Señales y sistemas.

Segundo curso de Ingeniería de Telecomunicación
Universidad de Cantabria

29 de enero de 1999

1. Supongamos un sistema LTI con respuesta impulsiva
$$h(t) = \delta(t - T_1) - \delta(t + T_1)$$
al que se le introduce la entrada
$$x(t) = \begin{cases} T_0 + t, & -2T_0 < t < -T_0, \\ |t|, & -T_0 < t < T_0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
donde T_0 es una cierta constante positiva.

   a) Dibujar las señales $x(t)$ y $h(t)$ y calcular gráficamente la salida del sistema. Considerar dos casos: $T_1 = 2T_0$ y $T_1 = T_0/2$. *(1 punto)*

   b) Supongamos ahora una nueva señal
   $$v(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < T_0, \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$
   Calcular el producto de convolución $x(t) * v(t)$. *(1 punto)*

2. Supongamos una secuencia $x[n]$ definida por
$$x[n] = \begin{cases} 0, & n \leq 0, \\ 1, & n = 1, \\ x[n-1] + 2x[n-2] + (-1)^n, & n \geq 2. \end{cases}$$

   a) Calcular la transformada z de $x[n]$. Representar su patrón de polos y ceros y la región de convergencia (razonando si el origen y el infinito pertenecen o no a la región de convergencia). *(2 puntos)*

   b) Deducir una expresión explícita —que no sea una relación de recurrencia— para $x[n]$.[1] ¿Existe $X(e^{j\omega})$? *(2 puntos)*

[1] En caso de no haber respondido al apartado (a) de la preguna 2, calcular la secuencia asociada a la función $X(z) = \frac{z^{-1}}{1-4z^{-2}+z^{-4}}$ si su ROC es el exterior de un círculo en el plano z.

3. Supongamos una señal $w(t)$ como la que se muestra en la figura (a), que puede considerarse nula a partir del instante de tiempo $t = T_1$. Su transformada de Fourier, la señal $W(j\omega)$ representada en la figura (b), puede considerarse que tiene una frecuencia angular máxima ω_1. Con objeto de tratar ambas señales numéricamente en un ordenador, las señales se someten a los siguientes procesos sucesivos:

   i) Se muestrea la señal $w(t)$ con un periodo Δt utilizando la señal $a(t)$ consistente en un tren de impulsos unitarios, obteniendo como resultado la señal muestreada $x(t)$.

      Representar a y x tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia. Considerar dos casos: cuando Δt es tal que no existe *aliasing* (traslape) y cuando existe un *aliasing* moderado *(1 punto).*

   ii) A continuación, se trunca en el tiempo la señal $x(t)$ utilizando una nueva señal $b(t)$ que vale uno si $|t| < T_0/2$ y cero en otro caso —el parámetro T_0 está representado en la figura (a)—, obteniendo como resultado la señal $y(t)$.

      Representar b e y tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia. *(1 punto)*

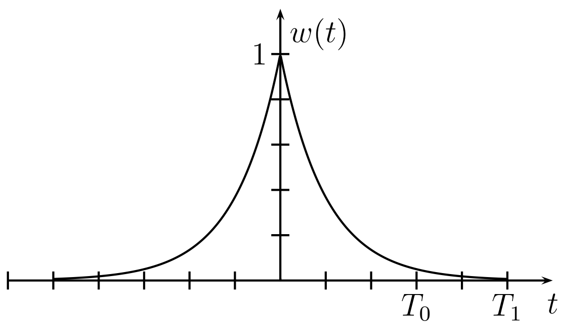
   iii) Por último, se muestrea en el dominio de la frecuencia la señal $Y(j\omega)$ mediante la señal $C(j\omega)$, un tren de impulsos separados una distancia $2\pi/T_0$ en el dominio de la frecuencia, para obtener la señal $Z(j\omega)$.

      Representar C y Z tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia. *(1 punto)*

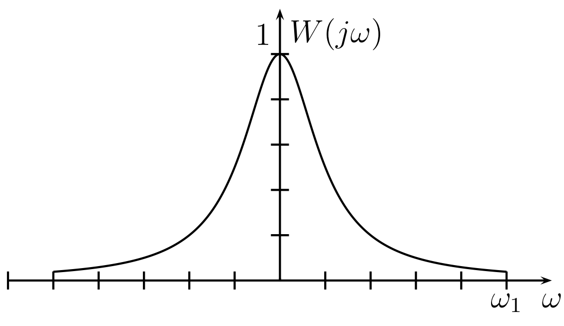
   iv) Supongamos ahora que a partir de la señal $x(t)$, la resultante del paso i), se obtiene la secuencia discreta asociada $x[n]$.

      Representar la secuencia $x[n]$ y su transformada de Fourier. *(1 punto)*

   En todos los casos, etiquetar los ejes mostrando las variables representadas en los mismos y marcar los puntos significativos (t, ω, T_1, Δt, ...).



(a)

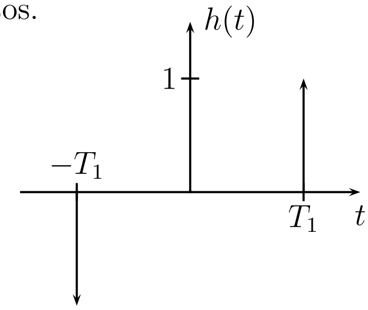


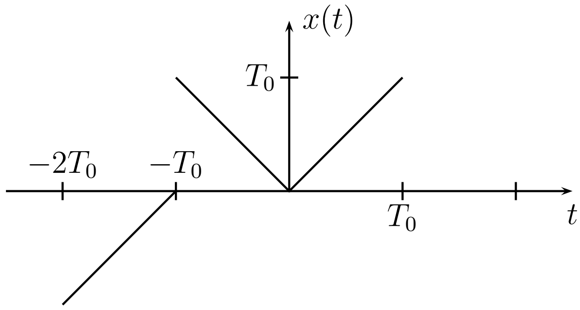
(b)

Soluciones al examen de Señales y sistemas

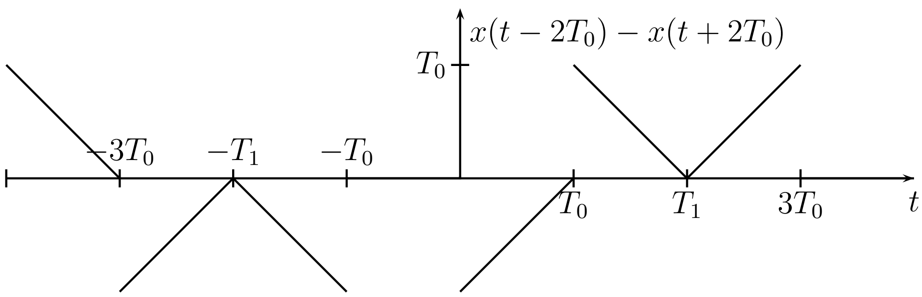
Segundo curso de Ingeniería de Telecomunicación
Luis Vielva

1. La señal $h(t) = \delta(t - T_1) - \delta(t + T_1)$ consiste en dos impulsos unitarios, uno positivo ubicado en $t = T_1$ y otro negativo en $t = -T_1$. La señal $x(t)$ consta de tres tramos rectos.

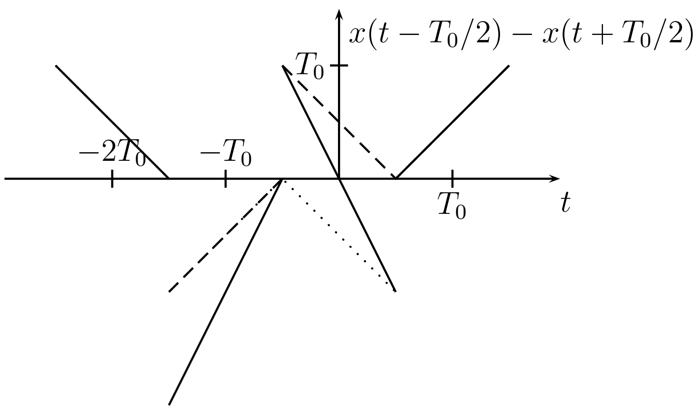




Como $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$, el producto de convolución de $h(t)$ y $x(t)$ es $x(t-T_1) - x(t+T_1)$. Gráficamente puede obtenerse dibujando dos copias desplazadas de $x(t)$ —una de ellas invertida al estar multiplicada por -1— y sumarlas. Si $T_1 = 2T_0$ no hay influencia mútua entre las dos réplicas



mientras que en el caso $T_1 = T_0/2$ si que la hay.



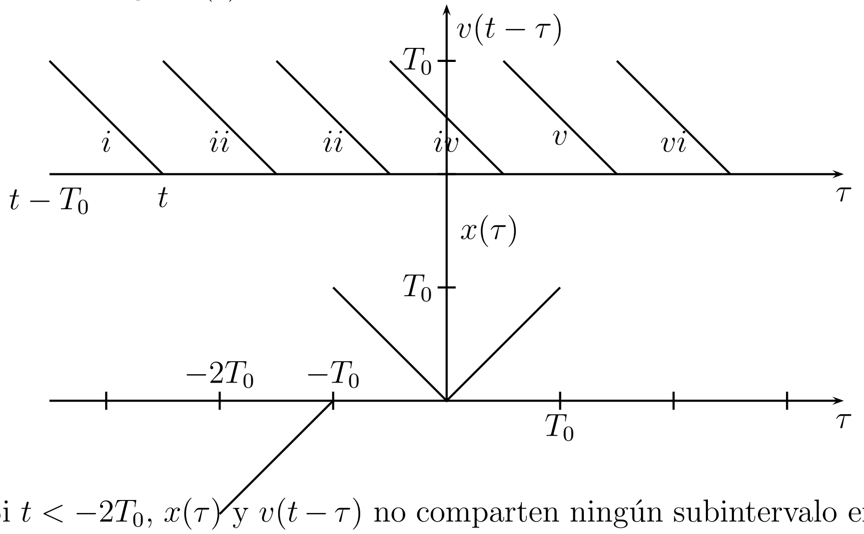
El producto de convolución de $x(t)$ y $v(t)$ viene dado por

$$y(t) = x(t) * v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)v(t-\tau)\,d\tau,$$

donde

$$x(\tau) = \begin{cases} T_0 + \tau, & -2T_0 < \tau < -T_0, \\ |\tau|, & -T_0 < \tau < T_0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \qquad v(t-\tau) = \begin{cases} t-\tau, & t-T_0 < \tau < t, \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para calcular el producto de convolución, hay que distinguir seis casos, tal y como se muestra en la figura (e).



I) Si $t < -2T_0$, $x(\tau)$ y $v(t-\tau)$ no comparten ningún subintervalo en el que ambas sean no nulas. Por tanto $y(t) = 0$.

II) Si $-2T_0 < t < -T_0$, ambas son no nulas en el subintervalo $(-2T_0, t)$, por tanto

$$y(t) = \int_{-2T_0}^{t} (T_0+\tau)(t-\tau)\,d\tau = \frac{t^3 + 3t^2T_0 - 4T_0^3}{6}.$$

III) Si $-T_0 < t < 0$, en el subintervalo que comparten con valor no nulo, $x(\tau)$ tiene dos expresiones distintas (como $\tau < 0$, $|\tau| = -\tau$), siendo

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t-T_0}^{-T_0} (T_0+\tau)(t-\tau)\,d\tau + \int_{-T_0}^{t} -\tau(t-\tau)\,d\tau \\ &= -\frac{t^2(t+3T_0)}{6} - \frac{t^3 - 3tT_0^2 - 2T_0^3}{6} = -\frac{2t^3 + 3t^2T_0 - 3tT_0^2 - 2T_0^3}{6}. \end{aligned}$$

IV) Cuando $0 < t < T_0$ $x(\tau)$ tiene también dos expresiones, siendo

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t-T_0}^{0} -\tau(t-\tau)\,d\tau + \int_{0}^{t} \tau(t-\tau)\,d\tau \\ &= \frac{(t-T_0)^2(t+2T_0)}{6} + \frac{t^3}{6} = \frac{2t^3 - 3tT_0^2 + 2T_0^3}{6}. \end{aligned}$$

v) Cuando $T_0 < t < 2T_0$, se verifica

$$y(t) = \int_{t-T_0}^{T_0} \tau(t-\tau)\, d\tau = -\frac{t^3 - 6tT_0^2 + 4T_0^3}{6}.$$

vi) Por último, cuando $t > 2T_0$, $y(t) = 0$.

2. Si calculásemos $x[0]$ mediante la expresión de $x[n]$ válida para $n \geq 2$ obtendríamos $x[0] = (-1)^0 = 1$. Como el valor real es $x[0] = 0$, tenemos que modificar la expresión general para restar 1 cuando $n = 0$; es decir,

$$x[n] = x[n-1] + 2x[n-2] + (-1)^n - \delta[n],$$

es una expresión válida para $n = 0$ y para $n \geq 2$. Análogamente, si utilizásemos la expresión general para calcular $x[1]$ obtendríamos $x[1] = -1$, como el valor real es $x[1] = 1$, debemos sumar 2 a la expresión general cuando $n = 1$; es decir,

$$x[n] = x[n-1] + 2x[n-2] + (-1)^n - \delta[n] + 2\delta[n-1].$$

Esta última expresión es válida para todo $n \geq 0$. Si tenemos en cuenta que $x[n] = 0$ cuando $n < 0$, podremos obtener una expresión general válida para todos los valores de n

$$x[n] = (x[n-1] + 2x[n-2] + (-1)^n)u[n] - \delta[n] + 2\delta[n-1].$$

A partir de esta expresión general podemos obtener una relación con la transformada z si multiplicamos por z^{-n} y sumamos para todo n

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-1]z^{-n} + 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-2]z^{-n} + \sum_{n\geq 0}(-1)^n z^{-n} - 1 + 2z^{-1},$$

que, teniendo en cuenta la propiedad de desplazamiento temporal de la transformada z y la suma de los términos de una progresión geométrica que aparece en el segundo miembro, se convierte en

$$X(z) = z^{-1}X(z) + 2z^{-2}X(z) + \frac{1}{1+z^{-1}} - 1 + 2z^{-1},$$

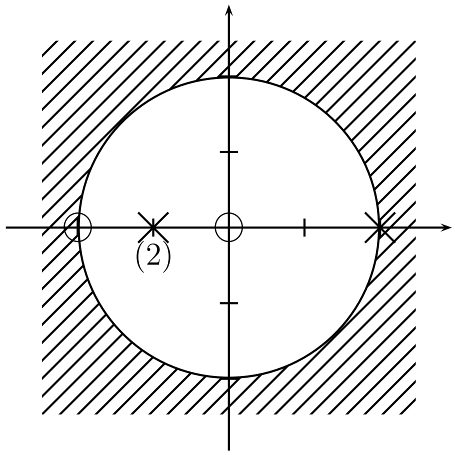
de donde, despejando $X(z)$, obtenemos

$$X(z) = \frac{z^{-1}(1+2z^{-1})}{(1+z^{-1})(1-z^{-1}-2z^{-2})} = \frac{z^{-1}(1+2z^{-1})}{(1+z^{-1})^2(1-2z^{-1})}.$$

Para calcular la ROC, expresamos $X(z)$ como una función racional en z

$$X(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z(z+2)}{(z-2)(z+1)^2},$$

que tiene dos ceros, uno en el origen y otro en $z = -2$, y tres polos, uno en $z = 2$ y otro doble en $z = -1$. Como la secuencia es causal —derecha— la ROC es la región externa a la circunferencia que pasa por el polo más externo, tal y como se muestra en la figura (f), donde se observa que el origen no pertenece a la ROC. Como el orden de $p(z)$ es menor que el de $q(z)$, el infinito si pertenece a la ROC. Como la ROC no contiene a la circunferencia $|z| = 1$, no existe $X(e^{j\omega})$.



Para deducir la expresión explícita de $x[n]$ podemos calcular la transformada inversa de $X(z)$, para lo que calculamos la siguiente expansión en fracciones simples

$$X(z) = \frac{z^{-1}(1+2z^{-1})}{(1+z^{-1})^2(1-2z^{-1})} = \frac{A}{1-2z^{-1}} + \frac{B}{1+z^{-1}} + \frac{C}{(1+z^{-1})^2},$$

que se verifica para $A = 4/9$, $B = -7/9$ y $C = 1/3$. Por lo tanto, la secuencia $x[n]$ asociada —teniendo en cuanta que la ROC es el exterior de un círculo— es

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{4}{9}2^n u[n] - \frac{7}{9}(-1)^n u[n] + \frac{1}{3}(-1)^n(n+1)u[n] \\ &= \frac{1}{9}(2^{n+2} + (3n-4)(-1)^n)u[n]. \end{aligned}$$

Como alternativa, podíamos calcular la secuencia asociada a la función

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1-4z^{-2}+z^{-4}} = \frac{z^3}{z^4-4z^2+1}.$$

Calculando las raíces del denominador —se puede resolver $x^2 - 4x + 1 = 0$, con $x = z^2$— se obtienen los cuatro polos de $X(z)$, que están ubicados en $z = \pm\sqrt{2\pm\sqrt{3}}$. Estos cuatro polos corresponden a circunferencias de radios $|z| \approx 1{,}9$ y $|z| \approx 0{,}5$. Si la ROC es el exterior de un círculo debe verificar $|z| > 1{,}9$, por lo que el círculo unidad no pertenece a la ROC y no existe $X(e^{j\omega})$.

La función $X(z)$ puede ponerse como $X(z) = z^{-1}Y(z)$, donde

$$Y(z) = \frac{1}{1-4z^{-2}+z^{-4}}$$

sólo tiene potencias pares de z^{-1}, por lo que podemos poner $Y(z) = W(z^2)$, donde

$$W(z) = \frac{1}{1 - 4z^{-1} + z^{-2}}.$$

Si expandimos $W(z)$ en fracciones simples

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{z^{-1} - (\sqrt{3}+2)} - \frac{1}{z^{-1} - (\sqrt{3}-2)} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})} \frac{1}{1 - \dfrac{z^{-1}}{2-\sqrt{3}}} - \frac{1}{2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})} \frac{1}{1 - \dfrac{z^{-1}}{2+\sqrt{3}}}, \end{aligned}$$

podemos calcular inmediatamente la secuencia $w[n]$ asociada a $W(z)$

$$w[n] = \frac{\sqrt{3}}{6} \left((2+\sqrt{3})^{n+1} - (2-\sqrt{3})^{n+1} \right) u[n].$$

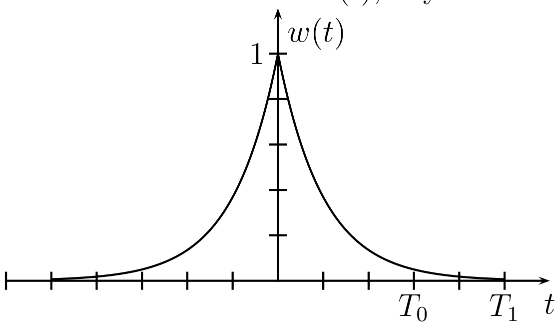
Ahora, como $Y(z) = W(z^2)$, se verifica que

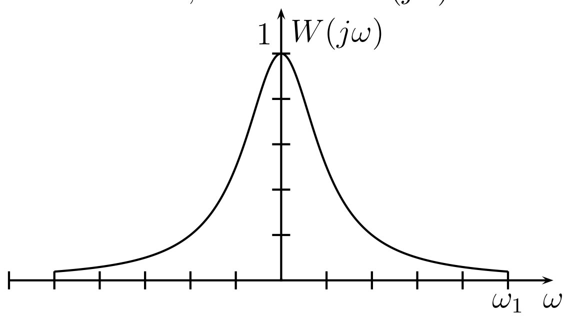
$$y[n] = \begin{cases} w[n/2], & \text{si } n \text{ par}, \\ 0, & \text{si } n \text{ impar}. \end{cases}$$

Por último, como $X(z) = z^{-1}Y(z)$, entonces $x[n] = y[n-1]$, es decir,

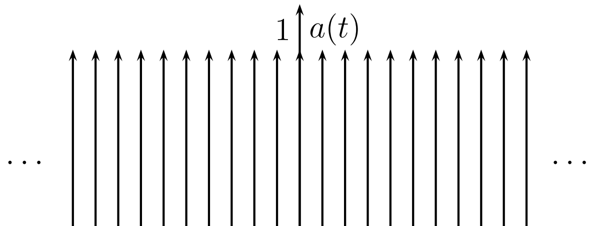
$$x[n] = \begin{cases} w[(n-1)/2], & \text{si } n \text{ impar}, \\ 0, & \text{si } n \text{ par}. \end{cases}$$

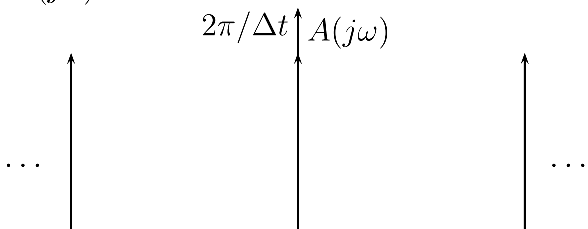
3. Partimos de la señal $w(t)$, cuya transformada de Fourier, es la señal $W(j\omega)$.



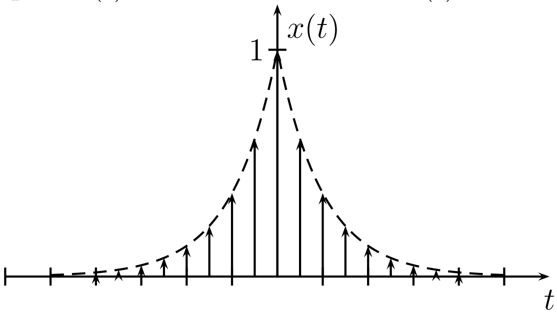


Si tomamos la señal $a(t)$ —un tren de impulsos unitarios separados Δt—, cuya transformada de Fourier es el tren de impulsos $A(j\omega)$

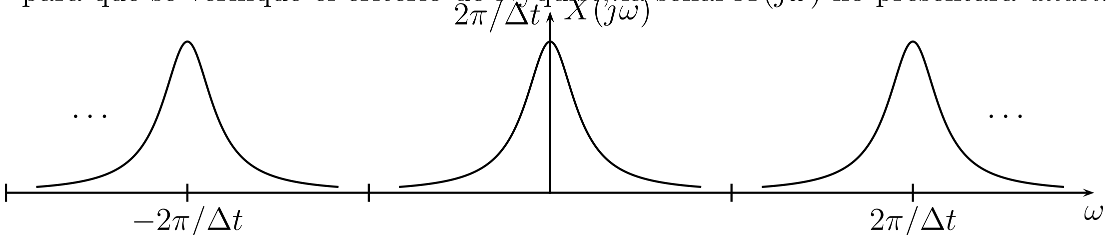




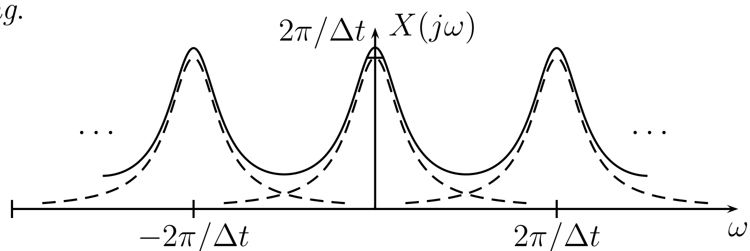
y la multiplicamos por $w(t)$ obtenemos la señal $x(t)$.



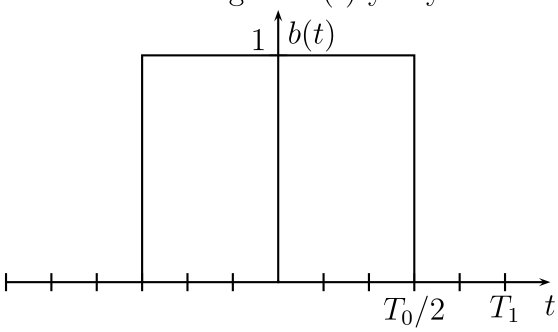
Esta multiplicación en el dominio del tiempo se traduce en una convolución en el dominio de la frecuencia, obteniéndose $X(j\omega)$. Si Δt es lo suficientemente pequeño como para que se verifique el criterio de Nyquist, la señal $X(j\omega)$ no presentará *aliasing*.

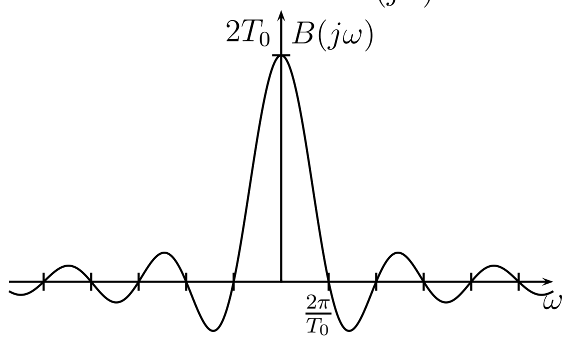


Si, por el contrario, no se verifica el criterio de Nyquist, la señal $X(j\omega)$ presentará *aliasing*.

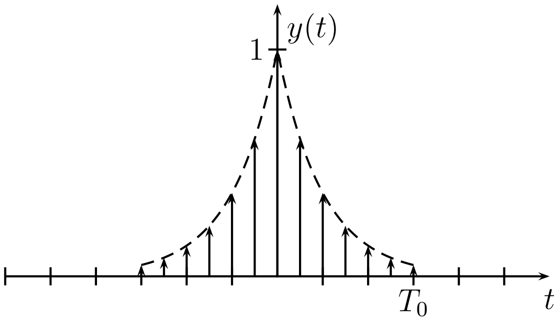


El siguiente paso consiste en truncar temporalmente la señal $x(t)$ con ayuda de la ventana rectangular $b(t)$ y cuya transformada de Fourier es la señal $B(j\omega)$.

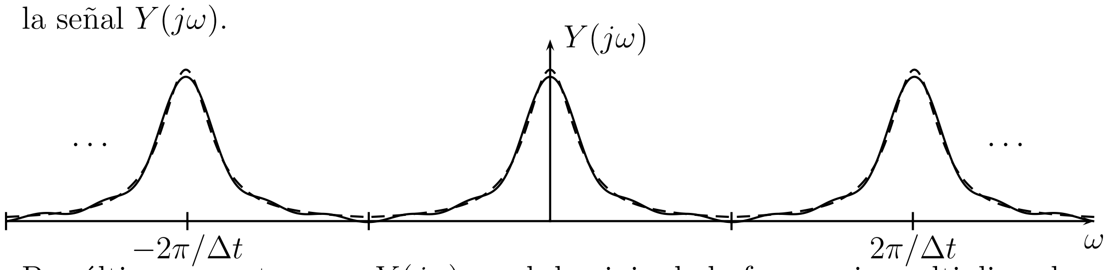




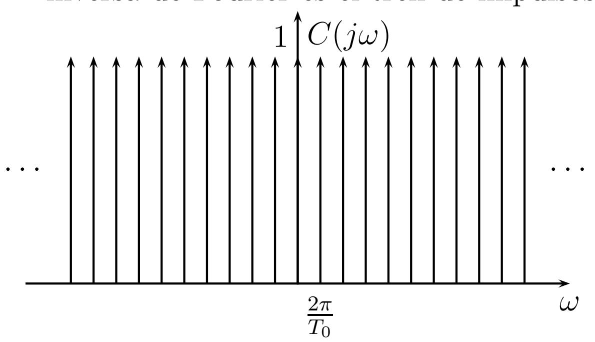
Si multiplicamos $x(t)$ por $b(t)$, se obtiene la señal $y(t)$.

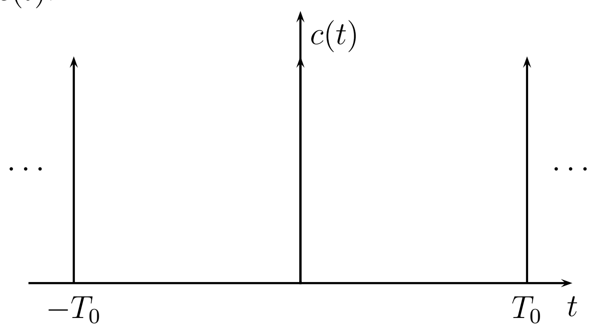


Esta multiplicación en el dominio del tiempo se traduce en una convolución en el de la frecuencia por la transformada de la ventana —un rizado en la señal—, obteniendo la señal $Y(j\omega)$.

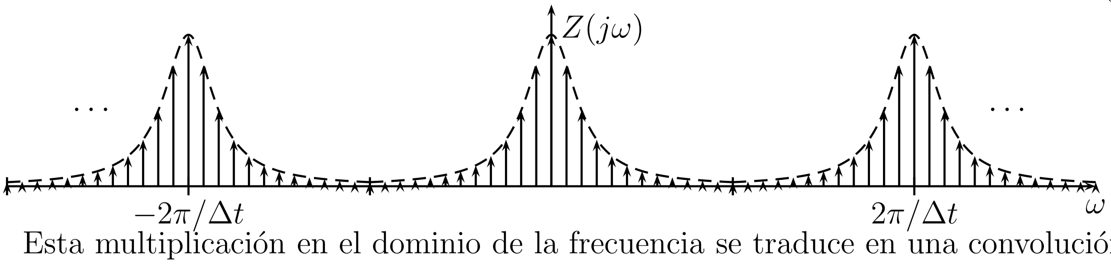


Por último, muestreamos $Y(j\omega)$ en el dominio de la frecuencia multiplicando por la señal $C(j\omega)$ —un tren de impulsos unitarios espaciados $2\pi/T_0$—, cuya transformada inversa de Fourier es el tren de impulsos $c(t)$.

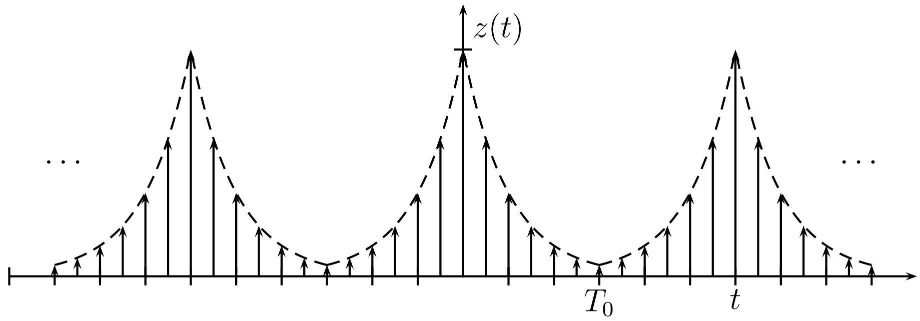




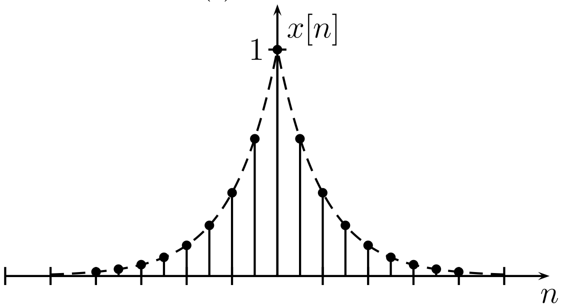
Al multiplicar en el dominio de la frecuencia, obtenemos la señal muestreada $Z(j\omega)$.



Esta multiplicación en el dominio de la frecuencia se traduce en una convolución en el dominio del tiempo, haciendo que la señal temporal $z(t)$ sea periódica



Si pasamos de la señal continua $x(t)$ a una señal discreta obtenemos la secuencia $x[n]$



cuya transformada de Fourier es la señal $X(e^{j\omega})$