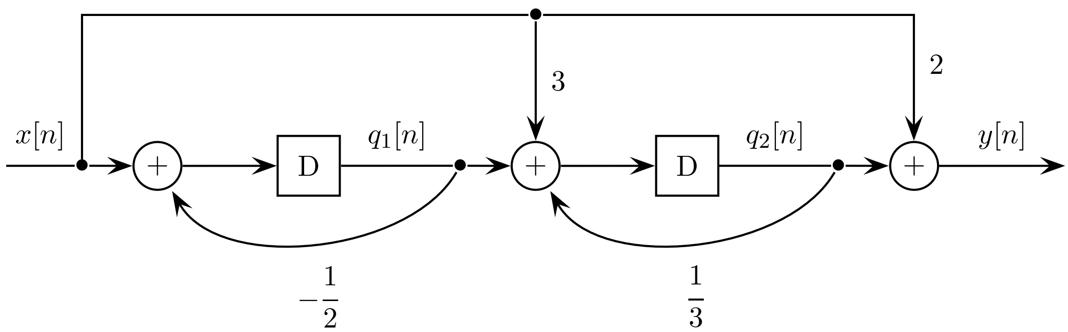
Señales y sistemas.

Segundo curso de Ingeniería de Telecomunicación
Universidad de Cantabria

4 de febrero de 2000

1. Dado el sistema de la figura:



i) Calcule la descripción matricial mediante variables de estado, tomando como éstas las secuencias $q_1[n]$ y $q_2[n]$ (las salidas de los retrasos). Si $x[n] = u[n]$, utilice la descripción obtenida para generar una tabla con los valores de las secuencias $q_1[n]$, $q_2[n]$ e $y[n]$ para $n = 0, \ldots, 3$ en los dos casos siguientes: cuando $q_1[-1] = 0$ y $q_2[-1] = 0$ —el sistema está inicialmente en reposo— y cuando $q_1[-1] = 1$ y $q_2[-1] = 3$. *(1 punto)*

ii) Obtenga una ecuación en diferencias que proporcione una relación entre la entrada y la salida. Si $x[n] = u[n]$ y el sistema está inicialmente en reposo. Utilice la descripción obtenida para generar una tabla con los valores de $y[n]$ para $n = 0, \ldots, 3$. Realice una implementación directa de tipo II equivalente. *(1 punto)*

iii) Si $x[n] = u[n]$ y el sistema está inicialmente en reposo, resuelva la ecuación en diferencias del apartado anterior para obtener una expresión explícita de $y[n]$. Utilice la solución obtenida para generar una tabla con los valores de $y[n]$ para $n = 0, \ldots, 3$. *(1 punto)*

iv) Si $x[n] = u[n]$ y el sistema está inicialmente en reposo, resuelva la descripción mediante variables de estado del primer apartado y obtenga expresiones explícitas para $q_1[n]$, $q_2[n]$ e $y[n]$. Utilice la solución obtenida para generar una tabla con los valores de las secuencias $q_1[n]$, $q_2[n]$ e $y[n]$ para $n = 0, \ldots, 3$. *(1 punto)*

v) Calcule $y[n]$, mediante la transformada z unilateral, cuando $x[n] = u[n]$, $q_1[-1] = 1$ y $q_2[-1] = 3$. Utilice la solución obtenida para generar una tabla con los valores de $y[n]$ para $n = 0, \ldots, 3$. *(1 punto)*

2. Dados los dos sistemas de la figura, donde los símbolos $(\downarrow M)$ y $(\uparrow M)$ representan, respectivamente, un diezmado y una expansión por un factor M,

$$\xrightarrow{x[n]} \boxed{(\downarrow M)} \xrightarrow{w[n]} \boxed{h[n]} \xrightarrow{y[n]} \qquad \xrightarrow{x[n]} \boxed{h_{(\uparrow M)}[n]} \xrightarrow{v[n]} \boxed{(\downarrow M)} \xrightarrow{y[n]}$$

   I) Demostrar, trabajando en el dominio del tiempo, que la salida $y[n]$ es la misma en ambos casos. *(1 punto)*

   II) Demostrar, trabajando directamente en el dominio de la frecuencia —no transformando el resultado del apartado anterior—, que la salida $Y(e^{j\omega})$ es la misma en ambos casos. *(1 punto)*

3. A partir de la señal

$$q(t) = \frac{\operatorname{sen} \omega_c t}{\pi t}$$

se define

$$h(t) = q(t) + \frac{1}{2}\, q\left(t + \frac{\pi}{\omega_c}\right) + \frac{1}{2}\, q\left(t - \frac{\pi}{\omega_c}\right).$$

   I) Calcule y dibuje su transformada de Fourier $H(j\omega)$. ¿Cuánto vale el ancho de banda de $h(t)$? *(1.5 puntos)*

   II) Se define una nueva función $x(t) = h(t) \cos 4\omega_c t$ y se denota su señal analítica como $x_+(t)$. Dibuje su transformada de Fourier $X(j\omega)$ y la de su señal analítica $X_+(j\omega)$. ¿Cuánto valen los anchos de banda de $x(t)$ y de $x_+(t)$?
   Si se define la envolvente compleja $\tilde{x}(t) = x_+(t)e^{-j\omega_0 t}$, dibuje $\tilde{X}(j\omega)$ para los casos $\omega_0 = 3{,}5\omega_c$ y $\omega_0 = 4\omega_c$. Indique cuánto vale el ancho de banda de la envolvente compleja en cada caso y si $\tilde{x}(t)$ es real o compleja. *(1.5 puntos)*

Soluciones al examen de Señales y sistemas

4 de febrero de 2000

Segundo curso de Ingeniería de Telecomunicación
Universidad de Cantabria
Luis Vielva

Ejercicio 1

1. El sistema verifica las siguientes relaciones

$$q_1[n+1] = -\frac{1}{2}q_1[n] + x[n], \tag{1}$$

$$q_2[n+1] = q_1[n] + \frac{1}{3}q_2[n] + 3x[n], \tag{2}$$

$$y[n] = q_2[n] + 2x[n], \tag{3}$$

que pueden expresarse matricialmente como

$$\mathbf{Q}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{Q}[n] + bx[n], \tag{4}$$

$$y[n] = \mathbf{C}\mathbf{Q}[n] + Dx[n], \tag{5}$$

donde

$$\mathbf{Q}[n] = \begin{pmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = 2.$$

Si se fija la entrada —en este caso $x[n] = u[n]$— y las condiciones iniciales, las ecuaciones anteriores pueden iterarse para obtener los valores sucesivos de las secuencias.

n	$q_1[n]$	$q_2[n]$	$y[n]$
0	0	0	2
1	1	3	5
2	1/2	5	7
3	3/4	31/6	43/6

(caso $q_1[-1] = 0$, $q_2[-1] = 0$)

n	$q_1[n]$	$q_2[n]$	$y[n]$
0	-1/2	2	4
1	5/4	19/6	31/6
2	3/8	5.305	7.305
3	13/16	5.143	7.143

(caso $q_1[-1] = 1$, $q_2[-1] = 3$)

2. Una forma de resolverlo es partir de (1)–(3) y eliminar las secuencias q_1 y q_2. En primer lugar eliminaremos q_2. Multiplicando la ecuación (2) por tres se obtiene

$$3q_2[n+1] - q_2[n] = 3q_1[n] + 9x[n]. \tag{6}$$

La ecuación (3) puede reordenarse como $q_2[n] = y[n] - 2x[n]$, si la multiplicamos por tres y sustituimos n por $n+1$ obtenemos $3q_2[n+1] = 3y[n+1] - 6x[n+1]$. Sustituyendo estas dos últimas expresiones en (6) obtenemos

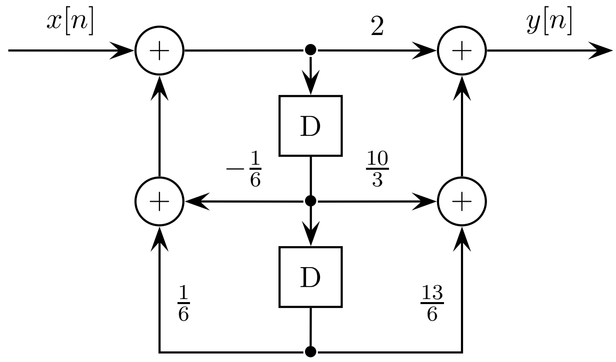
$$3q_1[n] = -7x[n] - y[n] - 6x[n+1] + 3y[n+1],$$

que junto con (1) constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Eliminando q_1 mediante un procedimiento similar, se obtiene la ecuación solicitada

$$6y[n] + y[n-1] - y[n-2] = 12x[n] + 20x[n-1] + 13x[n-2].$$

Si tomamos $x[n] = u[n]$ y el sistema está inicialmente en reposo, esta ecuación genera la última columna de la tabla del apartado i).

La implementación directa de tipo II se obtiene de forma inmedianta a partir de la ecuación en diferencias



3. El polinomio característico es $6r^2+r-1=0$, que tiene como raíces $r=-1/2$ y $r=1/3$. Como la entrada es $x[n]=u[n]$, la solución general será de la forma

$$y[n] = \left[C_1\left(\frac{1}{3}\right)^n + C_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + C_3\right]u[n].$$

Para determinar las constantes C_1, C_2 y C_3 damos valores a la expresión anterior para $n=0,1,2$, obteniendo el sistema

$$\begin{aligned} 2 &= C_1 + C_2 + C_3, \\ 5 &= \frac{C_1}{3} - \frac{C_2}{2} + C_3, \\ 7 &= \frac{C_1}{9} + \frac{C_2}{4} + C_3. \end{aligned}$$

Cuya solución es

$$C_1 = -\frac{63}{10}, \quad C_2 = \frac{4}{5}, \quad C_3 = \frac{15}{2}.$$

Si damos valores a la solución

$$y[n] = \left[-\frac{63}{10}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{15}{2}\right]u[n],$$

obtenemos de nuevo la última columna de la tabla del apartado i).

4. La ecuación (4) puede ponerse como la ecuación en diferencia $\mathbf{Q}[n+1]-\mathbf{A}\mathbf{Q}[n] = bx[n]$, cuya solución nos dará explícitamente $\mathbf{Q}[n]$. La ecuación característica es matricial de

primer orden, $\mathbf{R}-\mathbf{A}=\mathbf{0}$, cuya solución es, trivialmente, $\mathbf{R}=\mathbf{A}$. Por tanto, cuando la entrada es $x[n]=u[n]$, la solución general es

$$\mathbf{Q}[n]=\mathbf{A}^n\mathbf{V}+\mathbf{W}u[n].$$

Para determinar los vectores constantes

$$\mathbf{V}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{W}=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}$$

damos valores a $\mathbf{Q}[n]$ para $n=0,1$, obteniendo

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix} &&=\begin{pmatrix}v_1+w_1\\v_2+w_2\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0\\1&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}&&=\begin{pmatrix}-\frac{v_1}{2}+w_1\\v_1+\frac{v_2}{3}+w_2\end{pmatrix},\end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\mathbf{V}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{11}{2}\end{pmatrix},\quad \mathbf{W}=-\mathbf{V}.$$

Por lo tanto, la solución viene dada por $\mathbf{Q}[n]$ y por la ecuación (5)

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}[n]&=\left[\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0\\1&\frac{1}{3}\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{11}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{11}{2}\end{pmatrix}\right]u[n],\\ y[n]&=\left[\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\mathbf{Q}[n]+2\right]u[n].\end{aligned}$$

Dando valores a estas ecuaciones se obtiene la misma tabla que el apartado i).

5. Aplicando la transformada z unilateral a las ecuaciones (1)–(3) —teniendo en cuenta que, como $x[n]=u[n]$, $x[-1]=0$— se obtiene

$$\begin{aligned}&Q_1^+(z)=z^{-1}X^+(z)-\frac{1}{2}z^{-1}Q_1^+(z)-\frac{1}{2}q_1[-1],\\ &Q_2^+(z)=z^{-1}Q_1^+(z)+q_1[-1]+\frac{z^{-1}}{3}Q_2^+(z)+\frac{q_2[-1]}{3}+3z^{-1}X^+(z),\\ &Y^+(z)=Q_2^+(z)+2X^+(z).\end{aligned}$$

Eliminando $Q_1^+(z)$ y $Q_2^+(z)$ se obtiene

$$Y^+(z)=\frac{12+20z^{-1}+13z^{-2}}{6+z^{-1}-z^{-2}}X^+(z)-\frac{q_1[-1]}{2}\frac{z^{-1}}{1+\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}}+\left(q_1[-1]+\frac{q_2[-1]}{3}\right)\frac{1}{1-\frac{z^{-1}}{3}}.$$

Para el caso particular $x[n]=u[n]$, la transformada z de la entrada es $X^+(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$. Sustituyendo esta expresión y expandiendo en fracciones simples se obtiene

$$\begin{aligned}Y^+(z)=&-\frac{63}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{4}{5}\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{15}{12}\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{q_1[-1]}{2}\left[\frac{6}{5}\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}-\frac{6}{5}\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\right]\\ &+\left(q_1[-1]+\frac{q_2[-1]}{3}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}},\end{aligned}$$

con lo que la señal de salida es

$$y[n] = \left[\left(-\frac{63}{10} - \frac{3q_1[-1]}{5} + q_1[-1] + \frac{q_2[-1]}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{4+3q_1[-1]}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{15}{2}\right] u[n].$$

Si hacemos $q_1[-1] = 1$ y $q_2[-1] = 3$

$$y[n] = \left[-\frac{49}{10}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{7}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{15}{2}\right] u[n],$$

que al dar valores a n reproduce la última columna de la segunda tabla del apartado i).

Ejercicio 2

1. Para el primer sistema, la secuencia $w[n]$ se obtiene diezmando $x[n]$ por un factor M, es decir, $w[n] = x_{(\downarrow M)}[n] = x[nM]$. La salida $y[n]$ es el producto de convolución de $w[n]$ por $h[n]$

$$y[n] = h[n] * w[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]w[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[(n-k)M].$$

Para el segundo sistema, la secuencia $v[n]$ se obtiene mediante el producto de convolución de $x[n]$ por la respuesta impulsiva del primer bloque.

$$v[n] = h_{(\uparrow M)}[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{(\uparrow M)}[k]x[n-k] = \sum_{k \text{ múltiplo de } M} h[k/M]x[n-k].$$

Como $y[n] = v[nM]$,

$$y[n] = \sum_{k \text{ múltiplo de } M} h[k/M]x[nM-k] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h[j]x[(n-j)M],$$

donde en el último paso se ha hecho el cambio de variable $j = k/M$.

2. Sabemos que

$$x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z) \quad \rightarrow \quad x_{(\downarrow M)}[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} X(z^{1/M}W_M^{-m}), \quad \text{donde } W_M = e^{j\frac{2\pi}{M}}.$$

Por tanto,

$$x_{(\downarrow M)}[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} X(e^{j\frac{\omega-2\pi m}{M}}).$$

Aplicando este resultado al primer sistema para calcular $W(e^{j\omega})$, y teniendo en cuenta que $Y(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$,

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} X(e^{j\frac{\omega-2\pi m}{M}})H(e^{j\omega}).$$

En el segundo sistema tenemos $V(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega M})$ y, según el resultado anterior,

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} V(e^{j\frac{\omega-2\pi m}{M}}),$$

por tanto

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} X(e^{j\frac{\omega-2\pi m}{M}})H(e^{j(\omega-2\pi m)}) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} X(e^{j\frac{\omega-2\pi m}{M}})H(e^{j\omega}).$$

Ejercicio 3

1. Sabemos que

$$q(t) = \frac{\operatorname{sen}\omega_c t}{\pi t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Q(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & |\omega| > \omega_c, \end{cases}$$

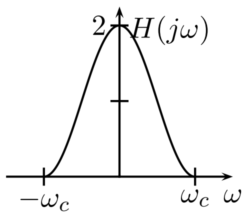
y que

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega) \quad \rightarrow \quad x(t-t_0) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t_0}X(j\omega).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= Q(j\omega)\left(1 + \frac{1}{2}e^{j\frac{\omega\pi}{\omega_c}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\omega\pi}{\omega_c}}\right) \\ &= Q(j\omega)\left(1 + \cos\frac{\omega\pi}{\omega_c}\right) = \begin{cases} 1 + \cos\frac{\omega\pi}{\omega_c}, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & |\omega| > \omega_c. \end{cases} \end{aligned}$$

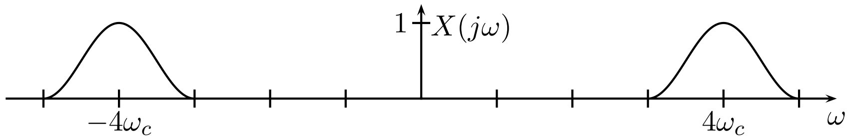
Esta señal, que se muestra en la figura,



es de banda base y tiene una ancho de banda de ω_c.

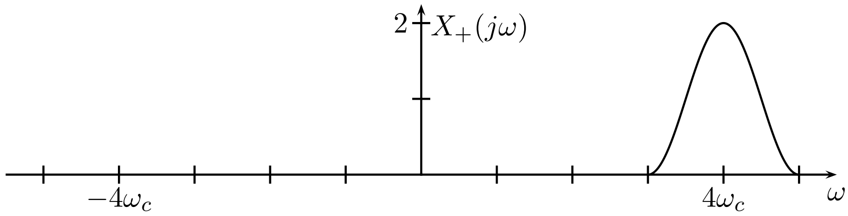
La señal $x(t) = h(t)\cos 4\omega_c t$ tiene como transformada de fourier

$$X(j\omega) = \frac{1}{2}H(e^{j(\omega-4\omega_c)t}) + \frac{1}{2}H(e^{j(\omega+4\omega_c)t}),$$



se trata de una señal de paso banda con ancho de banda $2\omega_c$.

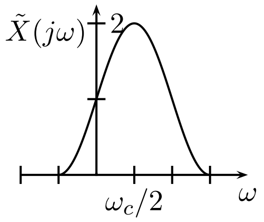
La transformada de Fourier de la señal analítica es $X_+(j\omega) = X(j\omega)(1 + \operatorname{sign}(\omega))$



Se trata de una señal de paso banda con ancho de banda $2\omega_c$.

La transformada de Fourier de la envolvente compleja es $\tilde{X}(j\omega) = X_+(j(\omega - \omega_0))$; es decir, una copia desplazada en el dominio de la frecuencia de la señal analítica.

Si $\omega_0 = 3{,}5\omega_c$, la envolvente compleja es



Se trata de una señal banda base compleja —su transformada de Fourier no es compleja conjugada— cuyo ancho de banda es $1{,}5\omega_c$.

Si $\omega_0 = 4\omega_c$, la envolvente compleja es la propia señal $X(j\omega)$; es decir, una señal banda base real —su transformada de Fourier es compleja conjugada— cuyo ancho de banda es ω_c.