de la ecuación diferencial. Calculamos sus derivadas

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= -C\sin(t + D),\\ \ddot{y}(t) &= -C\cos(t + D),\end{aligned}$$

y sustituimos en (1)

$$-C\cos(t + D) - 2C\sin(t + D) + 2C\cos(t + D) = \cos(t + \pi/6).$$

Utilizando las relaciones trigonométricas propuestas,

$$-C(\cos t\cos D - \sin t\sin D) - 2C(\sin t\cos D + \cos t\sin D) + 2C(\cos t\cos D - \sin t\sin D) = \cos t\cos\frac{pi}{6} - \sin t\sin\frac{\pi}{6}.$$

De donde, igualando términos en seno y coseno obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}-C\cos D - 2C\sin D + 2C\cos D &= \cos\frac{\pi}{6},\\ C\sin D - 2C\cos D - 2C\sin D &= -\sin\frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

Que puede simplificarse a

$$C(\cos D - 2\sin D) = \cos\frac{\pi}{6},$$
$$C(-\sin D - 2\cos D) = -\sin\frac{\pi}{6}.$$

Obtenemos por fin

$$\tan D = -\frac{2 - \tan\pi/6}{1 + 2\tan\pi/6} \quad \Rightarrow \quad D = -0{,}5835.$$

Y sustituyendo, $C = 0{,}4472$.

Ejercicio 4

I) Como tenemos dos ecuaciones de segundo orden, necesitamos un total de cuatro variables de estado. Sabemos por tanto que $\mathbf{X}(t)$ es 2×1, que $\mathbf{Y}(t)$ es 2×1 y que $\mathbf{Q}(t)$ es 4×1. Por lo tanto, las dimensiones de las otras cuatro matrices son:

$$\mathbf{A} : 4\times 4, \quad \mathbf{B} : 4\times 2, \quad \mathbf{C} : 2\times 4, \quad \mathbf{D} : 2\times 2.$$

II) Si tomamos, como se indica, $q_1 = v$ y $q_2 = w$, podemos tomar las otras dos variables de estado necesarias como $q_3 = \dot{q}_1 = \dot{v}$ y $q_4 = \dot{q}_2 = \dot{w}$. Si sustituimos estas variables de estado en el sistema de ecuaciones diferenciales tendremos

$$3\dot{q}_3 + 2q_3 + q_1 - 2q_2 = 5f - 7g,$$
$$2\dot{q}_4 - 3q_4 + 5q_1 = 3g.$$

De donde se deduce inmediatamente la ecuación de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 2/3 & -2/3 & 0 \\ -5/2 & 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 5/3 & -7/3 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

La ecuación de salida se deduce inmediatamente de la elección de las variables de estado q_1 y q_2

$$\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5

I) Si partimos de la condición dada de $\Omega_0 = 2\pi/(NT)$ y de la expresión dada

$$y_p(t) = \sum_{k=\langle N\rangle} \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\delta(t - kT),$$

tenemos

$$y_p(t) = \sum_{k=\langle N\rangle} \cos(\Omega_0 kT)\delta(t - kT) = \sum_{k=\langle N\rangle} \cos(\Omega_0 t)\delta(t - kT) = \cos(\Omega_0 t) \sum_{k=\langle N\rangle} \delta(t - kT).$$

Como queríamos demostrar. El rango de valores de T necesarios para tener cosenos muestreados en el rango frecuencial $\Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_2$ será $T_1 \leq T \leq T_2$, donde

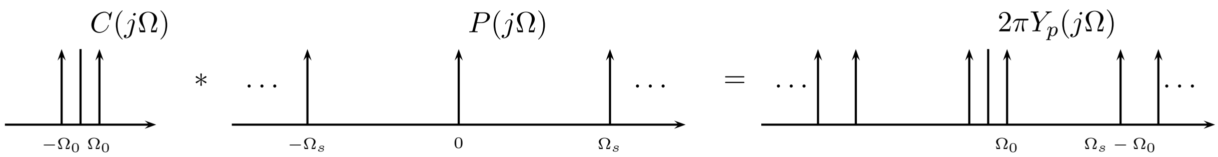
$$T_1 = \frac{2\pi}{N\Omega_2}, \qquad T_2 = \frac{2\pi}{N\Omega_1}.$$

II) Como $y_p(t)$ es el producto de un coseno continuo y un tren de deltas de Dirac, su transformada de Fourier será la convolución entre sus transformadas de Fourier respectivas. Si denominamos $c(t) = \cos(\Omega_0 t)$, y $p(t)$ al tren de pulsos

$$y_p(t) = c(t)p(t) \qquad \Rightarrow \qquad Y_p(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} C(j\Omega) * P(j\Omega),$$

donde

$$P(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=\langle N \rangle} \delta(\Omega - k\Omega_s), \qquad \Omega_s = \frac{2\pi}{T}.$$



Obviamente, para poder recuperar el coseno, el filtro paso bajo deberá dejar pasar su mayor frecuencia posible, Ω_2, y no dejar pasar la componente $\Omega_s - \Omega_0$. Por lo tanto, la frecuencia de corte del filtro $H(j\Omega)$ debe satisfacer

$$\Omega_0 < \Omega_c < \Omega_s - \Omega_0.$$

III) Como $\Omega_0 = 2\pi/(NT)$ y $\Omega_2 = 2\pi/T$, se verifica que $\Omega_s = N\Omega_0$. Para que $y(t)$ sea realmente un coseno, no debe producirse aliasing, es decir debe verificarse $\Omega_0 < \Omega_s - \Omega_0$; o, equivalentemente

$$\Omega_0 < N\Omega_0 - \Omega_0 \qquad \Rightarrow \qquad N > 2.$$

Por lo tanto, el menor valor admisible para N es 3.

IV) Como el área de las deltas de Dirac del tren de impulsos es $2\pi/T$ y la convolución elimina el factor 2π, el filtro equalizador $G(j\Omega)$ debe eliminar el factor $1/T$ restante

$$G(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| \leq \Omega_c, \\ \text{arbitrario}, & |\Omega| > \Omega_c. \end{cases}$$