E.T.S.I.I. y de Telecomunicación, UC
Ingeniería de Telecomunicación
13 de septiembre de 2004

Señales y sistemas, 2º Curso (tiempo: 4h)

Apellidos:	P1
Nombre:	P2
DNI:	P3
Firma:	P4
	P5
	T

1. Resuelve los siguientes problemas:

   I) Calcular la energía de la señal *(0.5 puntos)*

   $$v(t) = \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t}.$$

   II) Demostrar que la transformada de Fourier de la señal gaussiana de varianza σ^2

   $$f(t) = e^{-t^2/(2\sigma^2)},$$

   es otra señal Gaussiana. ¿Cuál es la varianza de la gaussiana frecuencial? Sugerencia: utilizar las propiedades de derivada temporal y frecuencial de la transformada de Fourier. *(1 punto)*

2. Un sistema LTI causal está descrito por la ecuación integro-diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) + 25\int_0^t y(\tau)\,d\tau = x(t),$$

donde $K \in \mathbb{R}$.

I) Expresar la ecuación característica en términos de K y encontrar una expresión para las raíces características en función de K. *(0.5 puntos)*

II) ¿Para qué valores de K son reales las raíces? *(0.25 puntos)*

III) Encontrar el rango de valores de K para los que el sistema es estable. *(0.25 puntos)*

IV) Calcular el valor de K para el que la respuesta natural sería una oscilación sinusoidal no amortiguada. *(0.25 puntos)*

3. La respuesta al impulso de un filtro de Butterworth de primer orden es $h(t) = e^{-t}u(t)$. ¿Qué atenuación —en dB— introduce a los tres primeros armónicos —la frecuencia fundamental y las dos siguientes— de la serie de Fourier de una señal periódica de periodo $T = 2\pi$ segundos? *(1 punto)*

4. Calcular la transformada de Fourier de $y(t) = \sin(\Omega_0 t)u(t)$ como la convolución de las transformadas de Fourier de cada uno de sus factores.[1] *(1.25 puntos)*

---

[1] $U(j\Omega) = \frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$.

5. Un sistema LTI está descrito por la ecuación diferencial[2]

$$\dddot{y}(t) + 6\ddot{y}(t) + 11\dot{y}(t) + 6y(t) = \dot{x}(t) + 5x(t).$$

El sistema se supone que se encuentra inicialmente en reposo (condiciones iniciales nulas sobre la salida y sus derivadas).

I) Calcular la respuesta frecuencial $H(j\Omega)$. *(0.5 puntos)*

II) Calcular la respuesta al impulso, $h(t)$, mediante la transformada de Laplace. *(0.5 puntos)*

III) Calcular la respuesta a la entrada $x(t) = 6e^{-4t}u(t)$ mediante la transformada de Laplace. *(1 punto)*

IV) Calcular la respuesta a la entrada $x(t) = 6e^{-4t}u(t)$ resolviendo la ecuación diferencial en el dominio del tiempo. *(1 punto)*

[2] $-1 + 6 - 11 + 6 = 0$.

Soluciones al examen de Señales y sistemas

septiembre de 2004

Segundo curso de Ingeniería de Telecomunicación
Universidad de Cantabria
Luis Vielva

Ejercicio 1

I) La relación de Parseval permite calcular la energía de una señal tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\Omega)|^2 \, d\Omega.$$

Como conocemos el par transformado

$$\frac{\operatorname{sen}(\Omega_m t)}{\pi t} \longleftrightarrow [|\Omega| \leq \Omega_m],$$

la transformada de Fourier de la señal problema es

$$X(j\Omega) = [|\Omega| \leq 4\pi].$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} 8\pi = 4 \text{ Julios}.$$

II) Si $f(t) = e^{-t^2/(2\sigma^2)}$, entonces

$$\dot{f}(t) = \frac{-2t}{2\sigma^2} e^{-t^2/(2\sigma^2)} = \frac{-t}{\sigma^2} f(t).$$

Según la propiedad de derivada temporal:

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(j\Omega) \qquad \Rightarrow \qquad \dot{f}(t) = \frac{-t}{\sigma^2} f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\Omega F(j\Omega).$$

Según la propiedad de derivada frecuencial:

$$\frac{-t}{\sigma^2} f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{-1}{\sigma^2} j \frac{d}{d\Omega} F(j\Omega).$$

Si las señales temporales de las dos últimas ecuaciones coinciden, también deben hacerlo sus transformadas de Fourier; por tanto

$$\frac{-j}{\sigma^2} \frac{d}{d\Omega} F(j\Omega) = j\Omega F(j\Omega);$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{d}{d\Omega} F(j\Omega) = -\Omega \sigma^2 F(j\Omega).$$

Esta ecuación diferencial es análoga a la que verifican $f(t)$ y $\dot{f}(t)$; por lo tanto su solución es

$$F(j\Omega) = e^{-\Omega^2 \sigma^2 / 2},$$

una gaussiana de varianza $1/\sigma^2$.

Ejercicio 2

I) La ecuación integro-diferencial puede convertirse en la ecuación diferencial

$$\ddot{y}(t) + K\dot{y}(t) + 25y(t) = \dot{x}(t),$$

cuya ecuación característica es $\alpha^2 + K\alpha + 25 = 0$, y sus raíces son

$$\alpha_{1,2} = \frac{-K \pm \sqrt{K^2 - 100}}{2}.$$

II) Las raíces son reales sin $K^2 > 100$, o lo que es lo mismo $|K| \geq 10$.

III) La función de transferencia es

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + Ks + 25},$$

cuyos polos están en

$$s_{1,2} = \frac{-K \pm \sqrt{K^2 - 100}}{2}.$$

Para que el sistema sea estable, la parte real de las raíces debe ser negativa, lo que implica $K > 0$.[3]

IV) Para que la solución sea sinusoidal no amortiguada, las raíces deben ser imaginarias conjugadas, luego $K = 0$.

Ejercicio 3 La transformada de Laplace del filtro es $H(s) = 1/(s+1)$, por lo que su respuesta en frecuencia es

$$H(j\Omega) = H(s)|_{s=j\Omega} = \frac{1}{1 + j\Omega},$$

cuyo módulo es

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}}.$$

Si tenemos una señal periódica a su entrada de periodo $T = 2\pi$ ($\Omega_0 = 2\pi/T = 1$), a la salida estará afectada por una ganancia $|H(j\Omega)|$. Los tres primeros armónicos de la serie de Fourier de la señal periódica se encuentran a $\Omega = \Omega_0, 2\Omega_0, 3\Omega_0$. Por lo tanto

$$|H(j)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ dB}, \quad |H(2j)| = \frac{1}{\sqrt{5}} = -6{,}99 \text{ dB}, \quad |H(3j)| = \frac{1}{\sqrt{10}} = -10 \text{ dB}.$$

Es decir, la atenuación es de 3, 6,99 y 10 dB respectivamente.

[3] Nunca es posible que $\sqrt{K^2 - 100} > K$.

Ejercicio 4 Conocemos por las propiedades de la transformada de Fourier que

$$x(t)y(t) = \frac{1}{2\pi} X(j\Omega) * Y(j\Omega).$$

En nuestro caso, podemos poner $y(t) = s(t)u(t)$, donde $s(t) = \sin(\Omega_0 t)$ y

$$S(j\Omega) = \frac{\pi}{j}(\delta(\Omega - \Omega_0) - \delta(\Omega + \Omega_0)), \quad U(j\Omega) = \frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
Y(j\Omega) &= \frac{\pi}{2\pi j}\left(\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right) * (\delta(\Omega - \Omega_0) - \delta(\Omega + \Omega_0)) \\
&= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{j(\Omega - \Omega_0)} - \frac{1}{j(\Omega + \Omega_0)} + \pi\delta(\Omega - \Omega_0) - \pi\delta(\Omega + \Omega_0)\right) \\
&= \frac{1}{2j}\left(\frac{j\Omega + j\Omega_0 - j\Omega + j\Omega_0}{-(\Omega^2 - \Omega_0^2)} + \pi\delta(\Omega - \Omega_0) - \pi\delta(\Omega + \Omega_0)\right) \\
&= \frac{\Omega_0}{\Omega_0^2 - \Omega^2} + \frac{j\pi}{2}(\delta(\Omega + \Omega_0) - \delta(\Omega - \Omega_0)).
\end{aligned}$$

Ejercicio 5

I) Si calculamos la transformada de Laplace bilateral de la ecuación diferencial

$$Y(s)(s^3 + 6s^2 + 11s + 6) = X(s)(s + 5),$$

obtenemos la función de transferencia y, a partir de ella, la respuesta en frecuencia

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s + 5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}, \qquad H(j\Omega) = H(s)|_{s=j\Omega} = \frac{5 + j\Omega}{-j\Omega^3 - 6\Omega^2 + 11j\Omega + 6}.$$

II) Para obtener la respuesta al impulso, descomponemos la función de transferencia en fracciones simples. Para ellos hayamos las raíces del denominador. Este polinomio tiene —como indica la sugerencia— una raíz $s = -1$; las otras son $s = -2$ y $s = -3$. Por lo tanto

$$H(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s+3},$$

por lo que

$$h(t) = (2e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t})u(t).$$

III) Para calcular la salida cuando $x(t) = 6e^{-4t}u(t)$, calculamos la transformada de Laplace unilateral, teniendo en cuenta que $\ddot{y}(0^+) = \dot{y}(0^+) = y(0^+) = 0$, $X(s) = 6/(s + 4)$ y $x(0^+) = 6$.

$$Y(s)(s^3 + 6s^2 + 11s + 6) = \frac{6(s+5)}{s+4} - 6 = \frac{6}{s+4}.$$

Despejando $Y(s)$,

$$Y(s) = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} = \frac{1}{s+1} - \frac{3}{s+2} + \frac{3}{s+3} - \frac{1}{s+4}.$$

Por lo que la salida es

$$y(t) = (e^{-t} - 3e^{-2t} + 3e^{-3t} - e^{-4t})u(t).$$

IV) Para calcular la salida directamente en el dominio del tiempo, calculamos las raíces de la ecuación característica $\alpha^3 + 6\alpha^2 + 11\alpha + 6 = 0$, que son las mismas de antes, y añadimos el término particular debido a la entrada.

$$y(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t} + Ce^{-3t} + De^{-4t}.$$

El último de estos términos —la solución particular— debe verificar la ecuación diferencial, ya que el conjunto de los tres primeros es solución de la homogénea. Por lo tanto,

$$y_p(t) = De^{-4t}, \quad \dot{y}_p(t) = -4De^{-4t}, \quad \ddot{y}_p(t) = 16De^{-4t}, \quad \dddot{y}_p(t) = -64De^{-4t},$$

debe verificar la ecuación diferencial. Sustituyendo

$$-64D + 96D - 44D + 6D = -24 + 30 \qquad \Rightarrow \qquad D = -1.$$

Imponiendo ahora que se verifiquen las condiciones iniciales nulas

$$\begin{aligned} y(0) &= A + B + C - 1 &= 0, \\ \dot{y}(0) &= -A - 2B - 3C + &= 0, \\ \ddot{y}(0) &= A + 4B + 9C - 16 &= 0, \end{aligned}$$

se obtiene como solución $A = 1$, $B = -3$ y $C = 3$. Por lo tanto

$$y(t) = (e^{-t} - 3e^{-2t} + 3e^{-3t} - e^{-4t})u(t).$$