Señales y sistemas.

Segundo curso de Ingeniería de Telecomunicación
Universidad de Cantabria

17 de septiembre de 1999

1. Sea $x[n]$ una secuencia causal discreta de la que sabemos que, para $n \geq -1$, se ajusta perfectamente por un polinomio en n de segundo orden. Si se conoce que $x[0] = 1$ y $x[1] = 4$, se pide:

   a) Obtener la expresión de dicho polinomio y calcular —si es posible; en caso contrario, justificar la respuesta— los valores de $x[n]$ para $n = -2$, $n = 1/2$ y $n = 2$. *(2 puntos)*

2. Supongamos dos secuencias $x[n]$ e $y[n]$ definidas mediante las siguientes relaciones de recurrencia

$$x[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n = 0, \\ 0, & n = 1, \\ 2y[n-1] + x[n-2], & n \geq 2. \end{cases}, \qquad y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n = 1, \\ 0, & n = 0, \\ x[n-1] + y[n-2], & n \geq 2. \end{cases}.$$

   a) Calcular la transformada z de $x[n]$ y de $y[n]$. Representar su patrones de polos y ceros y las regiones de convergencia (razonando si el origen y el infinito pertenecen o no a dichas regiones).*(2 puntos)*

   b) Deducir una expresión explícita —que no sea una relación de recurrencia— para cada una de las secuencias $x[n]$ e $y[n]$.*(2 puntos)*

3. La señal continua $\tilde{x}(t)$ está definida en el intervalo $[0:4]$ como

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1, \\ -\cos \pi t/2, & 1 \leq t < 3, \\ 0, & 3 \leq t < 4. \end{cases}$$

   A partir de ésta, se define la función $x(t)$ como una extensión periódica de $\tilde{x}(t)$. La forma de construir $x(t)$ es ir colocando copias sucesivas idénticas de $\tilde{x}(t)$ de forma adyacente, obteniéndose una función periódica de periodo 4.

Por otro lado, se define la función

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t), & t > 0, \\ -\tilde{x}(-t), & t < 0, \end{cases}$$

a partir de la cual se construye la función $y(t)$ como una extensión periódica de $\tilde{y}(t)$, que se obtiene, análogamente al caso anterior, colocando copias sucesivas adyacentes de $\tilde{y}(t)$, obteniéndose una función periódica de periodo 8.

Representar gráficamente $x(t)$ e $y(t)$ y:[1]

a) Calcular el desarrollo en serie de Fourier de la función periódica $x(t)$. *(2 puntos)*

b) Calcular el desarrollo en serie de Fourier de la función periódica $y(t)$. *(2 puntos)*

---

[1]Se recuerda que

$$\int \cos px \cos qx \, dx = \frac{\operatorname{sen}(p-q)x}{2(p-q)} + \frac{\operatorname{sen}(p+q)x}{2(p+q)}, \quad \text{si } p \neq q, \qquad \int \cos^2 px \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2px}{4p},$$

y

$$\int \operatorname{sen} px \cos qx \, dx = \frac{\cos(p-q)x}{2(q-p)} - \frac{\cos(p+q)x}{2(p+q)}, \quad \text{si } p \neq q \qquad \int \operatorname{sen} px \cos px \, dx = \frac{\operatorname{sen}^2 px}{2p},$$

Soluciones al examen de Señales y sistemas

17 de septiembre de 1999

Segundo curso de Ingeniería de Telecomunicación

Luis Vielva

1. La secuencia $x[n]$ se ajusta exactamente por un polinomio de la forma $x[n] = a + bn + cn^2$. Para determinar los tres coeficientes, es necesario conocer los valores de la secuencia en tres puntos.

   Puesto que la secuencia $x[n]$ es causal, se verifica que $x[n] = 0$ para $n < 0$. En particular, $x[-1] = 0$. Por tanto, como conocemos los valores para $n = -1, 0, 1$. Tendremos

   $$\begin{aligned} x[-1] &= 0 = a - b + c, \\ x[0] &= 1 = a, \\ x[1] &= 4 = a + b + c, \end{aligned}$$

   de donde obtenemos $a = 1$, $b = 2$ y $c = 1$; con lo que $x[n] = 1 + 2n + n^2 = (n+1)^2$.

   Como la secuencia es causal, el valor pedido para $n = -2$ es $x[-2] = 0$. Para $n = 1/2$ no puede calcularse nada, puesto que se trata de una secuencia discreta, que no está definida para valores no enteros del argumento. Por último, para $n = 2$, $x[2] = (2+1)^2 = 9$.

2. La transformada z de una secuencia $x[n]$ está definida como

   $$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}.$$

   El método general para calcular la transformada z de este tipo de secuencias —análogo al procedimiento utilizado para calcular la función generatriz— necesita en primer lugar una expresión de $x[n]$ —y otra para $y[n]$— como una relación de recurrencia que sea válida para todos los valores de n —con la suposición de que $x[n] = 0$ para $n < 0$—.

   Para la primera de las secuencias, la relación de recurrencia nos proporciona una expresión válida para $n \geq 2$

   $$x[n] = 2y[n-1] + x[n-2].$$

   Si aplicásemos esta ecuación a los casos $n = 0$ y $n = 1$ tendríamos $x[0] = 0$ y $x[1] = 0$, que no coinciden con la definición de $x[n]$. Por tanto, hay que añadir estos casos especiales a la expresión de recurrencia; en nuestro caso tendremos

   $$x[n] = 2y[n-1] + x[n-2] + \delta[n],$$

con la suposición implícita de que $x[n] = 0$ para $n < 0$; o bien

$$x[n] = 2y[n-1]u[n] + x[n-2]u[n] + \delta[n],$$

sin necesidad de esta suposición.

Análogamente, si aplicamos la ecuación de recurrencia de la secuencia $y[n]$, válida para $n \geq 2$,

$$y[n] = x[n-1] + y[n-2]$$

a los casos $n = 0$ y $n = 1$ tendríamos $y[0] = 0$ e $y[1] = 1$, que corresponden con la definición proporcionada, por lo que esta ecuación de recurrencia es válida si suponemos que $y[n] = 0$ para $n < 0$. Alternativamente, podemos poner

$$y[n] = x[n-1]u[n] + y[n-2]u[n].$$

Si multiplicamos estas secuencias por z^n y sumamos para todo n obtendremos expresiones que relacionan sus transformadas z. Como las dos secuencias son causales, tendremos

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n\geq 0} x[n]z^{-n}$$

y una expresión análoga para $Y(z)$. Por tanto,

$$X(z) = 2\sum_{n\geq 0} y[n-1]z^{-n} + \sum_{n\geq 0} x[n-2]z^{-n} + 1, \tag{1}$$

$$Y(z) = \sum_{n\geq 0} x[n-1]z^{-n} + \sum_{n\geq 0} y[n-2]z^{-n}. \tag{2}$$

Si aplicamos la propiedad de desplazamiento, obtenemos un sistema de dos ecuaciones funcionales con dos incógnitas

$$\begin{aligned} X(z) &= 2z^{-1}Y(z) + z^{-2}X(z) + 1, \\ Y(z) &= z^{-1}X(z) + z^{-2}Y(z). \end{aligned}$$

Para resolver este sistema, despejamos $X(z)$ de la primera ecuación para obtener

$$X(z) = \frac{2z^{-1}Y(z) + 1}{1 - z^{-2}}, \tag{3}$$

y sustituimos (3) en la segunda, con lo que

$$Y(z)(1 - z^{-2}) = \frac{2z^{-2}Y(z) + z^{-1}}{1 - z^{-2}}.$$

Si agrupamos ahora términos en $Y(z)$, tendremos

$$Y(z)(1 - z^{-2})^2 = 2z^{-2}Y(z) + z^{-1},$$

$$Y(z)(1 + z^{-4} - 4z^{-2}) = z^{-1};$$

con lo que obtenemos la siguiente expresión racional —en z^{-1}— para $Y(z)$

$$Y(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 4z^{-2} + z^{-4}}.$$

Si sustituimos esta expresión en (3) obtenemos una expresión racional para $X(z)$

$$X(z) = \frac{1 + \dfrac{2z^{-2}}{1 - 4z^{-2} - z^{-4}}}{1 - z^{-2}} = \frac{1 + 2z^{-2} + z^{-4}}{(1 - z^{-2})(1 - 4z^{-2} + z^{-4})} = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 4z^{-2} + z^{-4}}$$

Para calcular los polos y ceros, debemos expresar $X(z)$ e $Y(z)$ como cocientes de polinomios en z —en lugar de en z^{-1}—

$$X(z) = \frac{z^2(z^2 - 1)}{1 - 4z^2 + z^4},$$
$$Y(z) = \frac{z^3}{1 - 4z^2 + z^4}.$$

Por lo tanto, $X(z)$ presenta un cero doble en $z = 0$ y dos ceros sencillos en $z = \pm 1$, mientras que $Y(z)$ presenta un cero triple en el origen. En cuanto a los polos, ambas funciones tienen los mismos cuatro polos, que son las soluciones del polinomio

$$z^4 - 4z^2 + 1 = 0.$$

Para calcular las raíces, podemos hacer $z^2 = x$ y resolver

$$x^2 - 4x + 1 = 0, \longrightarrow \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Por lo tanto, los cuatro polos se encuentran en $z = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$. Como las secuencias son derechas, la región de convergencia es el exterior del círculo de radio $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \approx$ 1,93.

Cálculo de las secuencias $x[n]$ e $y[n]$

La forma más fácil de abordar el problema es darse cuenta de que tanto $X(z)$ como $Y(z)$ pueden expresarse en términos de otras funciones más sencillas. En particular, podemos poner

$$X(z) = (1 - z^{-2})V(z),$$
$$Y(z) = z^{-1}V(z),$$

donde

$$V(z) = \frac{1}{1 - 4z^{-2} + z^{-4}}.$$

Si utilizamos la propiedad de desplazamiento temporal de la transformada z, que nos dice que si tenemos el par transformado

$$v[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} V(z),$$

entonces los siguientes también son pares transformados

$$\begin{aligned} v[n-1] &\overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} z^{-1}V(z), \\ v[n-2] &\overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} z^{-2}V(z), \end{aligned}$$

podremos obtener la siguiente relación entre las secuencias $x[n]$ e $y[n]$ y la secuencia $v[n]$

$$\begin{aligned} x[n] &= v[n] - v[n-2], \\ y[n] &= v[n-1]. \end{aligned}$$

Además, si nos fijamos en $V(z)$ veremos que sólo tiene potencias pares de z^{-1}, con lo que podemos expresarlo como una función de z^2 en lugar de una función de z; es decir, podemos poner

$$V(z) = W(z^2),$$

donde

$$W(z) = \frac{1}{1 - 4z^{-1} + z^{-2}}. \tag{4}$$

Con lo que tendremos

$$\begin{aligned} X(z) &= (1 - z^{-2})W(z^2), \\ Y(z) &= z^{-1}W(z^2). \end{aligned}$$

Ahora, podemos aprovechar la propiedad de la transformada z relativa a la expansión en el dominio del tiempo, que nos dice que si tenemos el par transformado

$$w[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} W(z)$$

y definimos una secuencia $v[n]$ a partir de $w[n]$ como[2]

$$v[n] = \begin{cases} w[n/2], & \text{si } n \text{ es par}, \\ 0, & \text{si } n \text{ es impar}, \end{cases}$$

entonces tenemos el siguiente par transformado

$$v[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} V(z) = W(z^2).$$

[2]En otras palabras, la nueva secuencia $v[n]$ verifica que $v[2n] = w[n]$ y $v[2n+1] = 0$ para cualquier entero n.

Por lo tanto, el único problema que nos queda es determinar la secuencia $w[n]$ cuya transformada z es $W(z)$. Si tomamos la ecuación (4) y la expandimos en fracciones simples —ya sabemos que las raíces son $z = 2 \pm \sqrt{3}$— tendremos

$$W(z) = \frac{1}{(z^{-1} - \sqrt{3} - 2)(z^{-1} + \sqrt{3} - 2)} = \frac{A}{z^{-1} - \sqrt{3} - 2} + \frac{B}{z^{-1} + \sqrt{3} - 2}.$$

Igualando los numeradores de esta ecuación, obtenemos la expresión

$$1 = (A + B)z^{-1} + \sqrt{3}(A - B) - 2(A + B),$$

de donde —comparando los términos en z^{-1}— deducimos inmediatamente que $A = -B$. Si resolvemos la ecuación restante obtendremos

$$A = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad B = -\frac{1}{2\sqrt{3}};$$

con lo que

$$W(z) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{z - (2 + \sqrt{3})} - \frac{1}{z - (2 - \sqrt{3})} \right).$$

Como sabemos que una exponencial compleja tiene el par transformado

$$a^n u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - az^{-1}},$$

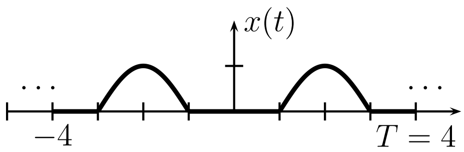
podemos expresar $W(z)$ como

$$W(z) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2 - \sqrt{3}} \frac{1}{1 - \dfrac{z^{-1}}{2 - \sqrt{3}}} - \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \frac{1}{1 - \dfrac{z^{-1}}{2 + \sqrt{3}}} \right),$$

con lo que la secuencia asociada será

$$\begin{aligned} w[n] &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2 - \sqrt{3}} \left(\frac{1}{2 - \sqrt{3}} \right)^n - \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}} \right)^n \right) u[n] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\left(\frac{1}{2 - \sqrt{3}} \right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}} \right)^{n+1} \right) u[n] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} ((2 + \sqrt{3})^{n+1} - (2 - \sqrt{3})^{n+1}) u[n]. \end{aligned}$$

3. La señal $x(t)$ es la función periódica



Como el periodo es $T = 4$, la pulsación fundamental es $\omega_0 = 2\pi/T = \pi/2$.

Como la función es par, su desarrollo en serie de Fourier puede ponerse como

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k>0} a_k \cos\frac{k\pi t}{2}, \quad \text{donde } a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\cos\frac{k\pi t}{2}\,dt.$$

Para calcular los coeficientes, debe evaluarse la integral

$$a_k = -\frac{1}{4}\int_1^3 \cos\frac{\pi t}{2}\cos\frac{k\pi t}{2}\,dt,$$

que, utilizando la relación,

$$\int \cos px \cos qx\,dx = \frac{\operatorname{sen}(p-q)x}{2(p-q)} + \frac{\operatorname{sen}(p+q)x}{2(p+q)}, \quad \text{si } p \neq q,$$

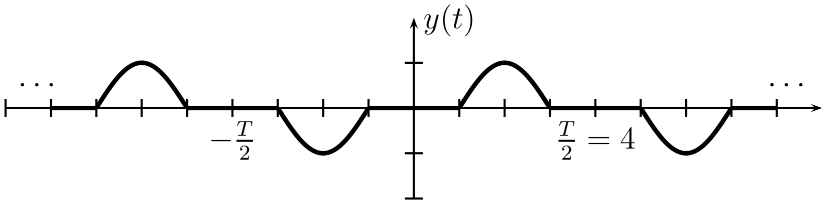
proporciona

$$a_k = \frac{1}{2\pi(1-k^2)}\left(\cos\frac{\pi k}{2} + \cos\frac{3\pi k}{2}\right), \quad \text{para } k \neq 1.$$

El caso particular $k = 1$ puede calcularse como

$$a_1 = -\frac{1}{4}\int_1^3 \cos^2\frac{\pi t}{2}\,dt = -\frac{1}{4}.$$

La señal $y(t)$ es la función periódica



Como el periodo es $T = 8$, la pulsación fundamental es $\omega_0 = 2\pi/T = \pi/4$.

Como la función es impar, su desarrollo en serie de Fourier puede ponerse como

$$x(t) = 2\sum_{k>0} a_k \operatorname{sen}\frac{k\pi t}{4}, \quad \text{donde } a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\operatorname{sen}\frac{k\pi t}{4}\,dt.$$

Para calcular los coeficientes, debe evaluarse la integral

$$a_k = -\frac{2}{8}\int_1^3 \cos\frac{\pi t}{2}\operatorname{sen}\frac{k\pi t}{4}\,dt,$$

que, utilizando la relación,

$$\int \operatorname{sen} px \cos qx \, dx = \frac{\cos(p-q)x}{2(q-p)} - \frac{\cos(p+q)x}{2(p+q)}, \quad \text{si } p \neq q$$

proporciona

$$a_k = \frac{2}{\pi(4-k^2)} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi k}{4} + \operatorname{sen} \frac{3\pi k}{4} \right), \quad \text{para } k \neq 2.$$

El caso particular $k = 2$ puede calcularse como

$$a_2 = -\frac{1}{4} \int_1^3 \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2} \cos \frac{\pi t}{2} \, dt = 0.$$