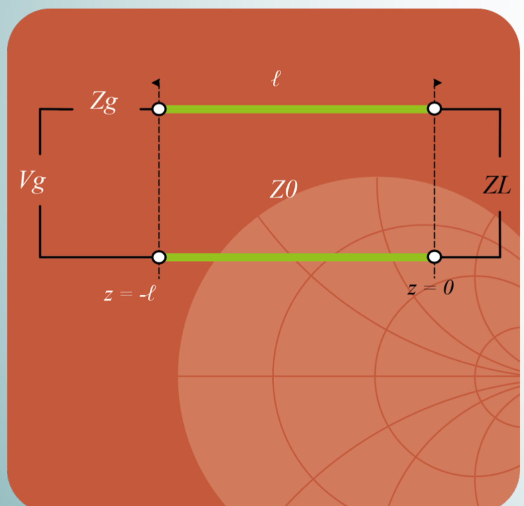
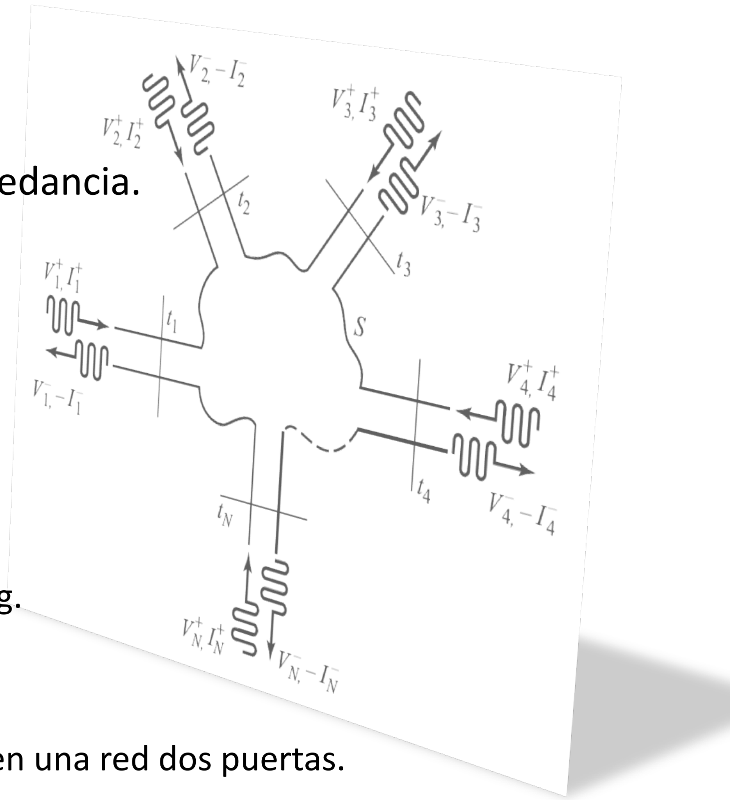
Medios de Transmisión Guiados

Tema 4. Introducción a los circuitos de microondas



Juan Luis Cano de Diego
Óscar Fernández Fernández
José Antonio Pereda Fernández
DPTO. DE INGENIERÍA DE COMUNICACIONES

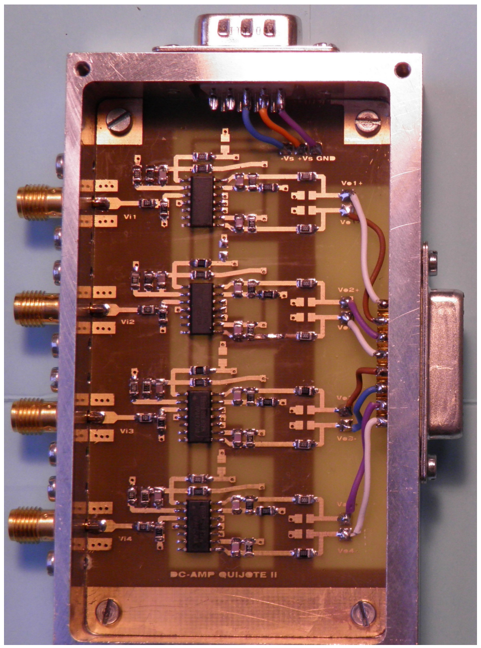
Tema 4: Introducción a los Circuitos de Microondas

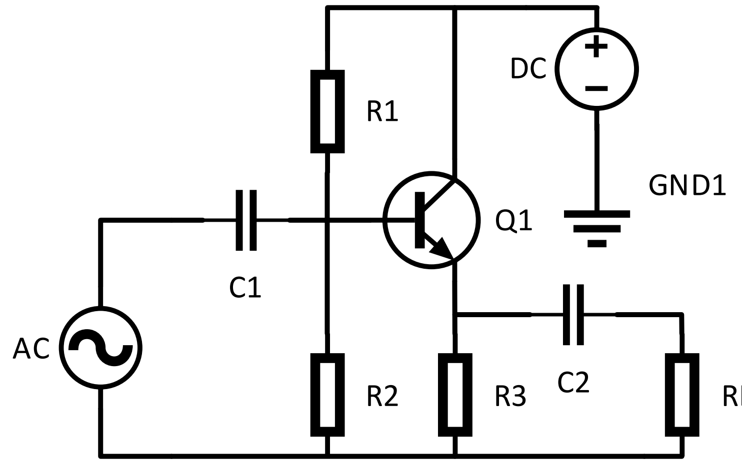


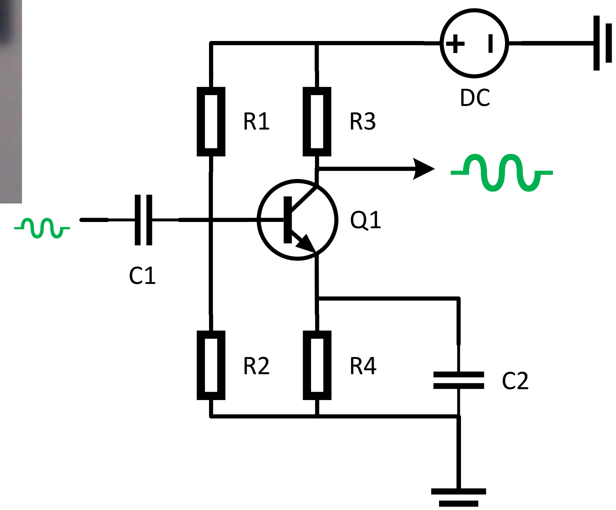
Índice de Contenidos

4.1. Introducción

- Circuitos de baja frecuencia
    - Ejemplos





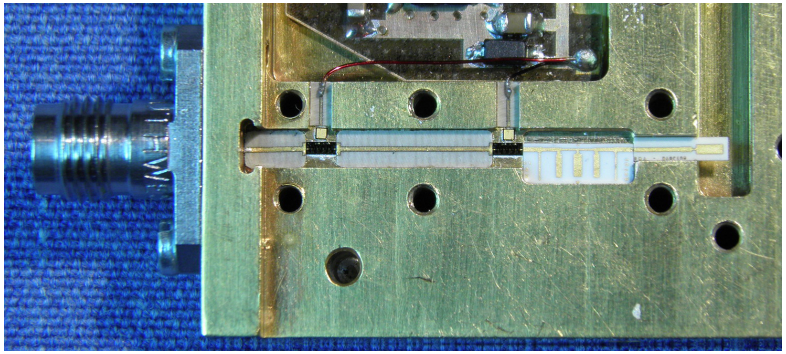


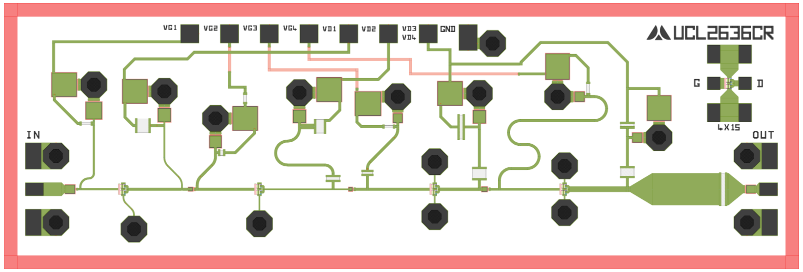
4.1. Introducción

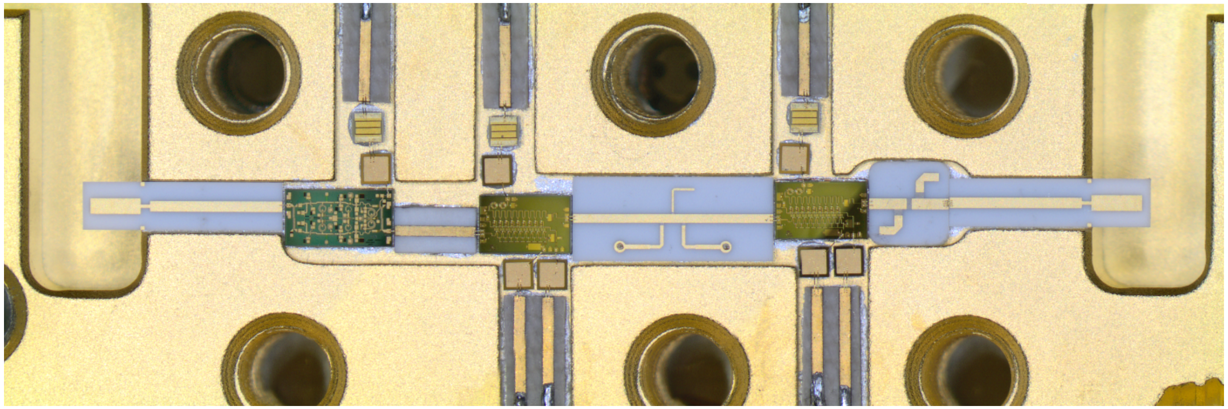
- Circuito de baja frecuencia si dimensiones de los elementos << λ
- Conexión de elementos discretos, activos o pasivos
- Corrientes y tensiones definidas de forma unívoca en cualquier parte del circuito
- Los cambios de fase dentro del circuito son despreciables
- Los campos se pueden considerar como ondas TEM
  - Solución de las ecuaciones de Maxwell cuasiestática
  - Aplicación de las leyes de Kirchhoff (KCL y KVL)
  - Concepto de impedancia
- Análisis de circuitos más simple e intuitivo que las ecuaciones de Maxwell
  - Ec. Maxwell: información de los campos E y H en cada punto del espacio
  - Habitualmente solo interesados en tensiones y corrientes en los terminales, flujos de potencia u otra magnitud global
- El análisis de circuitos también proporciona facilidad para combinar elementos circuitales y obtener la respuesta global

4.1. Introducción

- Circuitos de alta frecuencia
    - Ejemplos







4.1. Introducción

- Circuito de alta frecuencia si tamaño de los elementos $\sim \lambda$ ó $> \lambda$
- La fase de las ondas varía significativamente a lo largo del circuito
- Se pueden analizar mediante las ecuaciones de Maxwell
  - Solución completa más difícil y compleja
  - Puede producir un exceso de información
- Importante distinguir cuándo se puede aplicar el concepto de análisis de circuitos o cuándo el análisis del campo electromagnético

¿Estamos obligados a tratar con las ec. de Maxwell en los circuitos de microondas?

No

El objetivo de este tema es mostrar cómo podemos adaptar algunos conceptos del análisis de circuitos al análisis de muchos problemas de microondas de interés práctico

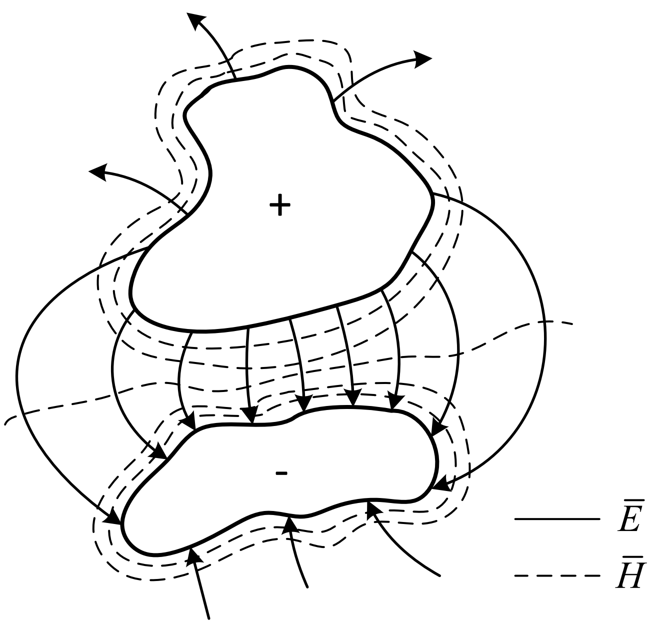
4.2. Tensiones y corrientes equivalentes. Concepto de impedancia

4.2.1 Tensiones y corrientes equivalentes

- Frecuencia de microondas: medida de tensiones y corrientes sólo en líneas tipo TEM (microstrip, cable coaxial…) donde los terminales están definidos
- No es posible definir tensiones y corrientes en líneas no-TEM (guías de onda)

➢ **Caso Línea TEM**

- Líneas de campos *E* y *H* para una línea TEM arbitraria (Fig. 1)



(Fig. 1)

- La solución para las ondas TEM tiene que satisfacer la ecuación de Laplace
- La tensión entre los conductores + y -

$$V = \int_{+}^{-} \overline{E} \cdot dl \qquad (1)$$

Campos de naturaleza electrostática: la tensión no depende del camino de integración → la tensión es única

4.2. Tensiones y corrientes equivalentes. Concepto de impedancia

- De la misma forma, la corriente total que fluye por el conductor + se puede determinar con la Ley de Ampere

$$I = \oint_{C^+} \overline{H} \cdot d\bar{l} \tag{2}$$

Donde el contorno de integración puede ser cualquier camino que encierre al conductor + pero no al –

- Se puede definir la impedancia característica Z_0 para las ondas que se propagan

$$Z_0 = \frac{V}{I} \tag{3}$$

- Conocidos V, I y Z_0, y supuesta conocida la constante de propagación, se puede aplicar la teoría de circuitos para caracterizar la línea de transmisión como un elemento de circuito

4.2. Tensiones y corrientes equivalentes. Concepto de impedancia

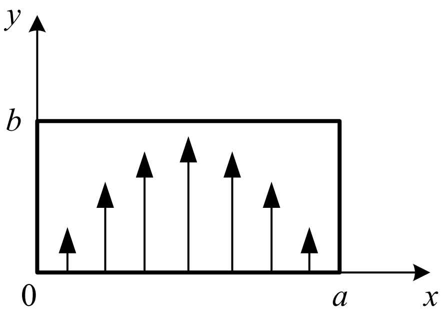
➢ Caso Línea no-TEM (guía de onda)

- Ejemplo de estudio: guía de onda rectangular y modo fundamental, TE_{10} (Fig. 2)

Campos transversales para el modo TE_{10}

$$E_y(x,y,z) = \frac{-j\omega\mu a}{\pi} \cdot A \cdot sen\frac{\pi x}{a} \cdot e^{-j\beta z} = A \cdot e_y(x,y) \cdot e^{-j\beta z} \qquad (4.1)$$

$$H_x(x,y,z) = \frac{j\beta a}{\pi} \cdot A \cdot sen\frac{\pi x}{a} \cdot e^{-j\beta z} = A \cdot h_x(x,y) \cdot e^{-j\beta z} \qquad (4.2)$$



(Fig. 2)

Si introducimos (4.1) en (1) obtenemos lo siguiente:

$$V = \int_{+}^{-} \overline{E} \cdot dl = \frac{-j\omega\mu a}{\pi} \cdot A \cdot sen\frac{\pi x}{a} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \int_{y} dy \qquad (5)$$

En (5) se observa que *V* depende de *x* y de la longitud del contorno de integración según *y*.

- Integración desde $y = 0$ hasta b para $x = a/2$ $\neq$ Integración desde $y = 0$ hasta b para $x = 0$.

¿Qué tensión es la correcta?

Ninguna

- Problema similar para la corriente y la impedancia
- Buscamos tensiones, corrientes e impedancias equivalentes útiles para líneas no-TEM

4.2. Tensiones y corrientes equivalentes. Concepto de impedancia

- Dado que las tensiones, corrientes e impedancias no son únicas en líneas no-TEM, existen diferentes formas de definir estas cantidades equivalentes
- Consideraciones en las que basar las definiciones
    - *V* e *I* se definen para un único modo. Además:
        - $V \propto$ campo eléctrico transversal
        - $I \propto$ campo magnético transversal
    - El producto de *V* por *I* proporciona el flujo de potencia del modo
    - La relación *V*/*I* para una onda viajera simple será igual a la impedancia característica de la línea. Esta impedancia puede ser arbitraria, pero generalmente se elige igual a la impedancia de onda de la línea o se normaliza a 1
- Campos transversales de un modo en guía de onda arbitraria con ondas viajeras en ambas direcciones

$$\overline{E_t}(x,y,z) = \overline{e}(x,y) \cdot (A^+ \cdot e^{-j\beta z} + A^- \cdot e^{+j\beta z}) = \frac{\overline{e}(x,y)}{C_1} \cdot (V^+ \cdot e^{-j\beta z} + V^- \cdot e^{+j\beta z}) \quad (6.1)$$

$$\overline{H_t}(x,y,z) = \overline{h}(x,y) \cdot (A^+ \cdot e^{-j\beta z} - A^- \cdot e^{+j\beta z}) = \frac{\overline{h}(x,y)}{C_2} \cdot (I^+ \cdot e^{-j\beta z} - I^- \cdot e^{+j\beta z}) \quad (6.2)$$

- *e(x,y)* y *h(x,y)* son las variaciones de los campos transversales del modo
- A^+ y A^- son las amplitudes del campo de las ondas viajeras

4.2. Tensiones y corrientes equivalentes. Concepto de impedancia

- Según se vio en el Tema 3, las componentes transversales están relacionadas mediante la impedancia de onda, Z_ω; se puede definir la siguiente relación:

$$\bar{h}(x,y) = \frac{\hat{z}\times\bar{e}(x,y)}{Z_\omega} \tag{7}$$

- Las ecuaciones (6.1) y (6.2) también definen las ondas de voltaje y corriente como:

$$V(z) = V^+ \cdot e^{-j\beta z} + V^- \cdot e^{+j\beta z} \tag{8.1}$$

$$I(z) = I^+ \cdot e^{-j\beta z} - I^- \cdot e^{+j\beta z} \tag{8.2}$$

- Siendo $\frac{V^+}{I^+} = \frac{V^-}{I^-} = Z_0$ la impedancia característica
- Esta definición incorpora la idea de tensión y corriente equivalentes proporcionales a los campos eléctrico y magnético respectivamente
- Las constantes de proporcionalidad son $C_1 = \frac{V^+}{A^+} = \frac{V^-}{A^-}; C_2 = \frac{I^+}{A^+} = \frac{I^-}{A^-}$ y pueden ser determinadas por condiciones de potencia e impedancia

$$P^+ = \frac{1}{2} \cdot |A^+|^2 \cdot \oint \bar{e}\times\bar{h}^* \cdot \hat{z} \cdot ds = \frac{V^+ \cdot I^{+*}}{2 \cdot C_1 \cdot C_2^*} \cdot \oint \bar{e}\times\bar{h}^* \cdot \hat{z} \cdot ds \tag{9}$$

4.2. Tensiones y corrientes equivalentes. Concepto de impedancia

- Dado que queremos que esta potencia (9) sea igual a ½($V^{+}\cdot I^{+*}$) tendremos

$$C_1 \cdot C_2^* = \oint \bar{e} \times \bar{h}^* \cdot \hat{z} \cdot ds \tag{10}$$

Donde la superficie de integración es la sección transversal de la guía de onda

- Entonces, la impedancia característica viene dada por:

$$Z_0 = \frac{V^+}{I^+} = \frac{V^-}{I^-} = \frac{C_1}{C_2} \tag{11}$$

- Si se desea que $Z_0 = Z_\omega$, la impedancia de onda del modo (Z_{TE} o Z_{TM}), entonces:

$$\frac{C_1}{C_2} = Z_0 = Z_\omega \quad (Z_{TE}\ o\ Z_{TM}) \tag{12.1}$$

- Alternativamente, si se desea normalizar la impedancia característica a la unidad:

$$\frac{C_1}{C_2} = 1 \tag{12.2}$$

- Para un modo de guía de onda dado, (10) y (12) pueden ser resueltas para las constantes C_1 y C_2 y de esta forma quedan definidas las tensiones y corrientes equivalentes

4.2. Tensiones y corrientes equivalentes. Concepto de impedancia

4.2.2 Concepto de Impedancia

- Inicialmente (O. Heaviside, s. XIX) se introdujo el concepto como relación compleja de V/I en circuitos AC
- Posteriormente, Schelkunoff (1930s) reconoció que este concepto se podía extender a los campos electromagnéticos de forma sistemática, y observó que la impedancia era característica del tipo de campo y del medio de propagación
- El concepto de impedancia es el nexo de unión entre la teoría de campos y las líneas de transmisión (teoría de circuitos)
- Resumen de los tipos de impedancia que generalmente se usan:

1. Impedancia intrínseca del medio: $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ (depende exclusivamente del medio)
   - Es igual a la impedancia de onda para ondas planas

4.2. Tensiones y corrientes equivalentes. Concepto de impedancia

4.2.2 Concepto de Impedancia

2. Impedancia de onda: $Z_\omega = \frac{E_t}{H_t} = \frac{1}{Y_\omega}$ (es característica de cada tipo particular de onda)
   - Depende de el tipo de línea o guía, del material y de la frecuencia de trabajo

   a) Impedancia de onda para ondas TEM: no tienen componentes en la dirección de propagación (Ejemplo: ondas planas)

$$Z_{TEM} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{-E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta \qquad (13)$$

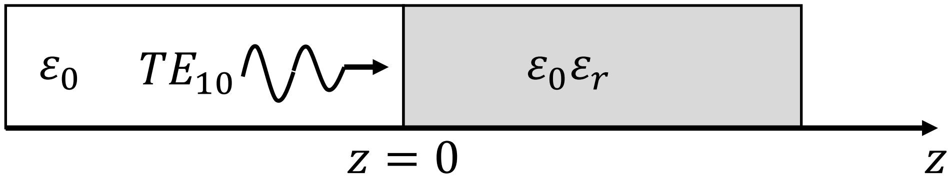
   b) Impedancia de onda para los modos TE y TM:

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{-E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{k \cdot \eta}{\beta} \quad ; \quad Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{-E_y}{H_x} = \frac{\beta}{\mu\varepsilon} = \frac{\beta \cdot \eta}{k} \qquad (14)$$

3. Impedancia característica: $Z_0 = \frac{1}{Y_0} = \sqrt{\frac{L}{C}}$
   - Relación entre la tensión y la corriente de una onda que viaja sobre una línea de transmisión. En el caso TEM, Z_0 es única; en el caso TE y TM no existe definición única

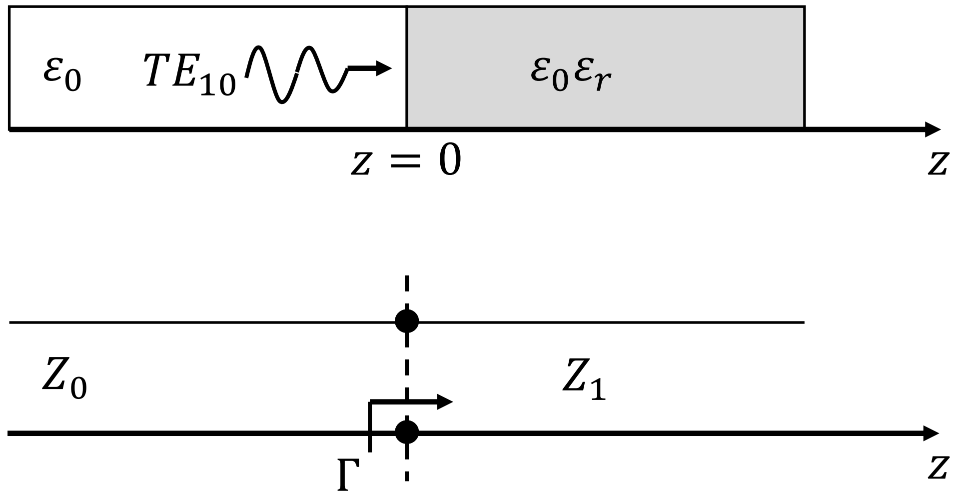
4.2. Tensiones y corrientes equivalentes. Concepto de impedancia

- Ejemplo: Supongamos la guía de onda rectangular en banda X no estándar de dimensiones a = 20mm y b = 10mm, tal y como se muestra en la figura. Para z < 0 el dieléctrico que llena la guía es aire mientras que para z > 0 es teflón (ε_r = 2.1). Si la frecuencia de operación es 9 GHz, utilizar el modelo de línea de transmisión equivalente para calcular el coeficiente de reflexión del modo TE_{10} de la onda incidiendo desde z < 0 en la superficie z = 0.



4.2. Tensiones y corrientes equivalentes. Concepto de impedancia

- <u>Ejemplo</u>:



Para obtener el coef. reflexión hay que calcular primero las impedancias de cada tramo

$$\Gamma = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0}$$

4.2. Tensiones y corrientes equivalentes. Concepto de impedancia

- <u>Ejemplo</u>:

Z_0 es la impedancia del modo TE_{10} en la guía rellena de aire a *f* = 9 GHz

$$Z_{TE} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{\kappa\eta}{\beta}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \rightarrow \eta = 376.7\ \Omega$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g} \qquad \lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \qquad f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$$

m =1
n = 0 $\quad f_c = \frac{c}{2a} = 7.5\ GHz$

$$Z_{TE} = Z_0 = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = 681.5\ \Omega$$

Z_1 es la impedancia del modo TE_{10} en la guía rellena de teflón a *f* = 9 GHz

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}} \rightarrow \eta = 259.9\ \Omega \qquad Z_{TE} = Z_1 = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = 317.7\ \Omega$$

$$f_c = \frac{c}{2a\sqrt{\varepsilon_r}} = 5.17\ GHz$$

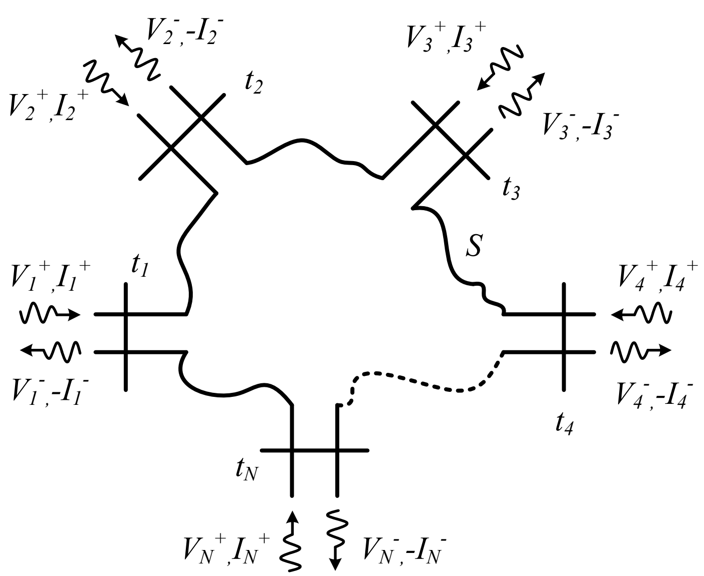
$$\Gamma = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} = -0.364$$

4.3. Parámetros de impedancia y admitancia

- Hemos definido tensiones y corrientes equivalentes (TEM y No-TEM)

- Podemos utilizar matrices impedancia o admitancia

- Podemos aplicar la teoría de circuitos



Red de N puertas

Cada puerta es:
- Una línea de transmisión
- Un modo de guía de onda (si multimodo)

En cada puerta definimos:
- Un plano de referencia: t_i i = 1…N
- Tensiones y corrientes incidentes: V_i^+, I_i^+, i = 1…N
- Tensiones y corrientes reflejadas: V_i^-, I_i^-, i = 1…N

El plano de referencia establece la referencia de fase para los fasores. La tensión y corriente total en cada puerta viene dada por:

$$V_i = V_i^+ + V_i^-$$

$$I_i = I_i^+ - I_i^-$$

4.3. Parámetros de impedancia y admitancia

- La matriz de impedancia [Z] de la red relaciona voltajes y corrientes de la forma

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \cdots & Z_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

Forma matricial

$$[V] = [Z] \cdot [I] \tag{15}$$

- La matriz de admitancia [Y] relaciona las corrientes y voltajes de la forma

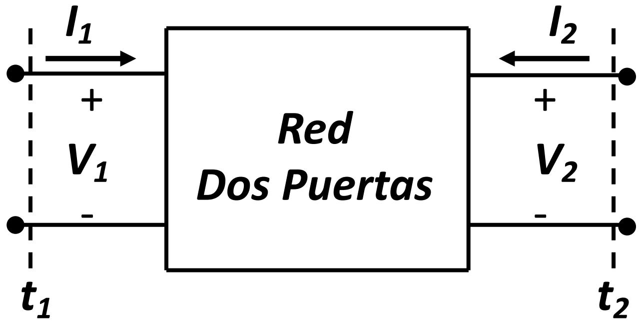
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \cdots & Y_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [I] = [Y] \cdot [V] \tag{16}$$

- De estas definiciones es evidente la relación: $[Y] = [Z]^{-1}$ (17)
- Estas matrices relacionan corrientes y voltajes <u>totales</u>

4.3. Parámetros de impedancia y admitancia

Matriz de impedancias

- En el caso habitual, nos centraremos en una red de dos puertas: N = 2

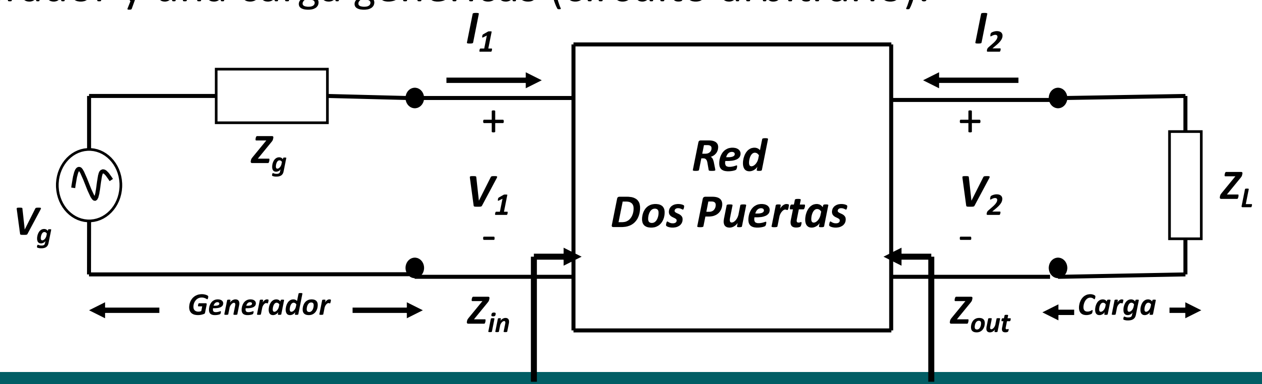


- Particularizando [15] para este caso, tenemos:

$$V_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2$$
$$V_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

- Para entender el significado de los parámetros [Z] es conveniente añadir un generador y una carga genéricas (circuito arbitrario).



4.3. Parámetros de impedancia y admitancia

- Significado de los parámetros de la matriz [*Z*] para *N* = 2.

$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right\|_{I_2=0}$	Impedancia de entrada (Z_{in}) cuando la carga (Z_L) es un circuito abierto. Caracterización: Generador en puerta 1
$Z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right\|_{I_1=0}$	Impedancia de transferencia inversa cuando la entrada (Z_g) es un circuito abierto. Caracterización: Generador en puerta 2
$Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right\|_{I_2=0}$	Impedancia de transferencia directa cuando la carga (Z_L) es un circuito abierto. Caracterización: Generador en puerta 1
$Z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right\|_{I_1=0}$	Impedancia de salida (Z_{out}) cuando la entrada (Z_g) es un circuito abierto. Caracterización: Generador en puerta 2

- En el caso general tendríamos

$$Z_{ij} = \left.\frac{V_i}{I_j}\right|_{I_k=0\ para\ k\neq j} \tag{18}$$

- Dados que los parámetros Z_{ij} son, en general, número complejos, una red de *N* puertas tiene $2N^2$ grados de libertad. En muchos casos habituales este número de grados de libertad se reduce en gran medida.

4.3. Parámetros de impedancia y admitancia

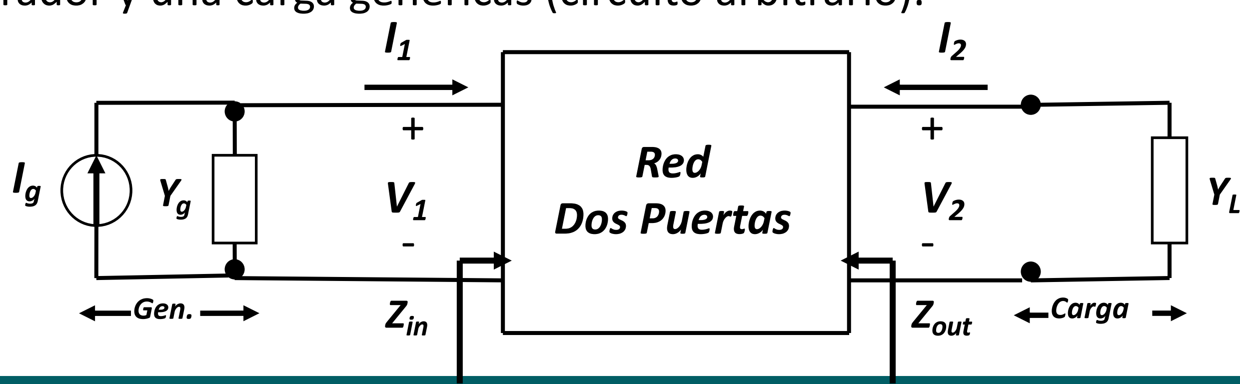
Matriz de admitancias

- En el caso habitual, nos centraremos en una red de dos puertas: N = 2

- Particularizando [16] para este caso, tenemos:

$$I_1 = Y_{11} \cdot V_1 + Y_{12} \cdot V_2$$
$$I_2 = Y_{21} \cdot V_1 + Y_{22} \cdot V_2$$
$$\longrightarrow \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & {}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

- Para entender el significado de los parámetros [Y] es conveniente añadir un generador y una carga genéricas (circuito arbitrario).



4.3. Parámetros de impedancia y admitancia

- Significado de los parámetros de la matriz [*Y*] para *N* = 2.

$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right\|_{V_2=0}$	Admitancia de entrada ($1/Z_{in}$) cuando la carga ($Z_L=1/Y_L$) es un cortocircuito. Caracterización: Generador en puerta 1
$Y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right\|_{V_1=0}$	Admitancia de transferencia inversa cuando la entrada ($Z_g=1/Y_g$) es un cortocircuito. Caracterización: Generador en puerta 2
$Y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right\|_{V_2=0}$	Admitancia de transferencia directa cuando la carga ($Z_L=1/Y_L$) es un cortocircuito. Caracterización: Generador en puerta 1
$Y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right\|_{V_1=0}$	Admitancia de salida ($1/Z_{out}$) cuando la entrada ($Z_g=1/Y_g$) es un cotocircuito. Caracterización: Generador en puerta 2

- En el caso general tendríamos

$$Y_{ij} = \left.\frac{I_i}{V_j}\right|_{V_k=0 \; para \; k\neq j} \tag{19}$$

- Dados que los parámetros Y_{ij} son, en general, número complejos, una red de *N* puertas tiene $2N^2$ grados de libertad. En muchos casos habituales este número de grados de libertad se reduce en gran medida.

4.3. Parámetros de impedancia y admitancia

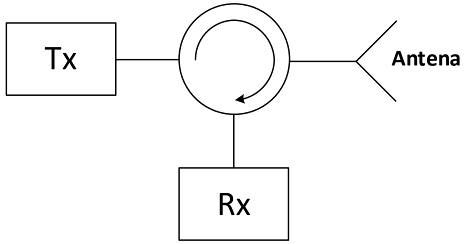
➢ Red recíproca

- Se puede demostrar [D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, 4th Ed., Ch. 4, pp. 175-176] que una red recíproca es aquella que cumple:

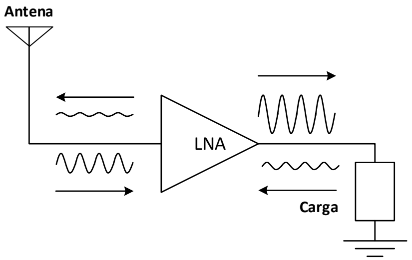
$$\boxed{Y_{ij} = Y_{ji} \quad ; \quad Z_{ij} = Z_{ji} \;\; siendo\; i \neq j} \tag{20}$$

- Es decir, el voltaje que aparece en el puerto 1 debido a la corriente aplicada en el puerto 2 es igual al voltaje que aparece en el puerto 2 debido a la corriente aplicada en el puerto 1. Esta definición es análoga si se intercambian los términos voltaje y corriente.

- En general, los circuitos pasivos son recíprocos. Las excepciones serían elementos como las ferritas, utilizadas por ejemplo en aisladores y circuladores, o los plasmas.



- Los circuitos activos son no recíprocos.



4.3. Parámetros de impedancia y admitancia

➢ Red recíproca y sin pérdidas

- Se demuestra que los parámetros de impedancia y admitancia en este caso con todos imaginarios puros
- La potencia disipada en la red debe ser cero, $Re\{P_{av}\} = 0$

(*)
$$([A]\cdot[B])^t = [B]^t[A]^t$$
$[Z] = [Z]^t$ **recíproca**

$$P_{av} = \frac{1}{2}\cdot[V]^t\cdot[I]^* = \frac{1}{2}\cdot([Z]\cdot[I])^t\cdot[I]^* \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\cdot[I]^t\cdot[Z]\cdot[I]^*$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left([I_1\ I_2]\cdot\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}^*\right) = \frac{1}{2}\cdot(I_1\cdot Z_{11}\cdot I_1^* + I_1\cdot Z_{12}\cdot I_2^* + I_2\cdot Z_{21}\cdot I_1^* + I_2\cdot Z_{22}\cdot I_2^*)$$

- Dado que las corrientes son independientes, las partes reales de cada término han de ser cero de forma independiente

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\cdot Re(I_1\cdot Z_{11}\cdot I_1^*) &= \frac{1}{2}\cdot|I_1|^2\cdot Re(Z_{11}) = 0 \\ \frac{1}{2}\cdot Re(I_2\cdot Z_{22}\cdot I_2^*) &= \frac{1}{2}\cdot|I_2|^2\cdot Re(Z_{22}) = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow Re(Z_{11}) = Re(Z_{22}) = 0$$

$$\frac{1}{2}\cdot Re(I_1\cdot I_2^*\cdot Z_{12} + I_2\cdot I_1^*\cdot Z_{21}) = 0 \xrightarrow{\textbf{recíproca}} \frac{1}{2}\cdot Re[(I_1\cdot I_2^* + I_2\cdot I_1^*)\cdot Z_{21}] = 0$$

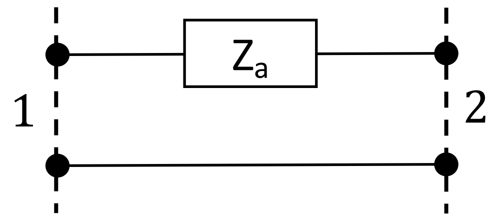
$I_1\cdot I_2^*$ e $I_2\cdot I_1^*$ **Cantidades reales ≠ 0** $\Longrightarrow Re(Z_{12}) = Re(Z_{21}) = 0$

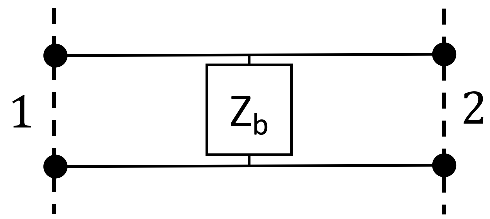
En general:

$$Re(Z_{mn}) = 0\ \forall\,(m,n) \qquad (21)$$

4.3. Parámetros de impedancia y admitancia

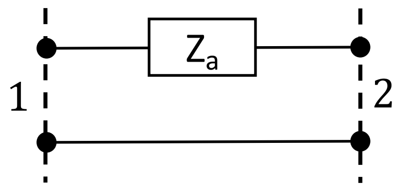
- Ejemplo 1: Calcular los parámetros [Z] e [Y] de los circuitos de elementos simples de las figuras.





4.3. Parámetros de impedancia y admitancia

- Ejemplo 1:



$$V_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2$$
$$V_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2$$

$$I_1 = Y_{11} \cdot V_1 + Y_{12} \cdot V_2$$
$$I_2 = Y_{21} \cdot V_1 + Y_{22} \cdot V_2$$

$$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0}$$

Como $I_1 = -I_2 = 0 \rightarrow Z_{11} = \infty$

Red simétrica $\rightarrow Z_{22} = Z_{11}$

$$Z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0}$$

Como $I_2 = -I_1 = 0 \rightarrow Z_{12} = \infty$

Red recíproca $\rightarrow Z_{21} = Z_{21}$

$$[Z] = \begin{bmatrix} \infty & \infty \\ \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{1}{Z_a}$$

Red simétrica $\rightarrow Y_{22} = Y_{11}$

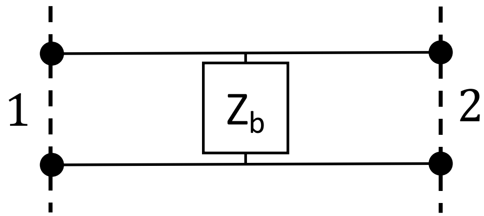
$$Y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} = (I_2 = -I_1) = \frac{-1}{Z_a}$$

Red recíproca $\rightarrow Y_{12} = Y_{21}$

$$[Y] = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{Z_a} & \dfrac{-1}{Z_a} \\ \dfrac{-1}{Z_a} & \dfrac{1}{Z_a} \end{bmatrix}$$

4.3. Parámetros de impedancia y admitancia

- <u>Ejemplo 1</u>:



$$V_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2$$
$$V_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2$$

$$I_1 = Y_{11} \cdot V_1 + Y_{12} \cdot V_2$$
$$I_2 = Y_{21} \cdot V_1 + Y_{22} \cdot V_2$$

$$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = Z_b$$

Red simétrica → $Z_{22} = Z_{11}$

$$Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = (V_2 = V_1) = Z_b$$

Red recíproca → $Z_{21} = Z_{21}$

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_b & Z_b \\ Z_b & Z_b \end{bmatrix}$$

$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0}$$

Como $V_1 = 0 \rightarrow Y_{11} = \infty$

Red simétrica → $Y_{22} = Y_{11}$

$$Y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0}$$

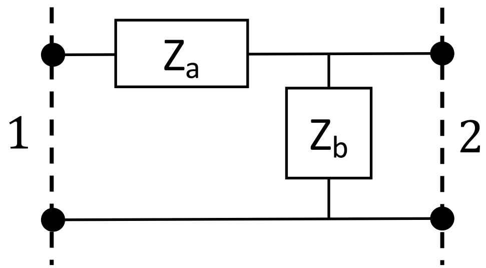
Como $V_1 = 0 \rightarrow Y_{21} = \infty$

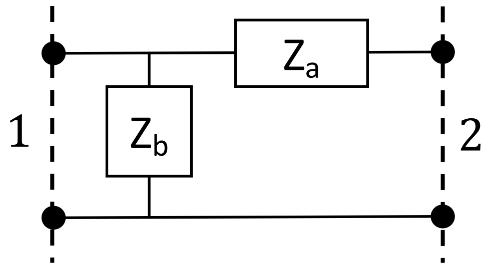
Red recíproca → $Y_{12} = Y_{21}$

$$[Y] = \begin{bmatrix} \infty & \infty \\ \infty & \infty \end{bmatrix}$$

4.3. Parámetros de impedancia y admitancia

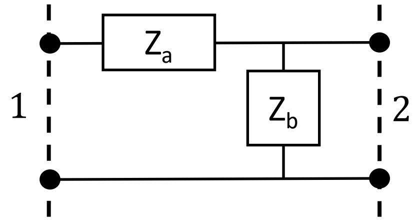
- <u>Ejemplo 2</u>: Calcular los parámetros [Z] e [Y] de los circuitos de elementos en L de las figuras. Calcular la impedancia de entrada cuando la carga es Z_L





4.3. Parámetros de impedancia y admitancia

- Ejemplo 2:



$$V_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2$$
$$V_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2$$

$$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0}$$ $V_1 = I_1(Z_a+Z_b) \rightarrow Z_{11} = Z_a+Z_b$

$$Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}$$ $V_2 = I_1 Z_b \rightarrow Z_{21} = Z_b$

$$Z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0}$$ $V_1 = V_2 = I_2 Z_b \rightarrow Z_{12} = Z_b$

$$Z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0}$$ $V_2 = I_2 Z_b \rightarrow Z_{22} = Z_b$

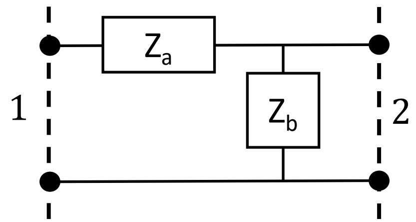
$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_a + Z_b & Z_b \\ Z_b & Z_b \end{bmatrix}$$

La impedancia de entrada con la carga Z_L es el Z_{11} con $Z_b \rightarrow Z_b||Z_L$, por tanto

$$Z_{in} = \frac{Z_a Z_b + Z_a Z_L + Z_b Z_L}{Z_b + Z_L}$$

4.3. Parámetros de impedancia y admitancia

- <u>Ejemplo 2</u>:



$$I_1 = Y_{11} \cdot V_1 + Y_{12} \cdot V_2$$
$$I_2 = Y_{21} \cdot V_1 + Y_{22} \cdot V_2$$

$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{1}{Z_a}$$

$$Y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{-1}{Z_a}$$

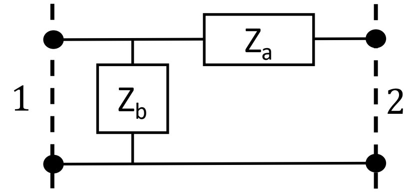
$$Y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} = \frac{-1}{Z_a}$$

$$Y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} = \frac{Z_a + Z_b}{Z_a Z_b}$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} {}^{1}/_{Z_a} & {}^{-1}/_{Z_a} \\ {}^{-1}/_{Z_a} & \dfrac{Z_a + Z_b}{Z_a Z_b} \end{bmatrix}$$

4.3. Parámetros de impedancia y admitancia

- Ejemplo 2:



$$V_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2$$
$$V_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2$$

$$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = Z_b$$

$$Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = Z_b$$

$$Z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = Z_b$$

$$Z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = Z_a + Z_b$$

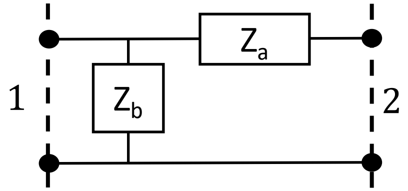
$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_b & Z_b \\ Z_b & Z_a + Z_b \end{bmatrix}$$

La impedancia de entrada con la carga Z_L es $Z_b||(Z_a + Z_L)$, por tanto

$$Z_{in} = \frac{Z_a Z_b + Z_a Z_L + Z_b Z_L}{Z_b + Z_L}$$

4.3. Parámetros de impedancia y admitancia

- <u>Ejemplo 2</u>:



$$I_1 = Y_{11} \cdot V_1 + Y_{12} \cdot V_2$$
$$I_2 = Y_{21} \cdot V_1 + Y_{22} \cdot V_2$$

$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{Z_a + Z_b}{Z_a Z_b}$$

$$Y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{-1}{Z_a}$$

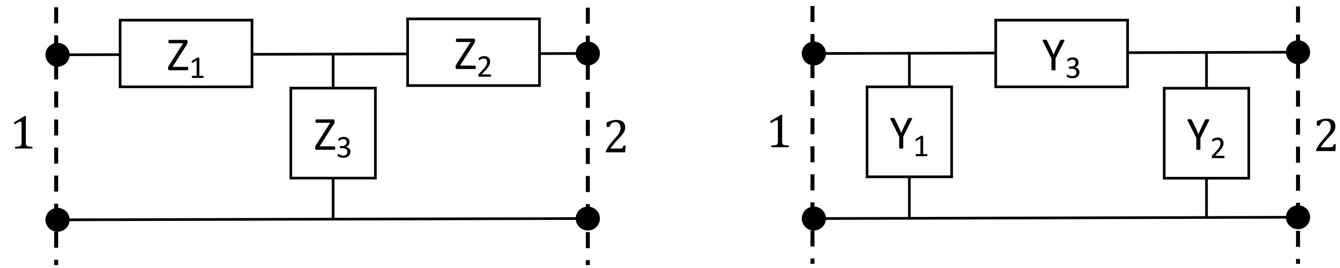
$$Y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} = \frac{-1}{Z_a}$$

$$Y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} = \frac{1}{Z_a}$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} \frac{Z_a + Z_b}{Z_a Z_b} & {}^{-1}/_{Z_a} \\ {}^{-1}/_{Z_a} & {}^{1}/_{Z_a} \end{bmatrix}$$

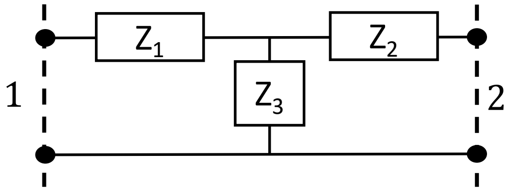
4.3. Parámetros de impedancia y admitancia

- Ejemplo 3: Calcular los parámetros [Z] e [Y] de los circuitos de elementos en T y en Π de las figuras. Calcular la impedancia de entrada cuando la carga es Z_L



4.3. Parámetros de impedancia y admitancia

- Ejemplo 3:



$$V_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2$$
$$V_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2$$

$$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = Z_1 + Z_3$$

$$Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = Z_3$$

$$Z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = Z_3$$

$$Z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = Z_2 + Z_3$$

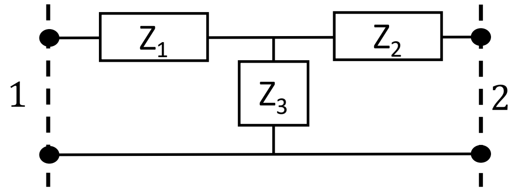
$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}$$

La impedancia de entrada con la carga Z_L es Z_{11}+Z_3||(Z_2 + Z_L), por tanto

$$Z_{in} = \frac{Z_1Z_3 + Z_1Z_2 + Z_1Z_L + Z_3Z_2 + Z_3Z_L}{Z_3 + Z_2 + Z_L}$$

4.3. Parámetros de impedancia y admitancia

- Ejemplo 3:



$$I_1 = Y_{11} \cdot V_1 + Y_{12} \cdot V_2$$
$$I_2 = Y_{21} \cdot V_1 + Y_{22} \cdot V_2$$

$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}$$

$$Y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{-Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}$$

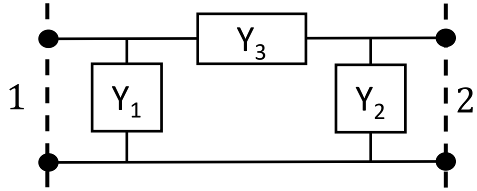
$$Y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} = (red\ recíproca) = Y_{21}$$

$$Y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} = \frac{Z_1 + Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} \frac{Z_2 + Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3} & \frac{-Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3} \\ \frac{-Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3} & \frac{Z_1 + Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3} \end{bmatrix}$$

4.3. Parámetros de impedancia y admitancia

- Ejemplo 3:



$$V_1 = Z_{11}\cdot I_1 + Z_{12}\cdot I_2$$
$$V_2 = Z_{21}\cdot I_1 + Z_{22}\cdot I_2$$

$$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{Y_2+Y_3}{Y_1Y_2+Y_1Y_3+Y_2Y_3}$$

$$Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{Y_3}{Y_1Y_2+Y_1Y_3+Y_2Y_3}$$

$$Z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = (red\ recíproca) = Z_{21}$$

$$Z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{Y_1+Y_3}{Y_1Y_2+Y_1Y_3+Y_2Y_3}$$

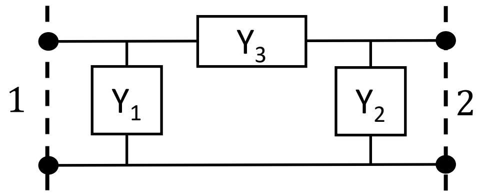
$$[Z] = \begin{bmatrix} \frac{Y_2+Y_3}{Y_1Y_2+Y_1Y_3+Y_2Y_3} & \frac{Y_3}{Y_1Y_2+Y_1Y_3+Y_2Y_3} \\ \frac{Y_3}{Y_1Y_2+Y_1Y_3+Y_2Y_3} & \frac{Y_1+Y_3}{Y_1Y_2+Y_1Y_3+Y_2Y_3} \end{bmatrix}$$

La impedancia de entrada con la carga Z_L es el Z_{11} con $Y_2 \rightarrow Y_2 + 1/Z_L$, por tanto

$$Z_{in} = \frac{Y_3}{\frac{Y_1+Y_1Y_2Z_L}{Z_L} + Y_1Y_3 + \frac{Y_3+Y_2Y_3Z_L}{Z_L}}$$

4.3. Parámetros de impedancia y admitancia

- <u>Ejemplo 3</u>:



$$I_1 = Y_{11} \cdot V_1 + Y_{12} \cdot V_2$$
$$I_2 = Y_{21} \cdot V_1 + Y_{22} \cdot V_2$$

$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} = Y_1 + Y_3$$

$$Y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} = -Y_3$$

$$Y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} = (red\ recíproca) = Y_{21}$$

$$Y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} = Y_2 + Y_3$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_3 & -Y_3 \\ -Y_3 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix}$$

4.4. Parámetros de dispersión o scattering

4.4.1. Introducción

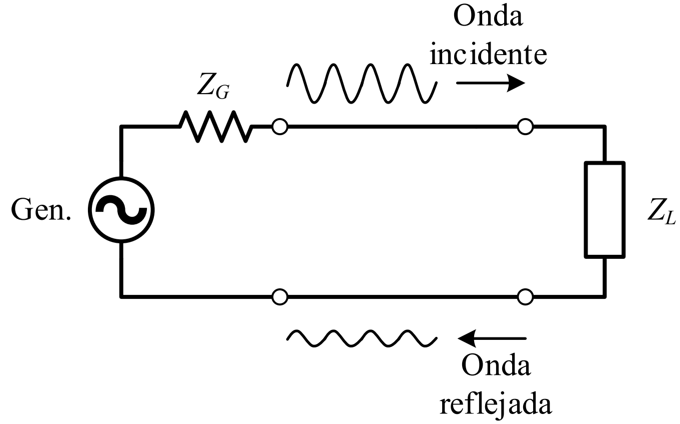
- Se ha visto la dificultad de definir tensiones y corrientes en medios no-TEM
- En RF y microondas la longitud de onda es igual o menor que el tamaño de los circuitos a medir. Los valores de tensiones y corrientes dependen del punto de medida
- En la práctica, la medida de tensiones y corrientes es un gran problema en microondas ya que implica conocer la magnitud (deducida de medidas de potencia) y fase de ondas viajeras en una dirección u ondas estacionarias
- La caracterización de los parámetros [*Z*] o [*Y*] requieren de cortocircuitos o circuitos abiertos adecuados en alta frecuencia
  - Difíciles de conseguir
  - Pueden provocar oscilaciones en dispositivos activos

- Es necesario un nuevo conjunto de parámetros que superen estos problemas y tengan en cuenta el concepto de ondas viajeras (traveling waves):

Parámetros de scattering o dispersión [S]

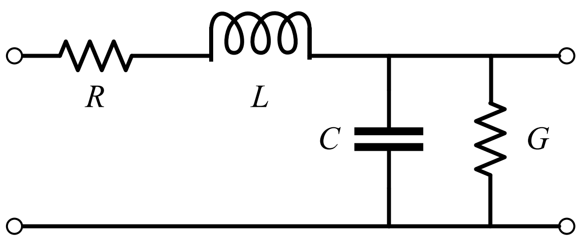
4.4. Parámetros de dispersión o scattering

4.4.2. Conceptos generales de las ondas de potencia



- Las señales de voltaje, corriente y potencia se pueden considerar como ondas viajeras en ambas direcciones. La onda reflejada llega al generador donde, si su impedancia es diferente a la de la línea, se vuelve a reflejar, dando lugar a una onda estacionaria

Modelo de línea de transmisión



En el caso sin pérdidas, sólo tendría L y C, y su impedancia característica se definiría como: Z_0 = sqr(L/C)

Típicamente en microondas: $Z_0 = 50\ \Omega$

4.4. Parámetros de dispersión o scattering

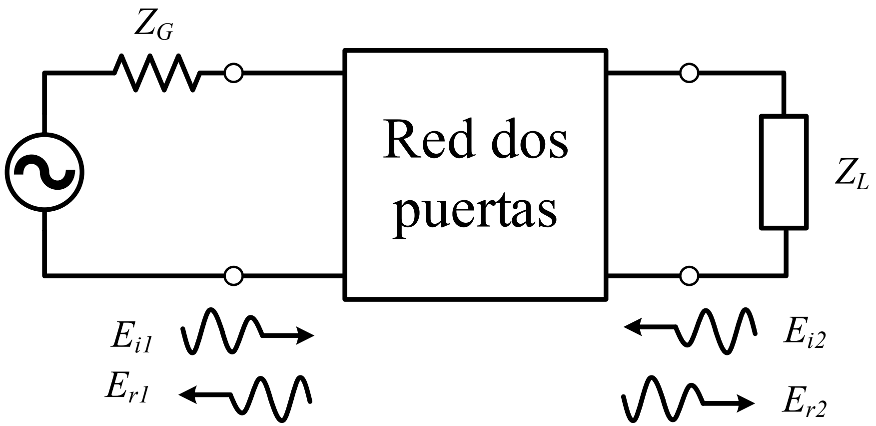
4.4.2. Conceptos generales de las ondas de potencia

- Del patrón de ondas estacionarias se pueden obtener los voltajes y corrientes totales en un punto como sumas o restas de las ondas incidentes y reflejadas en dicho punto

$$V_{\mathrm{t}} = E_{inc} + E_{refl}$$

$$I_{\mathrm{t}} = \frac{E_{inc} - E_{refl}}{Z_0}$$

- Ahora consideremos el caso de insertar una red de dos puertas en el lugar de la línea de transmisión



4.4. Parámetros de dispersión o scattering

4.4.2. Conceptos generales de las ondas de potencia

- Debería ser posible relacionar las cuatro ondas viajeras del anterior esquema de alguna forma. Procediendo a partir de los parámetros H:

$$V_1 = h_{11} \cdot I_1 + h_{12} \cdot V_2$$
$$I_2 = h_{21} \cdot I_1 + h_{22} \cdot V_2$$

Donde:

$$V_1 = E_{i1} + E_{r1} \quad V_2 = E_{i2} + E_{r2}$$
$$I_1 = \frac{E_{i1} - E_{r1}}{Z_0} \quad I_2 = \frac{E_{i2} - E_{r2}}{Z_0}$$

- Podemos transformar las anteriores ecuaciones para que las ondas incidentes sean las variables independientes mientras que las ondas reflejadas sean las variables dependientes.

$$E_{r1} = f_{11}(h) \cdot E_{i1} + f_{12}(h) \cdot E_{i2}$$
$$E_{r2} = f_{21}(h) \cdot E_{i1} + f_{22}(h) \cdot E_{i2}$$

- Las nuevas funciones f_{ij} (i, j = 1…2) representan un nuevo conjunto de parámetros que relacionan ondas viajeras en vez de voltajes y corrientes totales.
- A este nuevo conjunto de parámetros se le llamará parámetros de scattering (dispersión) ya que relacionan aquellas ondas ‘dispersadas’ o ‘reflejadas’ de la red con las ondas incidentes en la misma.

4.4. Parámetros de dispersión o scattering

4.4.2. Conceptos generales de las ondas de potencia

- Si dividimos ambos lados de la ecuación por la raíz de la impedancia característica las relaciones no cambian; es un cambio de variables.

$$a_1 = \frac{E_{i1}}{\sqrt{Z_0}} \qquad a_2 = \frac{E_{i2}}{\sqrt{Z_0}}$$

$$b_1 = \frac{E_{r1}}{\sqrt{Z_0}} \qquad b_2 = \frac{E_{r2}}{\sqrt{Z_0}}$$

- Es importante darse cuenta que el cuadrado de estas variables tiene dimensiones de potencia: $|a_1|^2$ se puede ver como la potencia incidente en el puerto 1 mientras que $|b_1|^2$ sería la potencia reflejada en el mismo.
- Por tanto, estas nuevas ondas podrían llamarse ondas viajeras de potencia.
- Finalmente obtenemos la forma tradicional en que se presentan los parámetros de scattering o parámetros-S (para una red de 2 puertas):

$$b_1 = S_{11} \cdot a_1 + S_{12} \cdot a_2$$
$$b_2 = S_{21} \cdot a_1 + S_{22} \cdot a_2$$

4.4. Parámetros de dispersión o scattering

4.4.3. Definición de los parámetros de dispersión o scattering

- Considerando una red de N puertas, la matriz de scattering se define como

$$[b] = [S] \cdot [a] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1N} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ S_{N1} & S_{N2} & \cdots & S_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \tag{22}$$

- Cada fila *j*-ésima se obtiene como

$$b_j = S_{j1} \cdot a_1 + S_{j2} \cdot a_2 + \cdots + S_{ji} \cdot a_i + \cdots + S_{jN} \cdot a_N$$

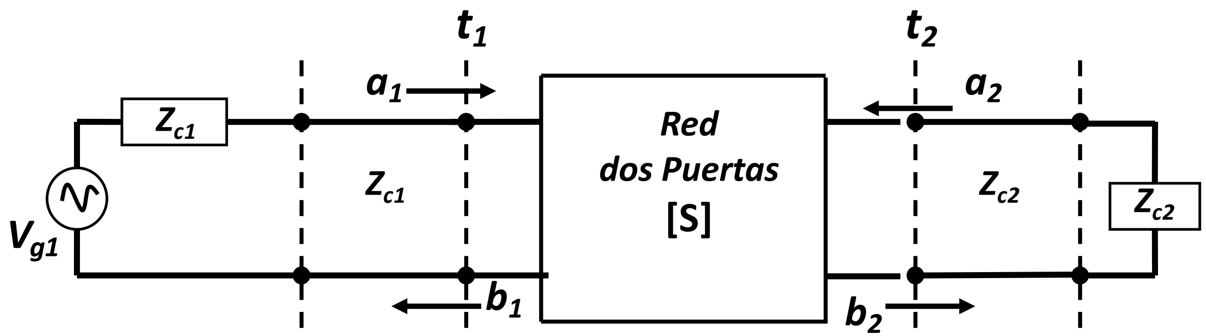
- Por tanto, cada parámetros se calcula como

$$S_{ji} = \left.\frac{b_j}{a_i}\right|_{a_k=0\ (\forall k\ con\ k \neq i)} \tag{23}$$

- El cálculo de cada parámetro S_{ij} implica hacer $a_k = 0$ ($\forall k$, $k \neq i$), es decir, hay que cargar todos los puertos, a excepción del puerto $k = i$, con cargas adaptadas (de la misma impedancia que la líneas de acceso). De esta forma la onda reflejada en cada puerto será nula (no hay onda reflejada en la carga que entre de vuelta a la red). Las cargas adaptadas son relativamente fáciles de conseguir en microondas.

4.4. Parámetros de dispersión o scattering

4.4.4. Significado físico de los parámetros de scattering



➢ S_{11}

$$S_{11} = \left.\frac{b_1}{a_1}\right|_{a_2=0} = \left.\frac{V_1^-/\sqrt{Z_{C1}}}{V_1^+/\sqrt{Z_{C1}}}\right|_{a_2=0} = \Gamma_1$$

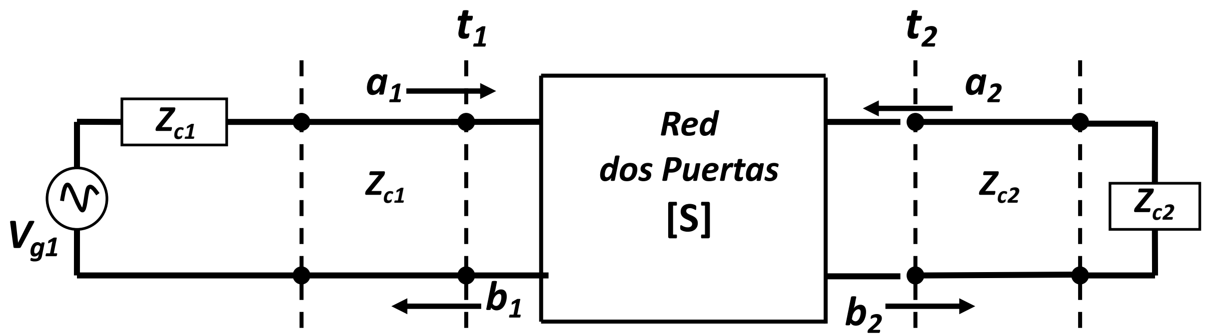
➡ **Con impedancias reales** ➡

$$|S_{11}|^2 = \frac{|b_1|^2}{|a_1|^2} = \frac{P_1^-}{P_1^+} = |\Gamma_1|^2$$

- Este parámetro relaciona, por tanto, la onda reflejada en el puerto 1 con la onda incidente en dicho puerto, por lo que se le conoce como coeficiente de reflexión a la entrada. El coeficiente de reflexión a la entrada nunca puede ser mayor de 1 (salvo en osciladores). Eso supondría que la onda reflejada es mayor que la incidente sin tener nada que genere ese exceso de señal. $0 < |S_{11}| < 1$.

4.4. Parámetros de dispersión o scattering

4.4.4. Significado físico de los parámetros de scattering



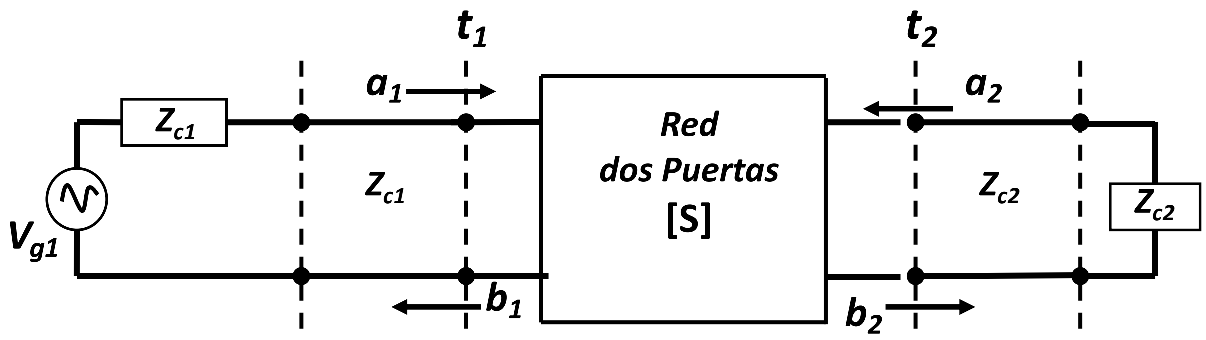
➢ S_{21}

$$S_{21} = \left.\frac{b_2}{a_1}\right|_{a_2=0} = \left.\frac{V_2^- / \sqrt{Z_{C2}}}{V_1^+ / \sqrt{Z_{C1}}}\right|_{a_2=0} = T_{21} \Rightarrow \text{Con impedancias reales} \Rightarrow |S_{21}|^2 = \frac{|b_2|^2}{|a_1|^2} = \frac{P_2^-}{P_1^+} = |T_{21}|^2$$

- Este parámetro relaciona onda transmitida al puerto 2 con la onda incidente en el puerto 1, por lo que se le conoce como coeficiente de transmisión. El coeficiente de transmisión será mayor de 1 si la red tiene ganancia (un amplificador por ejemplo); mientras que será menor o igual que 1 si la red es pasiva (sólo será 1 si la red no tiene pérdidas: la onda transmitida es igual a la incidente).

4.4. Parámetros de dispersión o scattering

4.4.4. Significado físico de los parámetros de scattering



- S_{22}

$$S_{22} = \left.\frac{b_2}{a_2}\right|_{a_1=0} = \left.\frac{V_2^-/\sqrt{Z_{C2}}}{V_2^+/\sqrt{Z_{C2}}}\right|_{a_2=0} = \Gamma_2$$

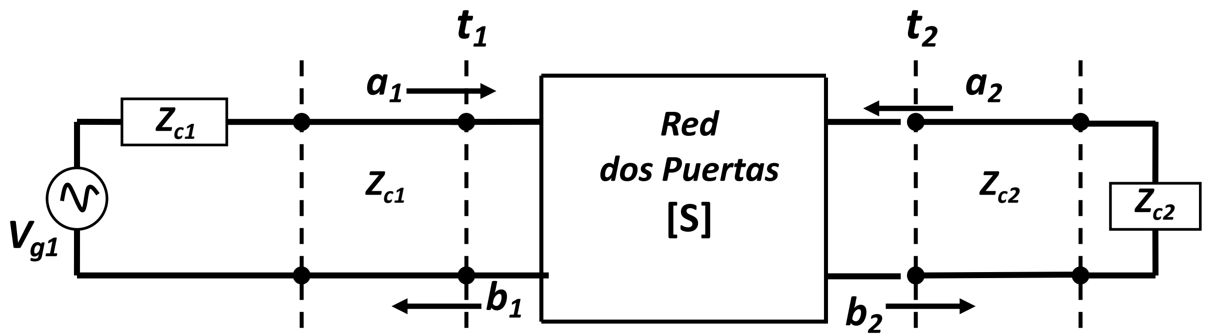
Con impedancias reales

$$|S_{22}|^2 = \frac{|b_2|^2}{|a_2|^2} = \frac{P_2^-}{P_2^+} = |\Gamma_2|^2$$

- Equivalente al S_{11} salvo que ahora el generador se sitúa en el puerto 2. Este parámetro relaciona, por tanto, la onda reflejada en el puerto 2 con la onda incidente en dicho puerto, por lo que se le conoce como coeficiente de reflexión a la salida.

4.4. Parámetros de dispersión o scattering

4.4.4. Significado físico de los parámetros de scattering



➢ S_{12}

$$S_{12} = \left.\frac{b_1}{a_2}\right|_{a_1=0} = \left.\frac{V_1^-\big/\sqrt{Z_{C1}}}{V_2^+\big/\sqrt{Z_{C2}}}\right|_{a_1=0} = \mathrm{T}_{12}$$

➡ **Con impedancias reales** ➡

$$|\mathrm{S}_{12}|^2 = \frac{|b_1|^2}{|a_2|^2} = \frac{P_1^-}{P_2^+} = |\mathrm{T}_{12}|^2$$

- Equivalente al parámetro S_{21} pero con el generador en el puerto 2. Este parámetro relaciona onda transmitida al puerto 1 con la onda incidente en el puerto 2, por lo que se le conoce como coeficiente de transmisión en inversa.

4.4. Parámetros de dispersión o scattering

4.4.5. Propiedades de los parámetros de scattering

a) Red pasiva

- Todos los parámetros S tiene la magnitud igual o menor que 1:

$$|S_{ii}| \leq 1 \quad ; \quad |S_{ji}| \leq 1 \tag{24}$$

b) Red pasiva, lineal y dieléctrico isotrópico $\Rightarrow$ Red recíproca

$$[S] = [S]^t \quad \Rightarrow \quad S_{ij} = S_{ji} \tag{25}$$

Condición adicional: $Z_{C1} = Z_{C2}$

c) Red recíproca y sin pérdidas $\Rightarrow$ Matriz unitaria

$$[S]^+ \cdot [S] = [S] \cdot [S]^+ = [I] \tag{26}$$

+ Matriz adjunta (compleja conjugada de la traspuesta)

4.4. Parámetros de dispersión o scattering

4.4.5. Propiedades de los parámetros de scattering

Consecuencias de la propiedad c)

- Red dos puertas recíproca: $S_{11} = S_{22}$ y $S_{12} = S_{21}$

$$[S] \cdot [S]^{+} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{11}^{*} & S_{21}^{*} \\ S_{12}^{*} & S_{22}^{*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Red dos puertas recíproca y sin pérdidas:

$$S_{11} \cdot S_{11}^{*} + S_{12} \cdot S_{12}^{*} = |S_{11}|^2 + \left|S_{ij}\right|^2_{\substack{i \neq j \\ i=1,2\,;\, j=1,2}} = 1$$

$$S_{22} \cdot S_{22}^{*} + S_{21} \cdot S_{21}^{*} = |S_{22}|^2 + \left|S_{ij}\right|^2_{\substack{i \neq j \\ i=1,2\,;\, j=1,2}} = 1$$

$$S_{11} \cdot S_{21}^{*} + S_{12} \cdot S_{22}^{*} = S_{21} \cdot S_{11}^{*} + S_{22} \cdot S_{12}^{*} = 0$$

- Generalización a N puertas

$$\sum_{i=1}^{N} \left|S_{ij}\right|^2_{\forall j} = 1$$

Vectores columna

$$\sum_{i=1}^{N} S_{ip} \cdot S_{iq}^{*} = 0 \;\; \forall\, p \; y \; q \; con \; p \neq q$$

$$\sum_{j=1}^{N} \left|S_{ij}\right|^2_{\forall i} = 1$$

Vectores fila

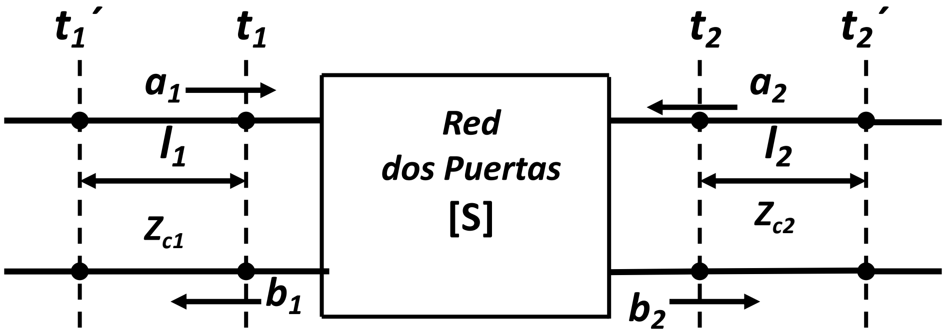
$$\sum_{j=1}^{N} S_{pj} \cdot S_{qj}^{*} = 0 \;\; \forall\, p \; y \; q \; con \; p \neq q$$

4.4. Parámetros de dispersión o scattering

4.4.5. Propiedades de los parámetros de scattering

d) Cambio de planos de referencia

- Si conocemos [S] en unos planos de referencia y desplazamos éstos una ciertas longitudes l_1 y l_2, cómo es la matriz [S’] resultante:



$$[S'] = [P] \cdot [S] \cdot [P] \qquad (27)$$

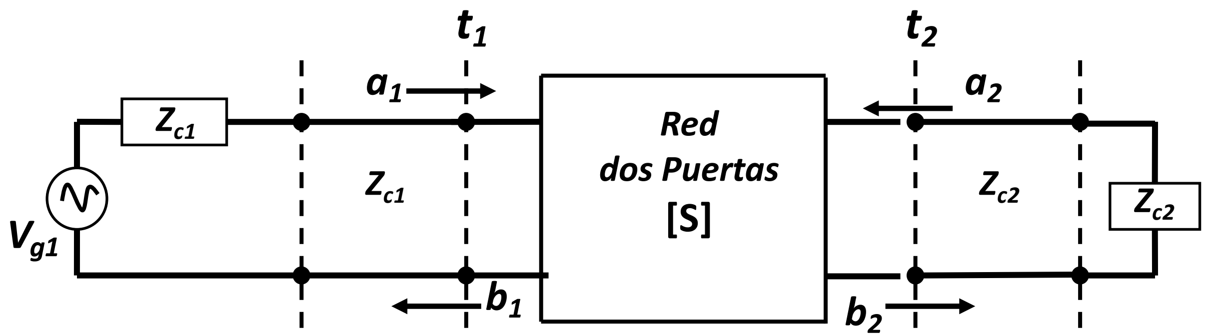
[P] es la matriz diagonal de cambio de planos $[P] = \begin{bmatrix} e^{-\gamma_1 \cdot l_1} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma_2 \cdot l_2} \end{bmatrix}$

Siendo $\gamma_i = j \cdot \beta_i = j \cdot \dfrac{2 \cdot \pi}{\lambda_{gi}}$ la constante de propagación lineal

Las desplazamientos l_1 y l_2 son positivos cuando los nuevos planos están más alejados de la red y negativos en caso contrario.

4.4. Parámetros de dispersión o scattering

4.4.6. Cálculo de los parámetros de scattering en una red de dos puertas



$$S_{11} = \left.\frac{b_1}{a_1}\right|_{a_2=0} = \Gamma_1 = \frac{Z_1 - Z_{c1}}{Z_1 + Z_{c1}}$$

Donde Z_1 es la impedancia desde t_1 hacia el interior de la red cuando ésta está cargada con la impedancia característica en la puerta 2.

Conocido S_{11} podemos obtener S_{21}

$$a_1 + b_1 = \frac{V_1^+ + V_1^-}{\sqrt{Z_{c1}}} = \frac{V_1}{\sqrt{Z_{c1}}} \Rightarrow a_1 = \frac{V_1}{\sqrt{Z_{c1}}} \cdot \frac{1}{(1+S_{11})}$$

$$V_2 = \sqrt{Z_{c2}} \cdot (a_2 + b_2) = \sqrt{Z_{c2}} \cdot b_2 \;\; (ya\ que\ a_2 = 0)$$

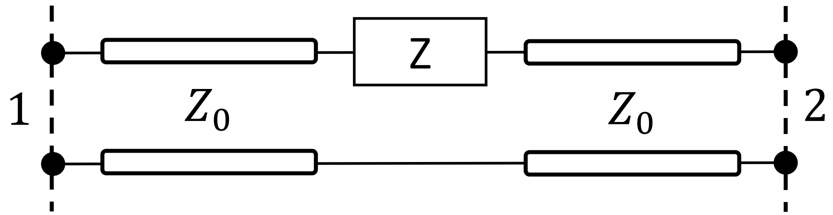
$$S_{21} = \sqrt{\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}} \cdot \frac{V_2}{V_1} \cdot (1 + S_{11})$$

De forma análoga:

$$S_{22} = \left.\frac{b_2}{a_2}\right|_{a_{21}=0} = \Gamma_2 = \frac{Z_2 - Z_{c2}}{Z_2 + Z_{c2}} \qquad S_{12} = \sqrt{\frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}} \cdot \frac{V_1}{V_2} \cdot (1 + S_{22})$$

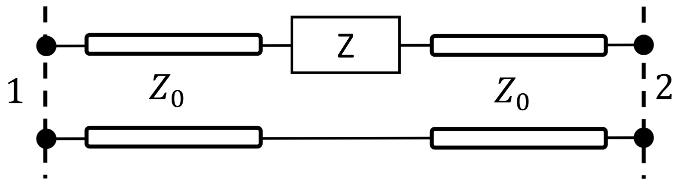
4.4. Parámetros de dispersión o scattering

- Ejemplo 4: Calcular los parámetros [S] del circuito de las figura siendo las líneas de transmisión de acceso $Z_1 = Z_2 = Z_0$.



4.4. Parámetros de dispersión o scattering

- <u>Ejemplo 4</u>:

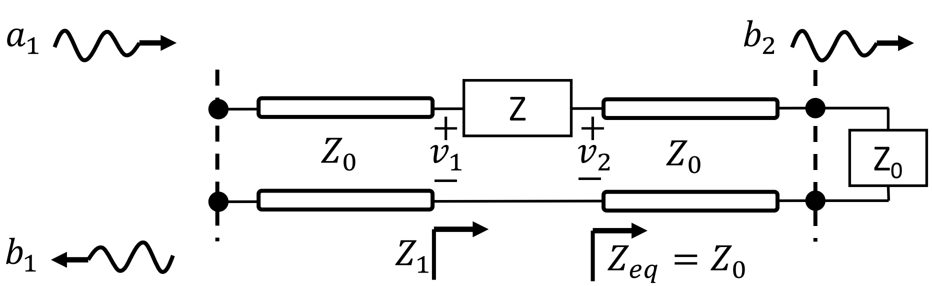


Es una red recíproca, por tanto $S_{21} = S_{12}$

Tiene simetría física respecto a los accesos, por tanto $S_{11} = S_{22}$

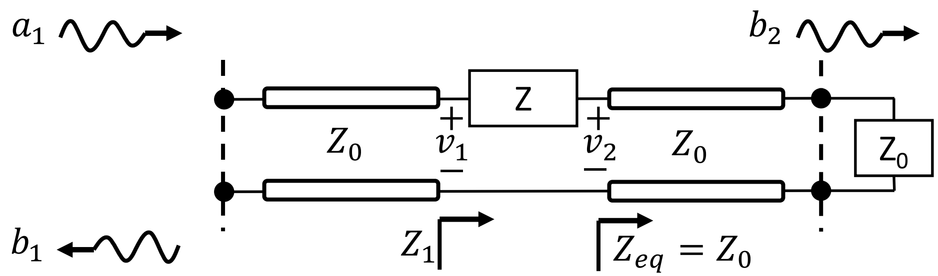
La matriz [S] se simplifica a la siguiente $[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} \\ S_{21} & S_{11} \end{bmatrix}$

Para calcular los parámetros que quedan cargamos con la impedancia de referencia



4.4. Parámetros de dispersión o scattering

- Ejemplo 4:



$$S_{11} = \left.\frac{b_1}{a_1}\right|_{a_2=0} = \rho_1 = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} = \frac{Z}{Z + 2Z_0}$$

$$S_{21} = \left.\frac{b_2}{a_1}\right|_{a_2=0}$$

$$v_1 = v_1^+ + v_1^- = \sqrt{Z_0}a_1 + \sqrt{Z_0}b_1 = \sqrt{Z_0}a_1 + \sqrt{Z_0}a_1\rho_1$$

$$v_1 = \sqrt{Z_0}a_1(1 + S_{11})$$

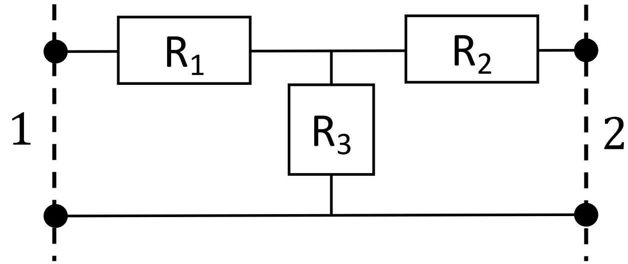
$$v_2 = v_2^+ + v_2^- = \sqrt{Z_0}a_2 + \sqrt{Z_0}b_2 = \sqrt{Z_0}b_2$$

Como $v_2 = v_1 \frac{Z_0}{Z+Z_0}$ (divisor de tensión) $\rightarrow S_{21} = \frac{2Z_0}{Z+2Z_0}$

Por tanto, $[S] = \frac{1}{Z + 2Z_0}\begin{bmatrix} Z & 2Z_0 \\ 2Z_0 & Z \end{bmatrix}$

4.4. Parámetros de dispersión o scattering

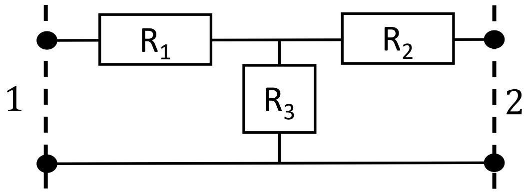
- Ejemplo 5: Calcular los parámetros [S] del circuito de las figura siendo las impedancias del generador y carga iguales de valor R_0 = 50Ω.



$$R_1 = R_2 = 16.6\Omega$$
$$R_3 = 67\Omega$$

4.4. Parámetros de dispersión o scattering

- Ejemplo 5:

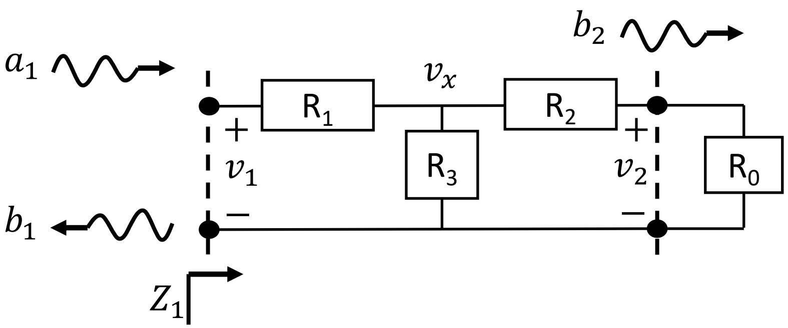


Es una red recíproca, por tanto $S_{21} = S_{12}$

Tiene simetría física respecto a los accesos, por tanto $S_{11} = S_{22}$

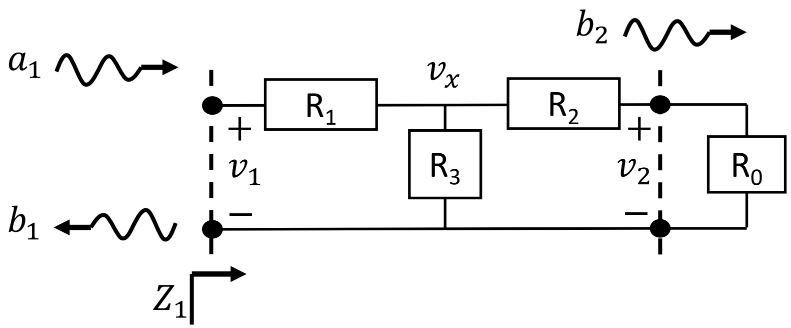
La matriz [S] se simplifica a la siguiente $[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} \\ S_{21} & S_{11} \end{bmatrix}$

Para calcular los parámetros que quedan cargamos con la impedancia de referencia



4.4. Parámetros de dispersión o scattering

- Ejemplo 5:



$$S_{11} = \left.\frac{b_1}{a_1}\right|_{a_2=0} = \rho_1 = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} = 0 \text{ (atenuador adaptado)}$$

$$Z_1 = R_1 + R_3||(R_2 + R_0) = 50\ \Omega$$

$$S_{21} = \left.\frac{b_2}{a_1}\right|_{a_2=0}$$

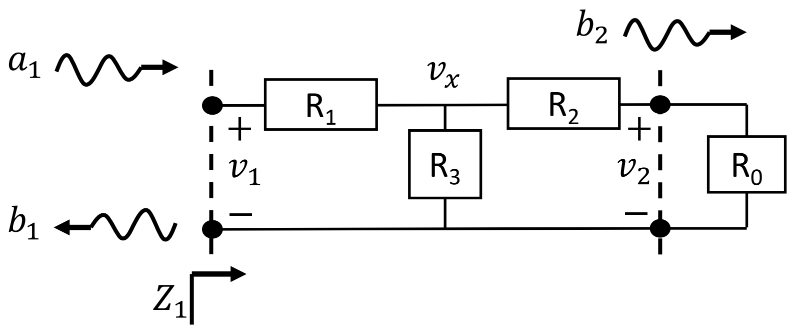
$$v_1 = v_1^+ + v_1^- = \sqrt{R_0}a_1 + \sqrt{R_0}b_1 = \sqrt{R_0}a_1 + \sqrt{R_0}a_1\rho_1$$

$$v_1 = \sqrt{R_0}a_1(1 + S_{11}) \rightarrow a_1 = \frac{v_1}{\sqrt{R_0}(1 + S_{11})}$$

$$v_2 = v_2^+ + v_2^- = \sqrt{R_0}b_2 = \sqrt{Z_0}b_2 \rightarrow b_2 = \frac{v_2}{\sqrt{R_0}}$$

4.4. Parámetros de dispersión o scattering

- Ejemplo 5:



$$S_{21} = \left.\frac{b_2}{a_1}\right|_{a_2=0} = \frac{v_2}{v_1}(1 + S_{11})$$

$$\left.\begin{aligned} v_2 &= v_x \frac{R_0}{R_2 + R_0} \\ v_x &= v_1 \frac{R_3||(R_2 + R_0)}{R_1 + R_3||(R_2 + R_0)} \end{aligned}\right\} \frac{v_2}{v_1} = 0.5$$

Por tanto, $[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$

Atenuador adaptado (S_{11} = 0) de S_{21}(dB) = 20log(0.5) ≈ -6 dB