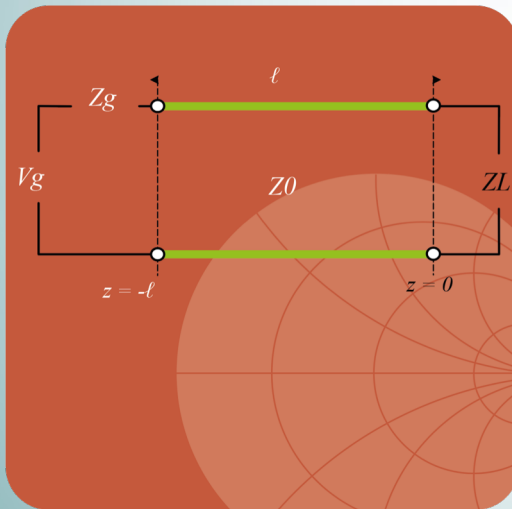


Medios de Transmisión Guiados

Tema 3. Guías de Onda y Líneas de Transmisión



Juan Luis Cano de Diego
Óscar Fernández Fernández
José Antonio Pereda Fernández

DPTO. DE INGENIERÍA DE COMUNICACIONES

Este tema se publica bajo Licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Tema 3. Guías de Onda y Líneas de Transmisión

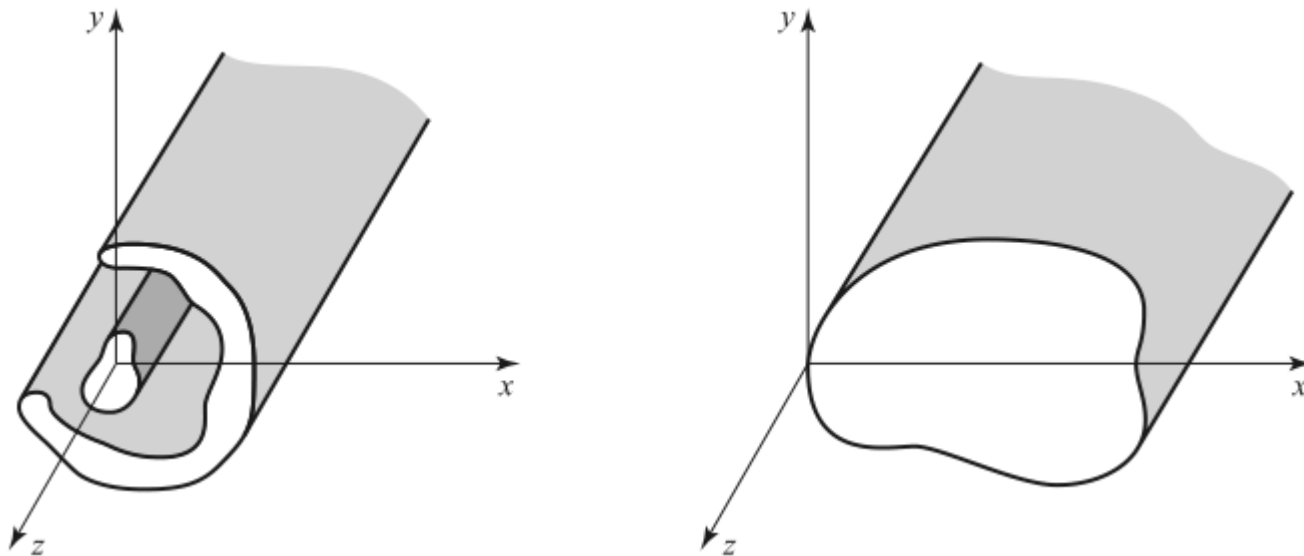
- 3.1 Introducción
- 3.2 Soluciones generales para ondas TEM, TE y TM
- 3.3 La guía de planos paralelos
- 3.4 La guía rectangular
- 3.5 La guía de onda circular
- 3.6 El cable coaxial
- 3.7 Líneas planares
- 3.8 Comparación entre distintos tipos de líneas y guías

Bibliografía Básica para este Tema:

- [1] D. M. **Pozar**, “Microwave Engineering” , 3ª Ed, Wiley, 2005.
 - Tema 3
- [2] R. **Neri**, “Líneas de Transmisión”, McGraw-Hill, México, 1999.
 - Tema 4
- [3] D. K. **Cheng**, “Fundamentos de Electromagnetismo para Ingeniería”, Addison-Wesley Longman de México, 1998
 - Tema 9

3.1 Introducción

- En los temas anteriores hemos estudiado las líneas de transmisión partiendo de un **enfoque circuital**.
- En este tema complementaremos el estudio abordando las líneas de transmisión desde un **punto de vista electromagnético**
- Además extenderemos la idea de línea de transmisión al de guía de onda, estudiando los principales tipos



3.2 Soluciones generales para ondas TEM, TE y TM

- En una línea de transmisión con **propagación según eje z** , los campos eléctrico y magnético son:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) &= [E_x(x, y)\hat{x} + E_y(x, y)\hat{y} + E_z(x, y)\hat{z}]e^{-\gamma z} \\ \vec{H}(x, y, z) &= [H_x(x, y)\hat{x} + H_y(x, y)\hat{y} + H_z(x, y)\hat{z}]e^{-\gamma z} \end{aligned} \right\} \text{Es decir: } F(x, y, z) = F(x, y)e^{-\gamma z}$$

- Nuestro objetivo es conocer
 - Los campos dentro de la línea de transmisión/guía de onda
 - La constante de propagación γ que condiciona la variación de los campos al propagarse

3.2 Soluciones generales para ondas TEM, TE y TM

- Estos campos E y H están relacionados por las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad \nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E}$$

- Aplicando estas ecuaciones, observamos los campos transversales E_x , E_y , H_x y H_y dependen de los longitudinales E_z y H_z :

$$E_x = \frac{-1}{k_c^2} \left(\gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \quad H_x = \frac{1}{k_c^2} \left(j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)$$
$$E_y = \frac{-1}{k_c^2} \left(\gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} - j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad H_y = \frac{-1}{k_c^2} \left(j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} \right)$$

- Siendo $k_c^2 = k^2 + \gamma^2$ el numero de onda de corte (k_c)
- y $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \omega\sqrt{\mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$ representa el número de onda en el material que rellena la línea/guía
- Así, la constante de propagación es: $\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2}$
- Con conocer las componentes longitudinales determinamos el resto.

3.2 Soluciones generales para ondas TEM, TE y TM

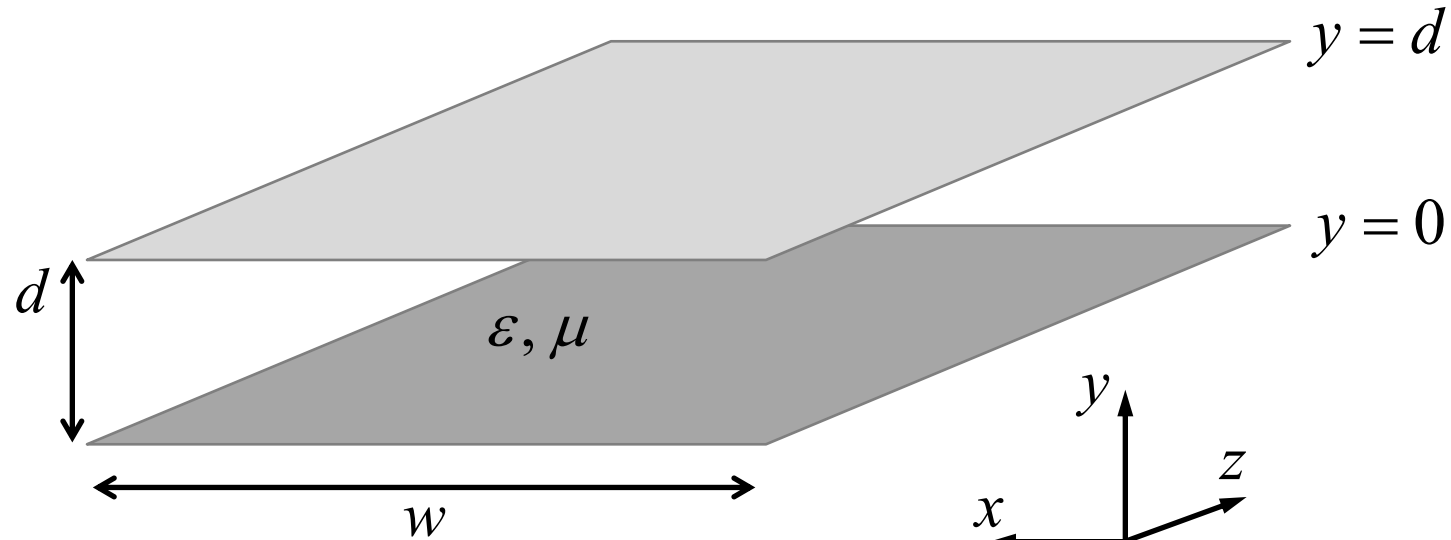
- Obtenemos E_z y H_z resolviendo las ecuaciones de Helmholtz.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) H_z(x, y) = 0$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) E_z(x, y) = 0$$

- Su solución dependen de la geometría de la línea dado que en la resolución necesitamos aplicar las correspondientes condiciones de contorno
- Dependiendo de si las componentes H_z y/o E_z existen, hablamos de
 - Ondas Transversales Electromagnéticas (TEM) $H_z = E_z = 0$
 - Ondas Transversales Eléctricas (TE) $H_z \neq 0; E_z = 0$
 - Ondas Transversales Magnéticas (TM) $H_z = 0; E_z \neq 0$

3.3 La guía de planos paralelos

- Consideramos una guía de onda formada por dos planos conductores mutuamente paralelos, separados una distancia d . ($w \gg d$)



- Suponemos que los campos no varían según x

$$F(y, z) = F(y)e^{-\gamma z}$$

- Esta guía soporta un modo TEM y modos TE y TM

3.3 La guía de planos paralelos. Modo TEM

- Ondas Transversales Electromagnéticas (TEM): Sólo tienen componentes de campo transversales a la dirección de propagación z : $E_z = 0$; $H_z = 0$

$$\vec{E}(x, y, z) = [E_x(x, y)\hat{x} + E_y(x, y)\hat{y} + \cancel{E_z(x, y)\hat{z}}]e^{-\gamma z}$$
$$\vec{H}(x, y, z) = [H_x(x, y)\hat{x} + H_y(x, y)\hat{y} + \cancel{H_z(x, y)\hat{z}}]e^{-\gamma z}$$

- La propagación estudiada con el equivalente circuital, corresponde a propagación de Ondas TEM
- En este caso $k_c = 0 \rightarrow \gamma^2 = -k^2 = -\omega^2 \epsilon \mu \rightarrow \gamma = jk$
- Por tanto, en una línea sin pérdidas

$$\gamma = j\beta \rightarrow \beta = k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

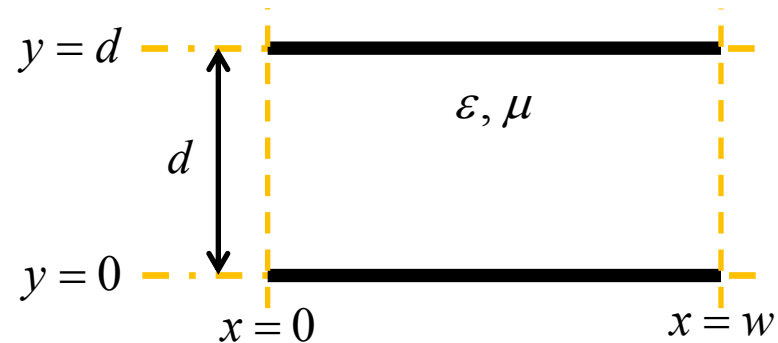
1.- En una onda TEM, la constante de fase de la línea de transmisión, β , es igual a número de onda de una onda plana que viaja a través de un medio, k

2.- El modo TEM no está limitado a ninguna frecuencia

3.3 La guía de planos paralelos. Modo TEM $E_z = 0; H_z = 0$

-El campo eléctrico deriva de un potencial escalar y verifica la ecuación de Laplace

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi(x, y) = 0$$



-En la guía de planos paralelos el potencial no varía con $x \rightarrow \Phi(y)$

-La solución general que verifica la ec. de Laplace es:

$$\Phi(y) = A + By \quad \text{con } A \text{ y } B \text{ ctes.}$$

-Condiciones de contorno:

$$\Phi(0) = 0 \quad \Phi(d) = V_0$$

-Aplicando estas condiciones obtenemos $A=0, B=V_0/d$:

$$\Phi(y) = V_0 y/d$$

3.3 La guía de planos paralelos. Modo TEM $E_z = 0; H_z = 0$

- El **campo eléctrico** transversal se obtiene del gradiente del potencial

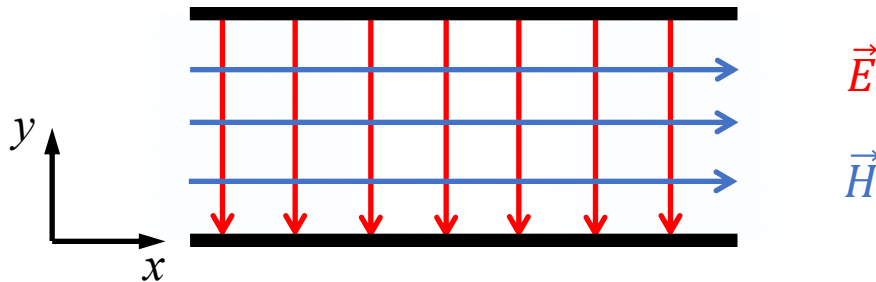
$$\vec{E}(x, y) = -\nabla_t \Phi(x, y) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \hat{y} = -(V_0/d) \hat{y}$$

- Añadiendo la dependencia en el eje z , obtenemos el campo eléctrico total:

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y) e^{-j\beta z} = -(V_0/d) e^{-j\beta z} \hat{y} \quad \beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = k$$

- El **campo magnético** es perpendicular a \vec{z} y a \vec{E}

$$\vec{H}(x, y, z) = \frac{1}{\eta} \hat{z} \times \vec{E}(x, y, z) = \frac{V_0}{\eta d} e^{-j\beta z} \hat{x}$$



- La velocidad de fase resulta $v_p = \omega / \beta = 1 / \sqrt{\mu \epsilon}$

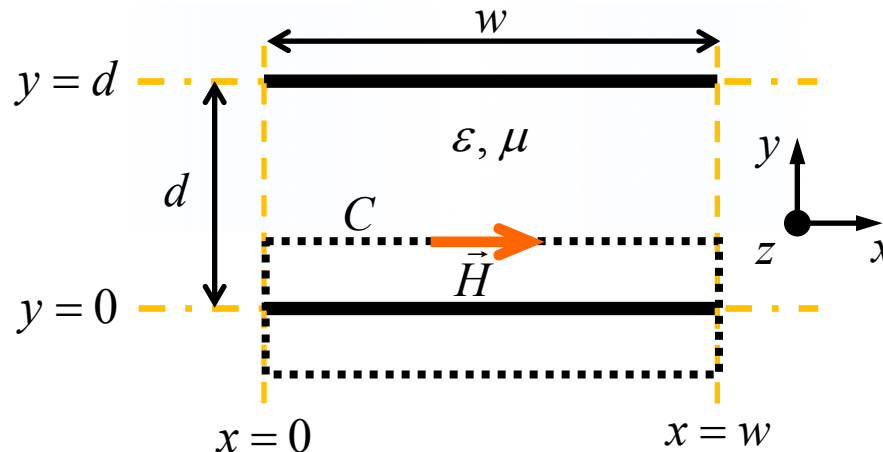
3.3 La guía de planos paralelos. Modo TEM

- La **tensión** entre los 2 conductores se puede obtener al partir de la expresión

$$V_2 - V_1 = \Phi(d) - \Phi(0) = \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{y=0}^{y=d} \vec{E} \cdot d\vec{y} = V_0 e^{-j\beta z}$$

- La **corriente** que circula por uno de los conductores se puede obtener a partir de la ley de Ampere

$$I = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_{x=0}^{x=w} H_x dx = H_x w = \frac{V_0 w}{\eta d} e^{-j\beta z}$$



3.3 La guía de planos paralelos. Modo TEM $E_z = 0; H_z = 0$

- La **impedancia de onda** del modo TEM vale

$$Z_w = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta$$

- La impedancia de onda es igual que la impedancia intrínseca del medio.
- Depende de los materiales que rellenan la línea
- Representa la impedancia que el medio presenta al paso de la onda electromagnética.
- La **impedancia característica** de la línea resulta

$$Z_0 = \frac{V}{I} = \eta \frac{d}{w}$$

- Depende de los materiales que rellenan la guía y su geometría

3.3 La guía de planos paralelos. Modos TM

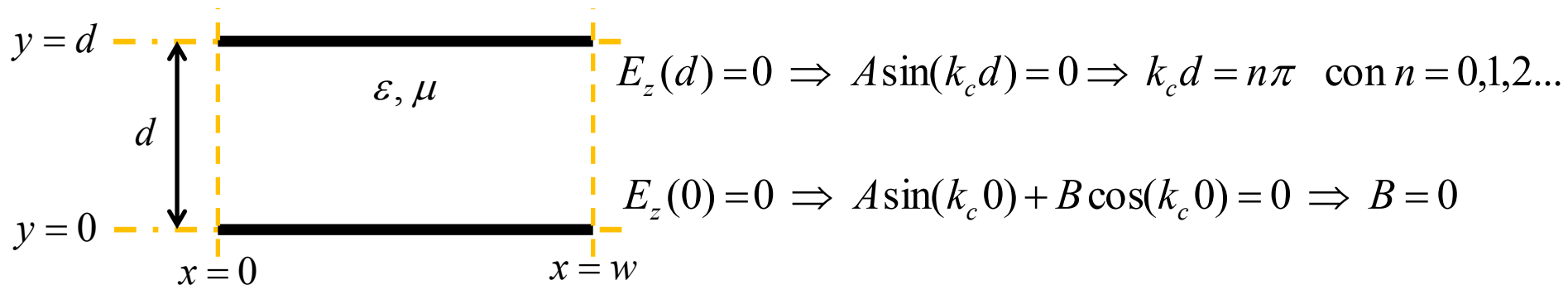
- **Modos TM** $E_z \neq 0; H_z = 0$

- Obtenemos E_z resolviendo la ecuación de Helmholtz:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) E_z(x, y) = 0 \quad k_c^2 = \gamma^2 + k^2$$

- La solución general es de la forma: $E_z(y) = A \sin(k_c y) + B \cos(k_c y)$

- Para determinar A , B y k_c , aplicamos las condiciones de contorno:



- Por tanto, el número de onda de corte sólo puede tomar valores discretos:

$$k_c = \frac{n\pi}{d} \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots$$

3.3 La guía de planos paralelos. Modos TM

- Una vez conocido k_c podemos determinar la cte. de propagación

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 - k^2}$$

Depende de:

- La frecuencia y el material dieléctrico $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$
- La geometría de la línea/guía, k_c

- El campo longitudinal E_z queda:

$$E_z(y, z) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{d} y\right) e^{-\gamma z}$$

- y los campos transversales

$$E_y = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} = -A_n \frac{\gamma}{k_c} \cos\left(\frac{n\pi}{d} y\right) e^{-\gamma z}$$

$$H_x = +\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} = A_n \frac{j\omega\epsilon}{k_c} \cos\left(\frac{n\pi}{d} y\right) e^{-\gamma z}$$

$$E_x = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$$

$$H_y = -\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$$

3.3 La guía de planos paralelos. Modos TM

- Hemos obtenido una familia infinita de modos. Para distinguirlos, añadiremos el subíndice “n” al nombre: TM \rightarrow TM_n

Modo TM₀:

- Para $n = 0$, $k_{c,0} = \frac{0 \cdot \pi}{d} = 0$ por tanto $\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$
- La componente longitudinal $E_z = 0$
- Las componentes transversales, E_y y H_x , son ctes (no varían con y)

$$E_z(y, z) = A_0 \sin\left(\frac{0 \cdot \pi}{d} y\right) e^{-\gamma z} = 0$$

$$E_y = -A_0 \frac{\gamma}{k_c} \cos\left(\frac{0 \cdot \pi}{d} y\right) e^{-\gamma z} = -A_0 \frac{\gamma}{k_c} e^{-\gamma z}$$

$$H_x = A_0 \frac{j\omega\varepsilon}{k_c} \cos\left(\frac{0 \cdot \pi}{d} y\right) e^{-\gamma z} = A_0 \frac{j\omega\varepsilon}{k_c} e^{-\gamma z}$$

- Por tanto, el modo TM₀ es el modo TEM

3.3 La guía de planos paralelos. Modos TM

Modo TM_n ($n \geq 1$)

- En este caso la constante de propagación del modo n-ésimo vale:

$$\gamma_n = \sqrt{k_{c,n}^2 - k^2} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 - k^2} = \alpha_n + j\beta_n$$

- Se pueden dar los siguientes casos

$$k_{c,n} > k \rightarrow \gamma \in \mathfrak{R} \text{ por tanto } \gamma = \alpha$$

Los campos tienen la forma $F(y,z) = F(y) \cdot e^{-\alpha z} \rightarrow$ atenuación exponencial con $z \rightarrow$ ondas evanescentes \rightarrow **No hay propagación:** Modo en corte.

$$k_{c,n} < k \rightarrow \gamma \in \mathfrak{I} \text{ por tanto } \gamma = j\beta$$

$$j\beta_n = \sqrt{k_{c,n}^2 - k^2} \rightarrow \beta_n = \sqrt{k^2 - k_{c,n}^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2}$$

Los campos tienen la forma $F(y,z) = F(y) \cdot e^{-j\beta z} \rightarrow$ variación de fase con $z \rightarrow$ ondas viajeras \rightarrow **Sí hay propagación:** Modo en propagación.

3.3 La guía de planos paralelos. Modos TM

Modo TM_n ($n \geq 1$)

- El paso de corte a conducción se produce cuando $k_{c,n} = k$:
- La frecuencia a la que el modo n -ésimo comienza a propagarse se denomina frecuencia de corte, $f_{c,n}$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{n\pi}{d} = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_r\epsilon_r} = \frac{2\pi f_{c,n}}{c}\sqrt{\mu_r\epsilon_r} \end{aligned} \right\} k_{c,n} = k$$

$$f_{c,n} = \frac{nc}{2d\sqrt{\mu_r\epsilon_r}}$$

- $f_{c,n}$ depende de: las dimensiones de la guía y del relleno

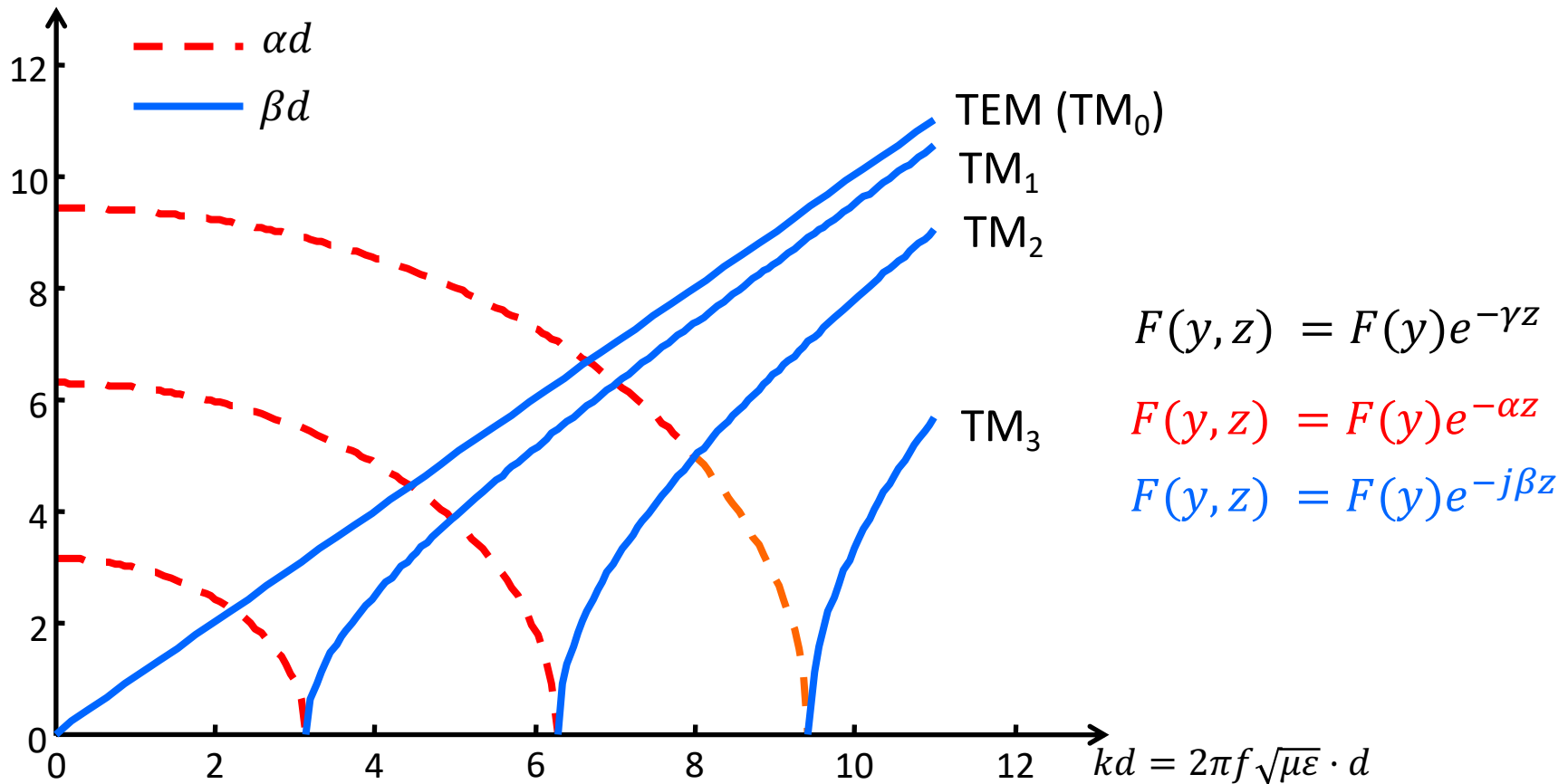
Según la condición anterior

- Si $f < f_{c,n}$ el modo **NO se propaga** (modo evanescente o en corte)
- Si $f > f_{c,n}$ el modo **SÍ se propaga** (modo en propagación)
- La longitud de onda se define como $\lambda_g = 2\pi/\beta$
- Se puede comprobar que como $\lambda_g > \lambda = 2\pi/k$
- También se define la longitud de onda de corte como $\lambda_c = 2\pi/k_c$

3.3 La guía de planos paralelos. Modos TM

- Representamos la constante de propagación \rightarrow Diagrama de dispersión

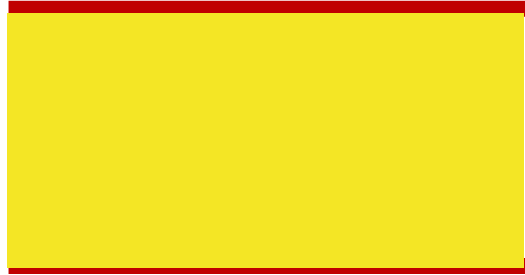
$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 - k^2} \rightarrow \gamma d = \sqrt{(n\pi)^2 - (kd)^2} \begin{cases} \alpha d = \sqrt{(n\pi)^2 - (kd)^2} \\ \beta d = \sqrt{(kd)^2 - (n\pi)^2} \end{cases}$$



3.3 La guía de planos paralelos. Modos TM

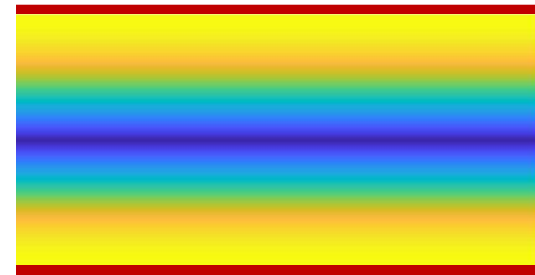
Campo E_y para diferentes modos TM_n

Modo TEM/ TM_0



$E_y = -(V_0/d)e^{-\gamma z}$

Modo TM_1



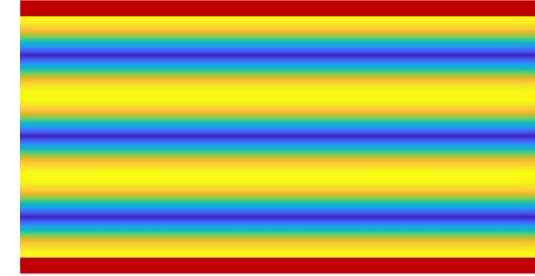
$E_y = -A_n \frac{\gamma}{k_c} \cos\left(\frac{1\pi}{d} y\right) e^{-\gamma z}$

Modo TM_2



$E_y = -A_n \frac{\gamma}{k_c} \cos\left(\frac{2\pi}{d} y\right) e^{-\gamma z}$

Modo TM_3



$E_y = -A_n \frac{\gamma}{k_c} \cos\left(\frac{3\pi}{d} y\right) e^{-\gamma z}$

3.3 La guía de planos paralelos. Modos TM

- La impedancia de onda para los modos TM vale

$$Z_w = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon}$$

- que es real para modos propagantes e imaginaria para modos en corte
- La velocidad de fase

$$v_p = \frac{\omega}{\beta}$$

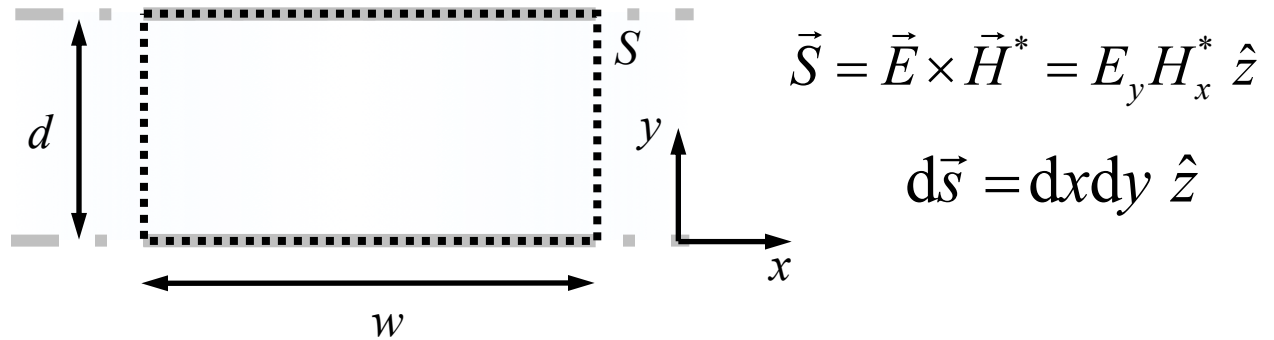
- es función de la frecuencia.
- Se puede ver que la velocidad de fase del modo es mayor que la velocidad de la luz en el medio ω/k ya que $\beta < k$

3.3 La guía de planos paralelos. Modos TM

- El valor medio temporal de la potencia que atraviesa la sección transversal de la guía es:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \iint_S \vec{S} \cdot d\vec{s}$$

- $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^*$ es el vector de Poynting complejo



- por tanto

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{x=0}^w \int_{y=0}^d (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \hat{z} dx dy = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{x=0}^w \int_{y=0}^d E_y H_x^* dx dy$$

- Los campos valen

$$\vec{E} = -A_n \frac{\gamma}{k_c} \cos\left(\frac{n\pi}{d} y\right) e^{-\gamma z} \hat{y} \quad \vec{H} = A_n \frac{j\omega\epsilon}{k_c} \cos\left(\frac{n\pi}{d} y\right) e^{-\gamma z} \hat{x}$$

3.3 La guía de planos paralelos. Modos TM

- luego

$$P = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{x=0}^w \int_{y=0}^d E_y H_x^* dx dy = |A_n|^2 \frac{w \omega \epsilon \beta}{2k_c^2} \int_{y=0}^d \cos^2\left(\frac{n\pi}{d} y\right) dy$$

- Integrando resulta

$$P = |A_n|^2 \frac{w \omega \epsilon \beta d}{4k_c^2} \quad \text{para } n > 0$$

- Si el modo se propaga, $\gamma_n = j\beta_n$, la potencia media temporal es real
- Por el contrario, si el modo es evanescente la potencia media es cero. Un modo evanescente no transporta potencia.

3.3 La guía de planos paralelos. Modos TE

- Modos TE $E_z = 0; H_z \neq 0$

- El proceso a seguir para obtener la solución para los modos TE es análogo al seguido para los modos TM.
- Tienen la misma constante de propagación luego la frecuencia de corte de cada modo será la misma que en los modos TM
- La impedancia de onda es

$$Z_w = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$$

3.3 La guía de planos paralelos

Tabla: D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, 3rd Ed., Wiley&Sons, Inc., 2005

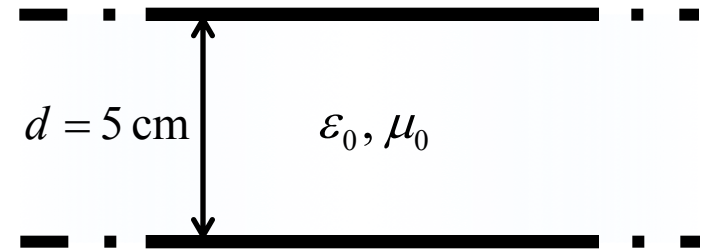
Quantity	TEM Mode	TM _n Mode	TE _n Mode
k	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$
k_c	0	$n\pi/d$	$n\pi/d$
β	$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
λ_c	∞	$2\pi/k_c = 2d/n$	$2\pi/k_c = 2d/n$
λ_g	$2\pi/k$	$2\pi/\beta$	$2\pi/\beta$
v_p	$\omega/k = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$	ω/β	ω/β
α_d	$(k \tan \delta)/2$	$(k^2 \tan \delta)/2\beta$	$(k^2 \tan \delta)/2\beta$
α_c	$R_s/\eta d$	$2k R_s/\beta \eta d$	$2k_c^2 R_s/k\beta \eta d$
E_z	0	$A \sin(n\pi y/d)e^{-j\beta z}$	0
H_z	0	0	$B \cos(n\pi y/d)e^{-j\beta z}$
E_x	0	0	$(j\omega\mu/k_c)B \sin(n\pi y/d)e^{-j\beta z}$
E_y	$(-V_o/d)e^{-j\beta z}$	$(-j\beta/k_c)A \cos(n\pi y/d)e^{-j\beta z}$	0
H_x	$(V_o/\eta d)e^{-j\beta z}$	$(j\omega\epsilon/k_c)A \cos(n\pi y/d)e^{-j\beta z}$	0
H_y	0	0	$(j\beta/k_c)B_n \sin(n\pi y/d)e^{-j\beta z}$
Z	$Z_{\text{TEM}} = \eta d/W$	$Z_{\text{TM}} = \beta \eta/k$	$Z_{\text{TE}} = k\eta/\beta$

- Ejemplo 1: Una onda electromagnética se propaga entre dos placas paralelas separadas 5 cm entre sí. La frecuencia de la onda es 8 GHz. ¿Cuántos modos distintos hay propagándose en la guía?. ¿Cuánto vale la longitud de onda de cada modo?

Neri Ej. 4-5

Solución:

- Se propagarán aquellos modos cuya frecuencia de corte sea menor de 8 GHz



- El modo TEM se propagará, ya que no tiene frecuencia de corte
- Para los modos TE_n y TM_n la frecuencia de corte viene dada por

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2} = 0 \rightarrow \frac{2\pi f_{c,n}}{c} = \frac{n\pi}{d} \rightarrow f_{c,n} = \frac{nc}{2d}$$

- $n = 1$ (TE_1 y TM_1): $f_{c,1} = \frac{c}{2d} = 3 \text{ GHz} < 8 \text{ GHz}$ (se propagan)

- $n = 2$ (TE_2 y TM_2): $f_{c,2} = \frac{c}{d} = 6 \text{ GHz} < 8 \text{ GHz}$ (se propagan)

- $n = 3$ (TE_3 y TM_3): $f_{c,3} = \frac{3c}{2d} = 9 \text{ GHz} > 8 \text{ GHz}$ (no se propagan)

- En resumen, se propagan los modos TEM, TE_1 , TM_1 , TE_2 y TM_2

- La longitud de onda de cada modo vale

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - k_c^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 - \left(\frac{2\pi f_c}{c}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{f^2 - f_c^2}}$$

- **Modo TEM:** $\lambda_{g,0} = \frac{c}{f} = 3.75 \text{ cm}$ (es igual a la longitud de onda en el medio que rellena la guía)

- **Modos TE_1 y TM_1 :** $\lambda_{g,1} = \frac{c}{\sqrt{f^2 - f_{c,1}^2}} = 4.045 \text{ cm}$

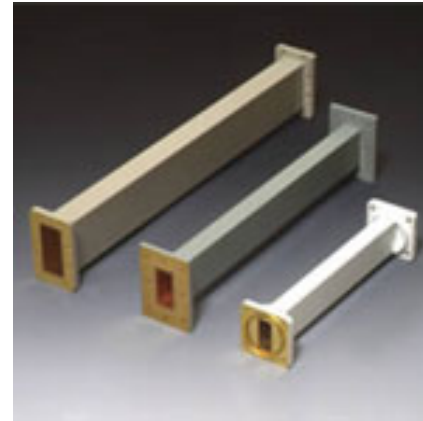
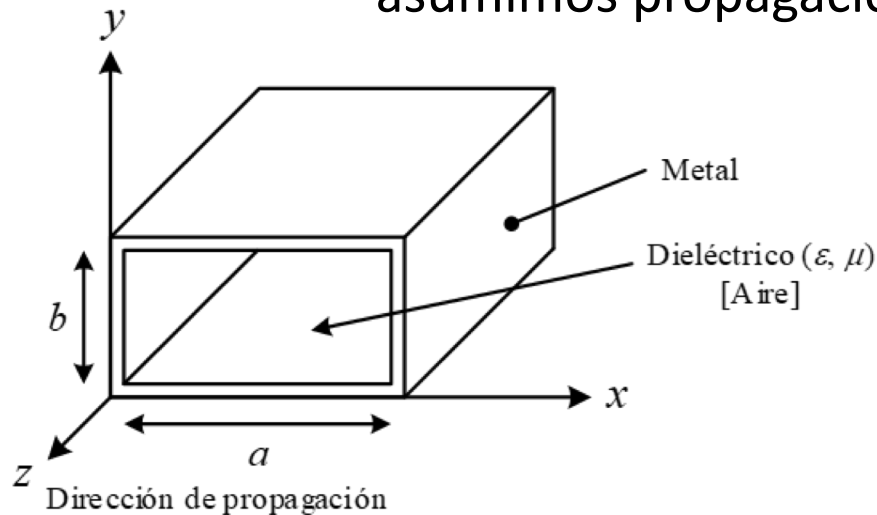
- **Modos TE_2 y TM_2 :** $\lambda_{g,2} = \frac{c}{\sqrt{f^2 - f_{c,2}^2}} = 5.669 \text{ cm}$

3.4 La guía de onda rectangular

- Consideramos una guía de onda de sección rectangular de dimensiones $a \times b$, de contorno conductor y rellena de un material homogéneo.

Por convenio: - lado largo eje x ($a > b$).

- asumimos propagación según $+z$.



$$\vec{E}(x, y, z) = \left[E_x(x, y) \hat{x} + E_y(x, y) \hat{y} + E_z(x, y) \hat{z} \right] e^{-\gamma z}$$

$$\vec{H}(x, y, z) = \left[H_x(x, y) \hat{x} + H_y(x, y) \hat{y} + H_z(x, y) \hat{z} \right] e^{-\gamma z}$$

Componente
transversal

Componente
longitudinal

3.4 La guía de onda rectangular. Soluciones ondas TE y TM

¿Cómo se propagan en el interior de la guía de onda y cómo son las componentes de estos campos?

- Transversales Eléctricas (TE)
- Transversales Magnéticas (TM)

1. Ondas Transversales Eléctricas (TE). (modos H o TE_z)

- El campo eléctrico es transversal a la dirección de propagación (z).
- H tiene componentes transversales y longitudinal

$$\vec{E}(x, y, z) = [E_x(x, y) \hat{x} + E_y(x, y) \hat{y} + E_z(x, y) \hat{z}] e^{-\gamma z}$$

$$\vec{H}(x, y, z) = [H_x(x, y) \hat{x} + H_y(x, y) \hat{y} + H_z(x, y) \hat{z}] e^{-\gamma z}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad \nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} \quad \text{Ec. Maxwell (fasorial)}$$

Ec. Helmholtz

$$(\nabla_t^2 + k_c^2) H_z(x, y) = 0$$

(Sec. 3.2)

$$E_x = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}; \quad H_x = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x};$$

$$E_y = +\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}; \quad H_y = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y};$$

3.4 La guía de onda rectangular. Soluciones ondas TE y TM

$$H_z(x, y, z) = H_z(x, y)e^{-\gamma z}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) H_z(x, y, z) = 0 \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \boxed{\gamma^2 + k^2} \right) H_z(x, y) = 0$$

k_c^2 N° de onda de corte

$$H_z(x, y) = \underbrace{\left[A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x) \right]}_{X(x)} \underbrace{\left[C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y) \right]}_{Y(y)}$$

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2$$

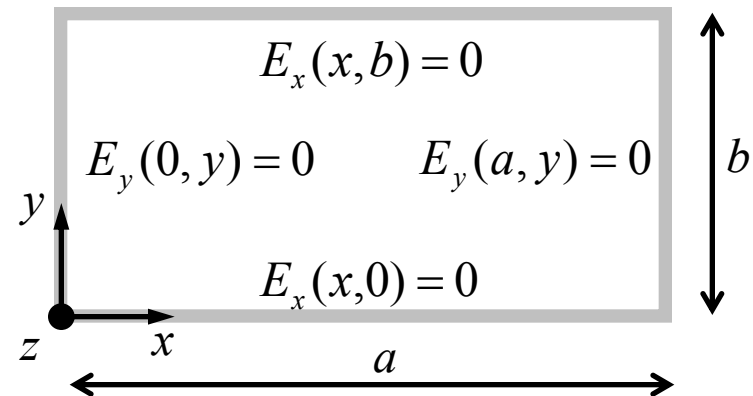
- donde A, B, C y D, k_x y k_y son ctes. a determinar a partir de las condiciones de contorno: Paredes de la guía son PEC

$$E_x(x, y) = 0 \quad \text{en} \quad y = 0, b$$

$$E_y(x, y) = 0 \quad \text{en} \quad x = 0, a$$

$$E_x(x, y) = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial y};$$

$$E_y(x, y) = +\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial x};$$



3.4 La guía de onda rectangular. Soluciones ondas TE y TM

- Para E_x se obtiene

$$E_x = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} k_y [A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x)] [-C \sin(k_y y) + D \cos(k_y y)]$$

- Ahora aplicamos las condiciones de contorno

$$E_x(x, 0) = 0 \Rightarrow -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} k_y [A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x)] D = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$E_x(x, b) = 0 \Rightarrow \frac{j\omega\mu}{k_c^2} k_y [A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x)] [C \sin(k_y b)] = 0$$

- de esta condición se deduce $\sin(k_y b) = 0$, luego

$$k_y = \frac{n\pi}{b} \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots$$

3.4 La guía de onda rectangular. Soluciones ondas TE y TM

- Para E_y se obtiene

$$E_y = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} k_x \left[-A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x) \right] \left[C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y) \right]$$

- Aplicamos las condiciones de contorno análogamente al caso de E_x :

$$E_y(0, y) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$E_y(a, y) = 0 \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a} \text{ con } m = 0, 1, 2, \dots$$

Nº de onda de corte:

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

3.4 La guía de onda rectangular. Soluciones ondas TE y TM

- Recopilando los resultados anteriores podemos poner

$$H_z(x, y, z) = A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-\gamma_{mn} z}$$

$$E_x(x, y, z) = A_{mn} \frac{j\omega\mu}{k_{c,mn}^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-\gamma_{mn} z}$$

$$E_y(x, y, z) = -A_{mn} \frac{j\omega\mu}{k_{c,mn}^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-\gamma_{mn} z}$$

$$H_x(x, y, z) = A_{mn} \frac{\gamma_{mn}}{k_{c,mn}^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-\gamma_{mn} z}$$

$$H_y(x, y, z) = A_{mn} \frac{\gamma_{mn}}{k_{c,mn}^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-\gamma_{mn} z}$$

Modo de propagación:
combinación
de m y n

- En conclusión, los modos TE forman una familia doblemente infinita que denotaremos como TE_{mn} ($m = 0, 1, 2, \dots$ y $n = 0, 1, 2, \dots$)

- El modo TE_{00} no existe ya que tiene todas las componentes transversales de campo son nulas

3.4 La guía de onda rectangular. Soluciones ondas TE y TM

- Recopilando los resultados anteriores podemos poner

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2 \longrightarrow \text{Múltiples modo TE}_{mn}$$

Relación de dispersión

$$\gamma_{mn} = \sqrt{k_{c,mn}^2 - k^2} = \begin{cases} \alpha_{mn} & \text{si } k_{c,mn} > k \rightarrow \text{Atenuación (modos en corte o evanescentes)} \\ j\beta_{mn} & \text{si } k_{c,mn} < k \rightarrow \text{Propagación} \end{cases}$$

$\gamma = \alpha + j\beta$

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_r\varepsilon_r} \quad \text{Número de onda } \in \mathfrak{R}, > 0$$

$$k_{c,mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad \text{Nº de onda de corte } \in \mathfrak{R}, > 0$$

¿Qué implica esto?

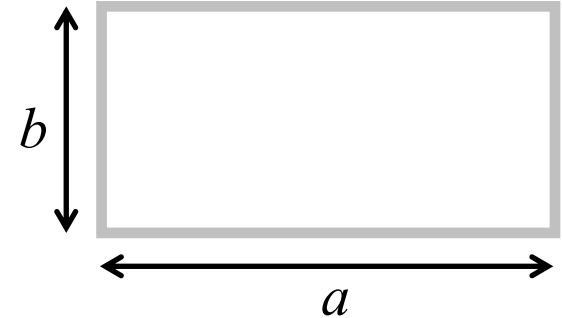
$$f = \frac{k}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \text{Si } k_{c,mn} > k \rightarrow f_{c,mn} > f \rightarrow \text{Modo en corte} \\ \rightarrow \text{Si } k_{c,mn} < k \rightarrow f_{c,mn} < f \rightarrow \text{Modo en propagación} \end{array} \right.$$

$$f_{c,mn} = \frac{k_{c,mn}}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

$$f_{c,mn} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

3.4 La guía de onda rectangular. Soluciones ondas TE y TM

- Diagrama de dispersión modos TE_{mn} ($k \geq k_{c,mn}$)
- Tomamos como ejemplo el caso $a = 2b$



$$j\beta_{mn} = \sqrt{k_{c,mn}^2 - k^2}$$

$$\beta_{mn} = \sqrt{k^2 - k_{c,mn}^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \frac{1}{a} \sqrt{(ka)^2 - (m\pi)^2 - (2n\pi)^2}$$

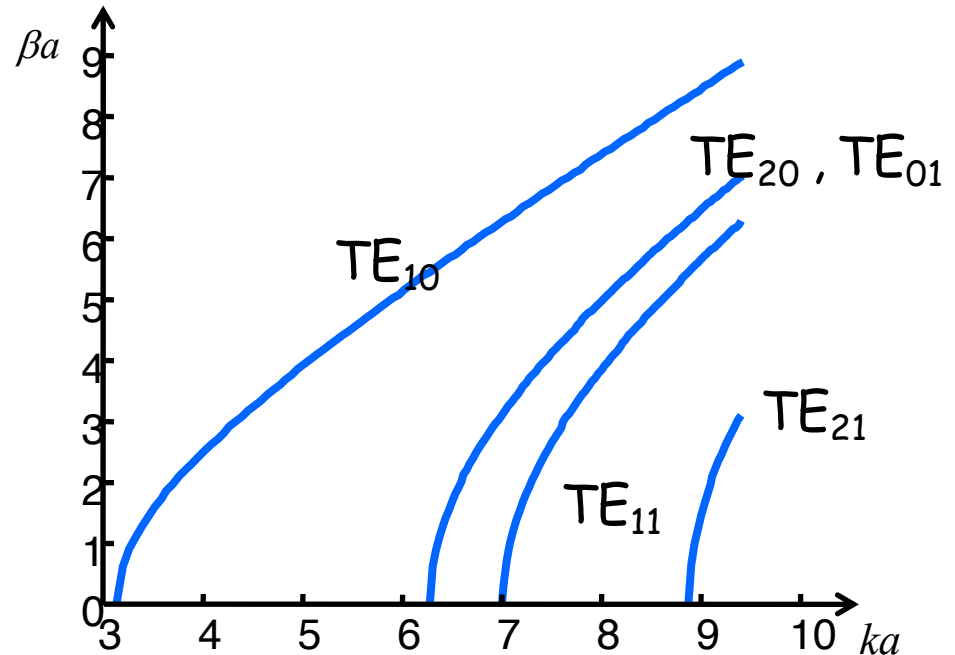
$$\beta a = \sqrt{(ka)^2 - (m\pi)^2 - (2n\pi)^2}$$

$$TE_{10} \quad \beta a = \sqrt{(ka)^2 - (\pi)^2}$$

$$TE_{20} \quad \beta a = \sqrt{(ka)^2 - (2\pi)^2}$$

$$TE_{01}$$

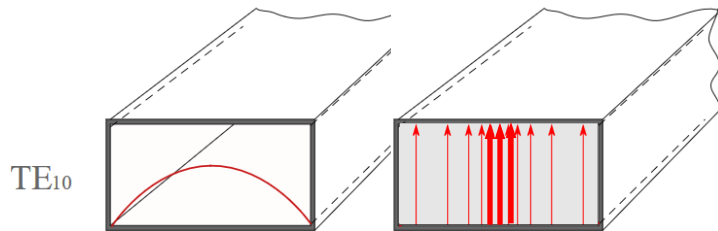
$$TE_{11} \quad \beta a = \sqrt{(ka)^2 - 5\pi^2}$$



3.4 La guía de onda rectangular. Soluciones ondas TE y TM

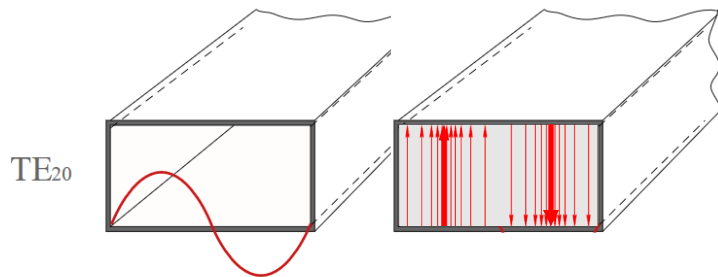
- Veamos tres modos TE_{10} , TE_{20} y TE_{30}

$$E_y(x, y, z) = -A_{mn} \frac{j\omega\mu}{k_{c,mn}^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-\gamma_{mn}z} \quad E_x(x, y, z) = 0$$



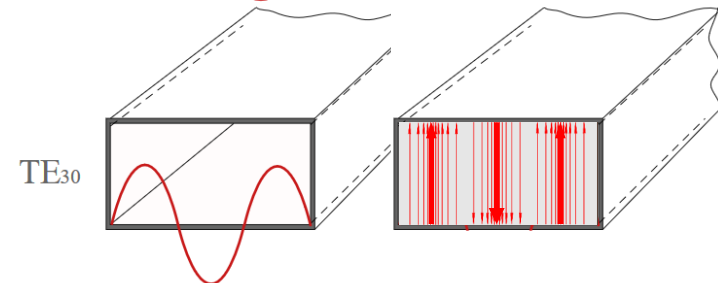
$$E_y(x, y, z) = -A_{10} \frac{j\omega\mu}{k_{c,10}^2} \frac{1 \cdot \pi}{a} \sin\left(\frac{1 \cdot \pi}{a} x\right) e^{-\gamma_{10}z}$$

periodo $2a$



$$E_y(x, y, z) = -A_{20} \frac{j\omega\mu}{k_{c,20}^2} \frac{2 \cdot \pi}{a} \sin\left(\frac{2\pi}{a} x\right) e^{-\gamma_{20}z}$$

periodo a



$$E_y(x, y, z) = -A_{30} \frac{j\omega\mu}{k_{c,30}^2} \frac{3 \cdot \pi}{a} \sin\left(\frac{3\pi}{a} x\right) e^{-\gamma_{30}z}$$

periodo $2a/3$

3.4 La guía de onda rectangular. Soluciones ondas TE y TM

¿Qué es mejor 1 o varios modos? → modo dominante

- El modo TE₁₀ : (Modo dominante)
- Suponiendo $a > b$, el modo dominante en la guía rectangular es el TE₁₀
- En este caso, los campos se reducen a:

$$H_z(x, z) = A_{10} \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-\gamma_{10} z}$$

$$E_y(x, z) = -A_{10} \frac{j\omega\mu}{k_{c,10}^2} \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-\gamma_{10} z}$$

$$H_x(x, z) = A_{10} \frac{\gamma_{10}}{k_{c,10}^2} \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-\gamma_{10} z}$$

$$E_x = E_z = H_y = 0$$

$$\gamma_{10} = \sqrt{k_{c,10}^2 - k^2}$$

$$k_{c,10} = \pi/a$$

- Impedancia de onda: $Z_{w,TE_{10}} = \frac{-E_y}{H_x} = \frac{k \cdot \eta}{\beta} = \frac{j\omega\mu}{\gamma_{10}}$

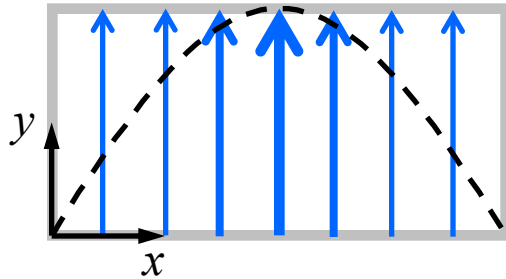
$\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ **Impedancia intrínseca del medio**

3.4 La guía de onda rectangular. Soluciones ondas TE y TM

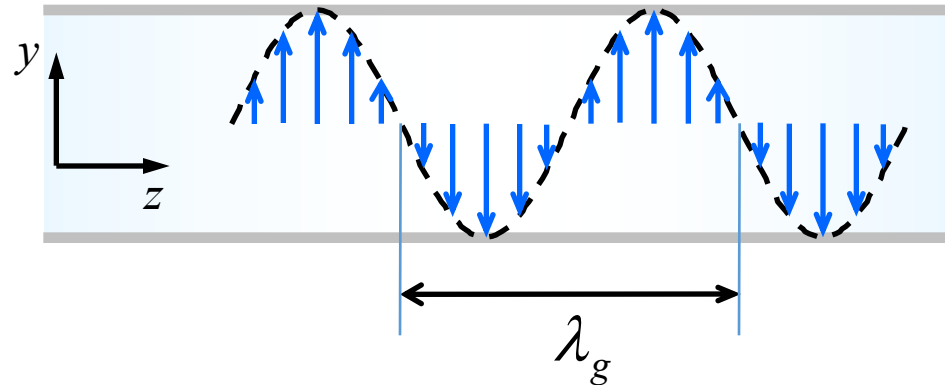
- Campo eléctrico

$$E_y(x, z) \propto \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-j\beta_{10}z}$$

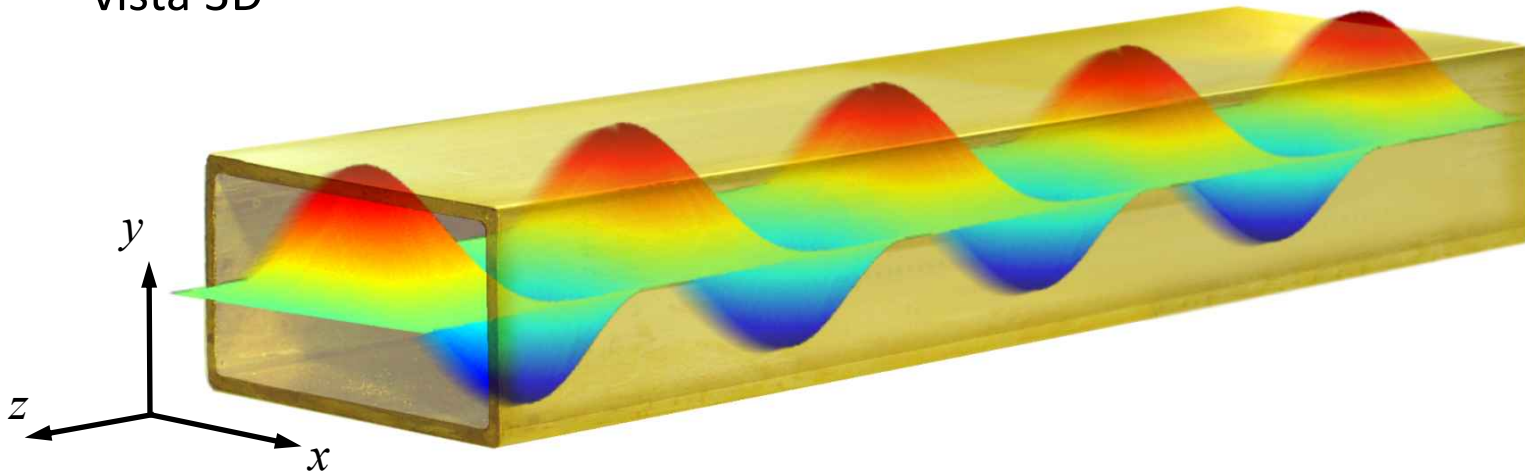
vista frontal



vista lateral



vista 3D

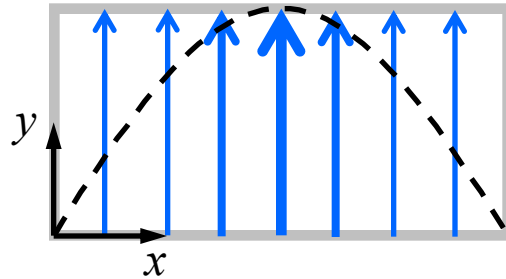


3.4 La guía de onda rectangular. Soluciones ondas TE y TM

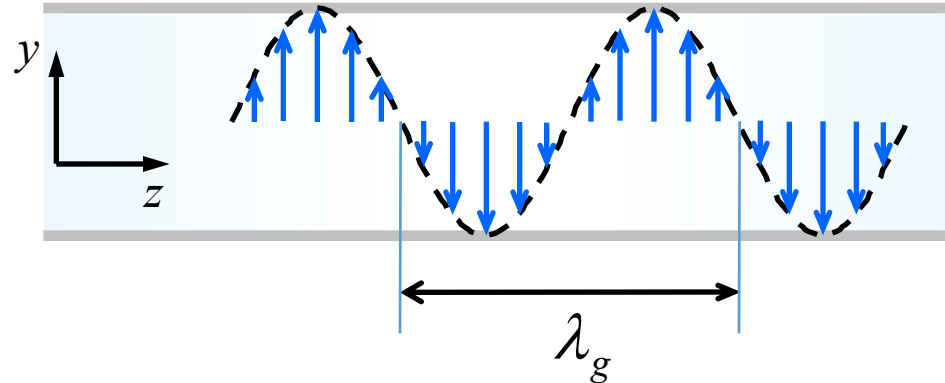
- Campo eléctrico

$$E_y(x, z) \propto \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-j\beta_{10}z}$$

vista frontal



vista lateral

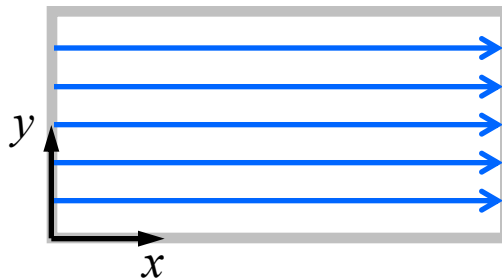


- Campo magnético

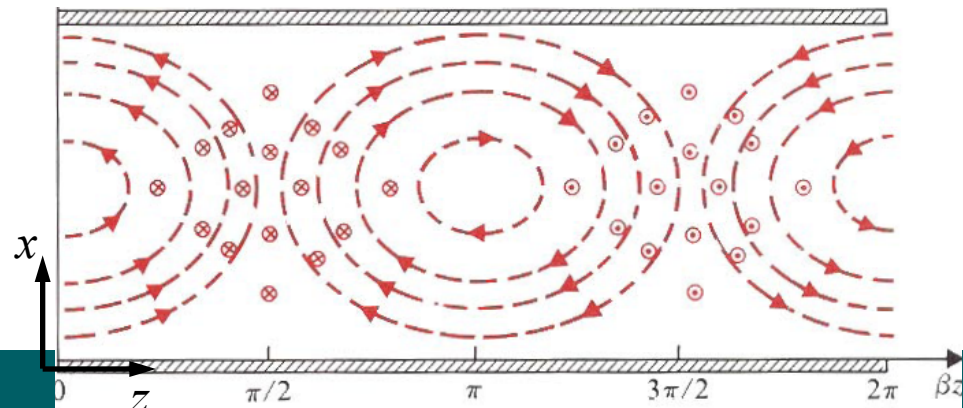
$$H_z(x, z) = A_{10} \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-\gamma_{10}z}$$

$$H_x(x, z) = A_{10} \frac{\gamma_{10}}{k_{c,10}^2} \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-\gamma_{10}z}$$

vista frontal



vista superior



3.4 La guía de onda rectangular. Soluciones ondas TE y TM

- Frecuencia de corte TE₁₀

- Es la frecuencia a la cual la cte. de propagación es nula

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_{10} = \sqrt{k_{c,10}^2 - k^2} = 0 \\ k_{c,10} = \pi/a \end{array} \right\} k_{c,10} = \underbrace{2\pi f_{c,10} \sqrt{\epsilon\mu}}_k \longrightarrow f_{c,10} = \frac{1}{2a\sqrt{\epsilon\mu}}$$

- Para frecuencias $f < f_{c,10}$ el modo **NO se propaga** (modo evanescente)

- Cte de atenuación vale $\alpha_{10} = \sqrt{(\pi/a)^2 - k^2}$

- Para frecuencias $f > f_{c,10}$ el modo **SI se propaga**

- Cte de fase vale $\beta_{10} = \sqrt{k^2 - (\pi/a)^2}$

- Longitud de onda: $\lambda_{g,10} = 2\pi/\beta_{10} \neq \lambda = 2\pi/k$

- Velocidad de fase: $v_{p,10} = \frac{\omega}{\beta_{10}}$

3.4 La guía de onda rectangular. Soluciones ondas TE y TM

Quantity	TE _{mn} Mode	TM _{mn} Mode
k	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$
k_c	$\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$	$\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$
β	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
λ_c	$\frac{2\pi}{k_c}$	$\frac{2\pi}{k_c}$
λ_g	$\frac{2\pi}{\beta}$	$\frac{2\pi}{\beta}$
v_p	$\frac{\omega}{\beta}$	$\frac{\omega}{\beta}$
α_d	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$
E_z	0	$B \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
H_z	$A \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	0
E_x	$\frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 b} A \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta m\pi}{k_c^2 a} B \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
E_y	$\frac{-j\omega\mu m\pi}{k_c^2 a} A \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta n\pi}{k_c^2 b} B \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
H_x	$\frac{j\beta m\pi}{k_c^2 a} A \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{j\omega\epsilon n\pi}{k_c^2 b} B \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
H_y	$\frac{j\beta n\pi}{k_c^2 b} A \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\omega\epsilon m\pi}{k_c^2 a} B \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
Z	$Z_{TE} = \frac{k\eta}{\beta}$	$Z_{TM} = \frac{\beta\eta}{k}$

Tabla: D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, 3rd Ed., Wiley&Sons, Inc., 2005

- Ejemplo 2: A la frecuencia de 10 GHz, el modo TE_{10} se propaga por una guía rectangular de dimensiones $a = 1.5$ cm y $b = 0.6$ cm, rellena de polietileno ($\epsilon_r = 2.25$, $\mu_r = 1$). Calcular la cte de fase, la longitud de onda en la guía, la velocidad de fase y la impedancia de onda

Cheng Ej. 9-4

Solución:

- A la frecuencia de operación, el número de onda en el polietileno vale

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r} = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{\epsilon_r} = \frac{2\pi \times 10^{10}}{3 \times 10^8} \sqrt{2.25} = 100\pi \text{ rad/m}$$

- La cte de fase en la guía resulta

$$\beta_{10} = \sqrt{k^2 - (\pi/a)^2} = 100\pi \sqrt{1 - (1/1.5)^2} = 234.16 \text{ rad/m}$$

- La longitud de onda: $\lambda_{g,10} = 2\pi/\beta_{10} = 0.0268 \text{ m} = 2.68 \text{ cm}$

- La velocidad de fase: $v_{p,10} = \omega/\beta_{10} = 2.68 \times 10^8 \text{ m/s}$

- La impedancia de onda:

$$Z_{w,TE_{10}} = \frac{j\omega\mu}{\gamma_{10}} = \frac{\omega\mu}{\beta_{10}} = \frac{\omega\epsilon\mu}{\beta_{10}\epsilon} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon\mu}}{\beta_{10}} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{k}{\beta_{10}} \eta = 337.4 \Omega$$

- Ejemplo 3: Obtener las expresiones instantáneas de los campos para el modo TE_{10} en una guía rectangular de dimensiones $a \times b$.

Cheng Ej. 9-5

Solución:

- Los campos en el dominio del tiempo se obtienen a partir de la expresión:

$$f(x, z, t) = \text{Re}[F(x, z)e^{j\omega t}]$$

- donde F es la forma fasorial de cualquiera de las componentes del campo.

- Debemos distinguir dos casos: a) modo en corte y b) modo propagante

a) Modo en corte: $k_{c,10} > k \Rightarrow \gamma_{10} = \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e_y(x, z, t) &= \text{Re}\left[-A \frac{j\omega\mu a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-\alpha z} e^{j\omega t}\right] \\ &= \text{Re}\left[|A| \frac{\omega\mu a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \pi/2 + \phi)}\right] \\ &= |A| \frac{\omega\mu a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \pi/2 + \phi) \\ &= |A| \frac{\omega\mu a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-\alpha z} \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

$$h_x(x, z, t) = \operatorname{Re}\left[A \frac{\alpha a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-\alpha z} e^{j\omega t}\right] = |A| \frac{\alpha a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-\alpha z} \cos(\omega t + \phi)$$

$$h_z(x, z, t) = \operatorname{Re}\left[A \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-\alpha z} e^{j\omega t}\right] = |A| \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-\alpha z} \cos(\omega t + \phi)$$

b) Modo en propagante: $k_{c,10} < k \Rightarrow \gamma_{10} = j\beta$ ($\beta \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} e_y(x, z, t) &= \operatorname{Re}\left[-A \frac{j\omega\mu a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\right] \\ &= \operatorname{Re}\left[|A| \frac{\omega\mu a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{j(\omega t - \beta z - \pi/2 + \phi)}\right] \\ &= |A| \frac{\omega\mu a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos(\omega t - \beta z - \pi/2 + \phi) \\ &= |A| \frac{\omega\mu a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin(\omega t - \beta z + \phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_x(x, z, t) &= \operatorname{Re}\left[A \frac{j\beta a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\right] \\ &= |A| \frac{\alpha a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos(\omega t - \beta z + \phi) \end{aligned}$$

$$h_z(x, z, t) = \operatorname{Re}\left[A \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\right] = |A| \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos(\omega t - \beta z + \phi)$$

3.4 La guía de onda rectangular.

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \iint_S \vec{S} \cdot d\vec{s}$$

- Potencia media

$$P_{10} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \hat{z} \, dydx = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b E_y H_x^* \, dydx$$

- Los campos son

$$E_y = -A_{10} \frac{j\omega\mu}{k_{c,10}^2} \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-\gamma_{10}z} \quad H_x = A_{10} \frac{\gamma_{10}}{k_{c,10}^2} \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-\gamma_{10}z}$$

- Sustituyendo arriba

$$P_{10} = |A_{10}|^2 \frac{\omega\mu a^2 \beta}{2\pi^2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) \, dydx$$

- Integrando

$$P_{10} = |A_{10}|^2 \frac{\omega\mu a^3 b}{4\pi^2} \beta$$

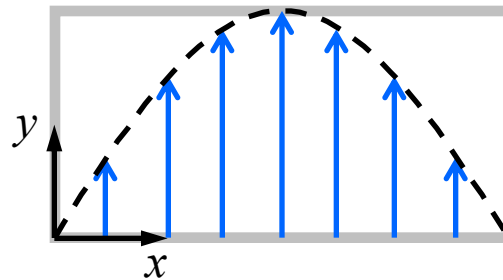
- Los modos evanescentes no llevan potencia real (potencia media)

- Ejemplo 4: Considérese una guía WR 137 ($3.485 \times 1.58 \text{ cm}^2$) rellena de aire. Sabiendo que el campo de ruptura del aire es 1.5 MV/m , calcular la potencia máxima que soporta la guía a la frecuencia de operación de 6 GHz .

Neri Ej 4.17

Solución:

- A 6 GHz esta guía transmite únicamente el modo TE_{10} .



- Según el enunciado, el campo eléctrico máximo es

$$|E_y|_{\max} = |A| \left| \frac{\omega\mu a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \right|_{\max} = |A| \frac{\omega\mu a}{\pi} = 1.5 \text{ MV/m}$$

- Por otra parte, la potencia media vale $P = |A|^2 \frac{\omega\mu a^3 b \beta}{4\pi^2}$

- De las 2 ecs. anteriores, eliminamos A

$$P_{\max} = \left(\frac{\pi |E_y|_{\max}}{\omega\mu a} \right)^2 \frac{\omega\mu a^3 b \beta}{4\pi^2} = \frac{|E_y|_{\max}^2}{\omega\mu} \frac{ab}{4} \beta$$

- La cte de fase a 6 GHz vale

$$\beta = \sqrt{(2\pi f/c)^2 - (\pi/a)^2} = 10\pi \sqrt{16 \cdot 10^2 \times (1/3.485)^2} = 87.55 \text{ rad/m}$$

- Sustituyendo los datos, resulta

$$P_{\max} = \frac{|E_y|_{\max}^2}{\omega\mu} \frac{ab}{4} \beta = 572.4 \text{ kW}$$

3.4 La guía de onda rectangular.

- Modos TM $E_z \neq 0; H_z = 0$
- La solución para estos modos se obtiene siguiendo los mismos pasos que para el caso TE.
- Comenzamos resolviendo la ec. de Helmholtz para E_z :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) E_z(x, y) = 0$$

- Aplicamos el método de separación de variables e imponemos las condiciones de contorno

- Se obtiene: $E_z(x, y, z) = B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-\gamma_{mn} z}$

$$\gamma_{mn} = \sqrt{k_{c,mn}^2 - k^2} \qquad k_{c,mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

- Las componentes transversales se obtienen sustituyendo esta solución en las ecs. de Maxwell

3.4 La guía de onda rectangular.

- Al igual que en el caso TE, los modos TM forman una familia doblemente infinita que denotamos como TM_{mn} ($m = 1, 2, \dots$ y $n = 1, 2, \dots$)
- Los modos TM_{00} , TM_{m0} y TM_{0n} no existen

- Impedancia de onda

$$Z_{w, TM_{mn}} = \frac{\gamma_{mn}}{j\omega\epsilon}$$

- La frecuencia de corte, longitud de onda, velocidad de fase, etc... tienen la misma expresión que para los modos TE_{mn}

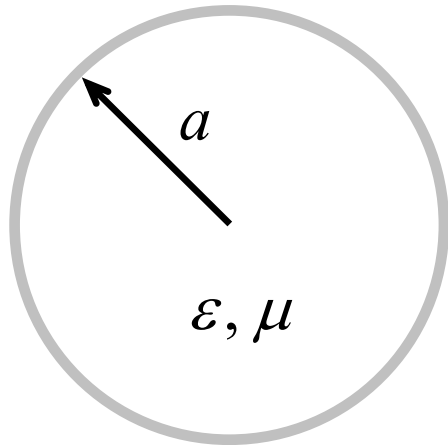
3.4 La guía de onda rectangular.

Quantity	TE _{mn} Mode	TM _{mn} Mode
k	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$
k_c	$\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$	$\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$
β	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
λ_c	$\frac{2\pi}{k_c}$	$\frac{2\pi}{k_c}$
λ_g	$\frac{2\pi}{\beta}$	$\frac{2\pi}{\beta}$
v_p	$\frac{\omega}{\beta}$	$\frac{\omega}{\beta}$
α_d	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$
E_z	0	$B \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
H_z	$A \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	0
E_x	$\frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 b} A \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta m\pi}{k_c^2 a} B \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
E_y	$\frac{-j\omega\mu m\pi}{k_c^2 a} A \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta n\pi}{k_c^2 b} B \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
H_x	$\frac{j\beta m\pi}{k_c^2 a} A \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{j\omega\epsilon n\pi}{k_c^2 b} B \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
H_y	$\frac{j\beta n\pi}{k_c^2 b} A \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\omega\epsilon m\pi}{k_c^2 a} B \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
Z	$Z_{TE} = \frac{k\eta}{\beta}$	$Z_{TM} = \frac{\beta\eta}{k}$

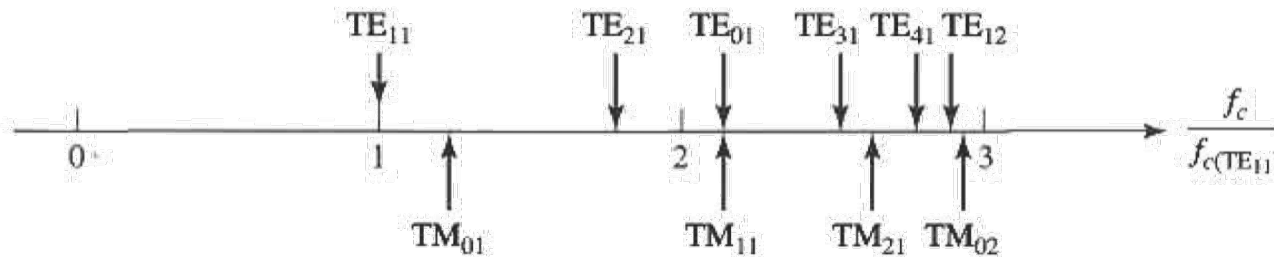
Tabla: D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, 3rd Ed., Wiley&Sons, Inc., 2005

3.5 La guía de onda circular.

- El análisis de esta guía es análogo al realizado en el caso de la guía rectangular.
- La diferencia está en que, debido a su geometría, es conveniente estudiar la guía circular en coordenadas cilíndricas.



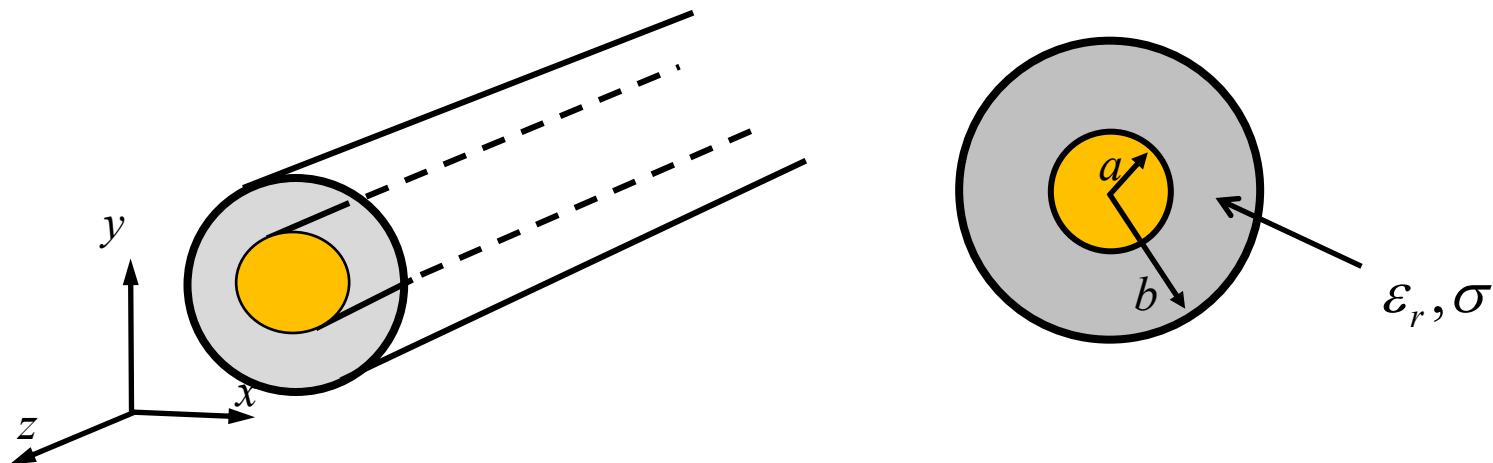
- Al igual que en la guía rectangular existen dos familias de soluciones: los modos TE_{mn} y los modos TM_{mn}



$$f_{c,mn} = \frac{p'_{mn}}{2\pi a \sqrt{\mu\epsilon}}$$

3.6 El cable coaxial

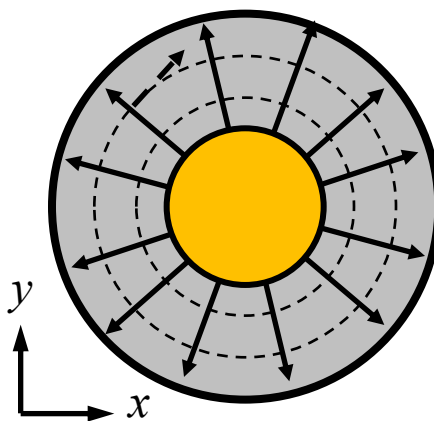
- Se trata de una guía formada por dos conductores + dieléctrico separador.



- El campo se transmite según el modo TEM: campo eléctrico y magnético son perpendiculares a la dirección de propagación.

$$\vec{H}(x, y) = \frac{1}{\eta} \hat{z} \times \vec{E}(x, y)$$

$$\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$$



Condiciones TEM

1. Campo dentro de dielectrico isotrópico
2. Dos o más conductores
3. Sección uniforme

3.6 El cable coaxial. Modo TEM.

Análisis campos

- Impedancia de onda

$$Z_w = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta$$

- La tensión entre los 2 conductores

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

- y la corriente (ley de Ampere)

$$I = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell}$$

Análisis circuital

R	$\frac{R_s}{2\pi} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$
L	$\frac{\mu}{2\pi} \ln(b/a)$
G	$\frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}$
C	$\frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}$

- En línea sin pérdidas, la impedancia característica

$$Z_0 = \frac{V}{I} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \text{ Ohms}$$

- Cte. de fase

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

Velocidad de fase

$$v_p = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$$

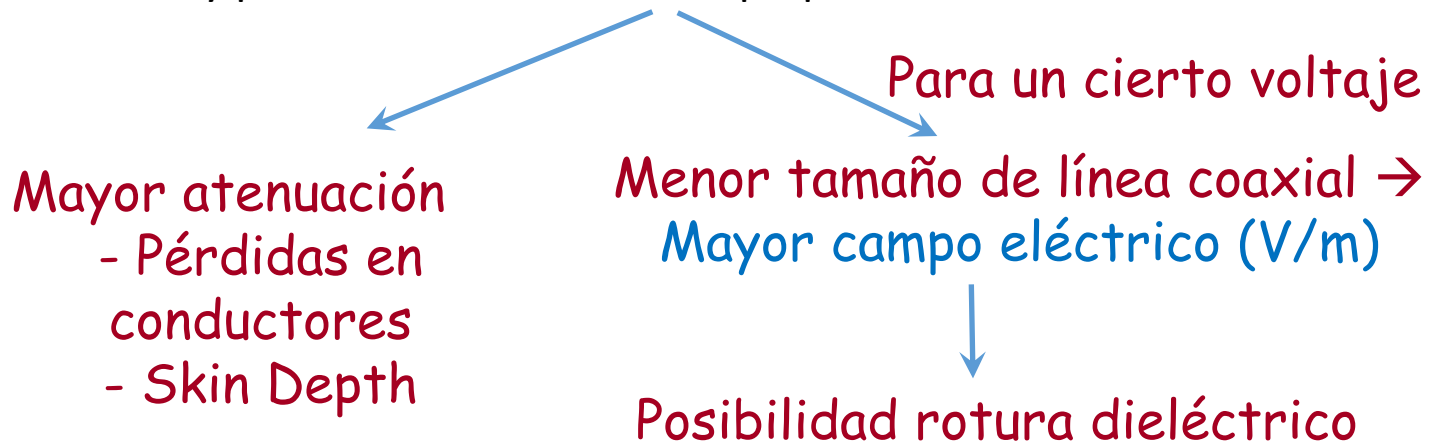
3.6 El cable coaxial. Modos TE y TM.

- También modos superiores TE_{mn} y TM_{mn} . Primer modo el TE_{11}

$$k_{c,11} = \frac{2}{a+b} \rightarrow f_{c,11} = \frac{2}{a+b} \frac{c}{2\pi\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}$$

- Influencia de los parámetros geométricos a y b
 - Peso y tamaño de la línea
 - Capacidad de transmisión de potencia
 - Ancho de banda

A) Menos tamaño y peso \rightarrow línea coaxial más pequeña

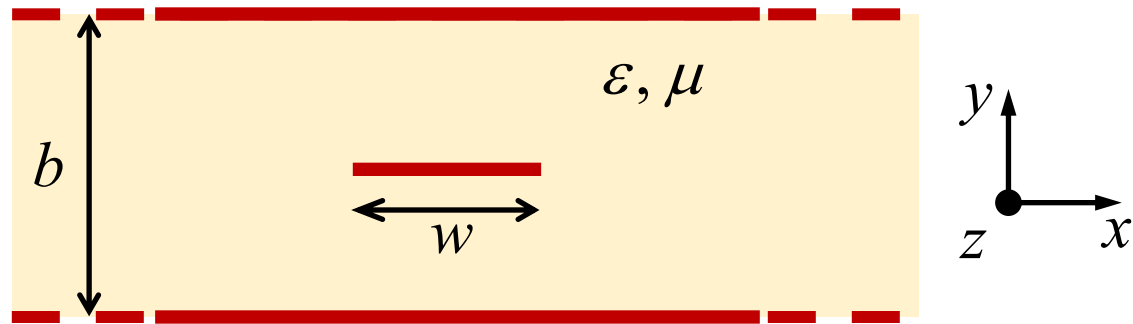


B) Línea más grande (a y b) \rightarrow Mas potencia, Menor ancho de banda

- Modo TEM + modos superiores

3.7 Líneas planares – Línea triplaca (stripline)

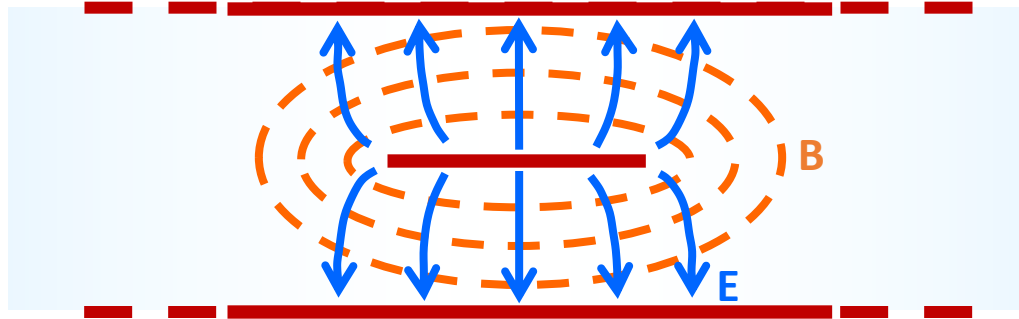
- La stripline esta formada por una tira conductora situada entre 2 placas conductoras.



- El espacio situado entre las dos placas conductoras esta relleno de un dieléctrico homogéneo de propiedades μ_r y ϵ_r .
- Esta línea soporta un modo TEM que es el que suele usarse en la práctica
- También pueden propagar modos superiores (TE y TM) que normalmente son indeseados.
- La excitación de modos superiores se evita haciendo que las dos placas estén al mismo potencial (tierra) y limitando la separación entre ellas.

3.7 Líneas planares – Línea triplaca (stripline)

- Campos para el modo TEM



Ventajas:

- Aporta apantallamiento y protección de la línea central
- Mejor compatibilidad electromagnética

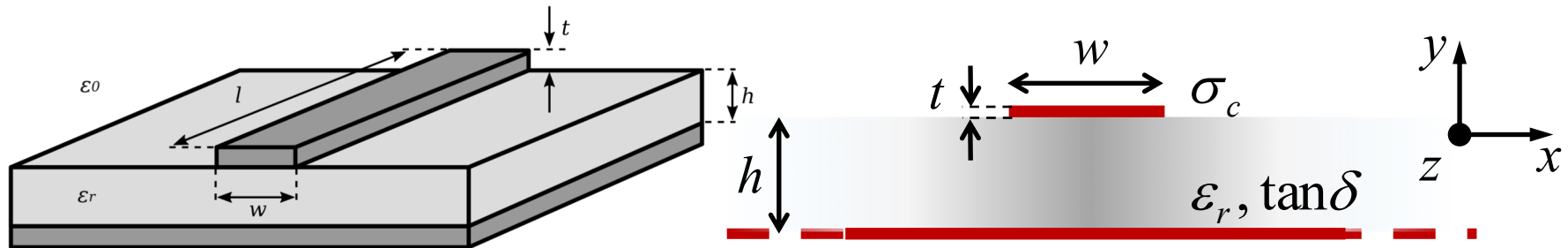
Desventajas.

- Dificultad en la fabricación.
- Impedancia baja: difícil adaptación

3.7 Líneas planares – Línea microtira (microstrip)

Más detalles
en **Pozar 3.8**

- La microstrip esta formada por una tira conductora situada sobre un sustrato dieléctrico que en su cara inferior tiene un plano de tierra



Ventajas

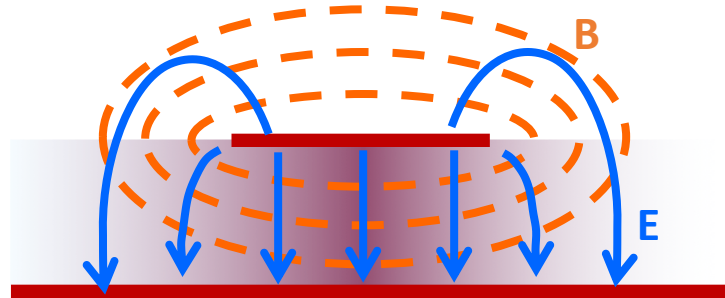
- Facilidad en el montaje de componentes discretos
- Menores costes de fabricación
- Interconexión más sencilla.

Desventajas

- Mayores pérdidas por radiación.
- Sufren y crean más interferencias.

3.7 Líneas planares – Línea microtira (microstrip)

- Esta línea NO soporta un modo TEM puro, ya que los campos no están contenidos en una región dieléctrica homogénea.



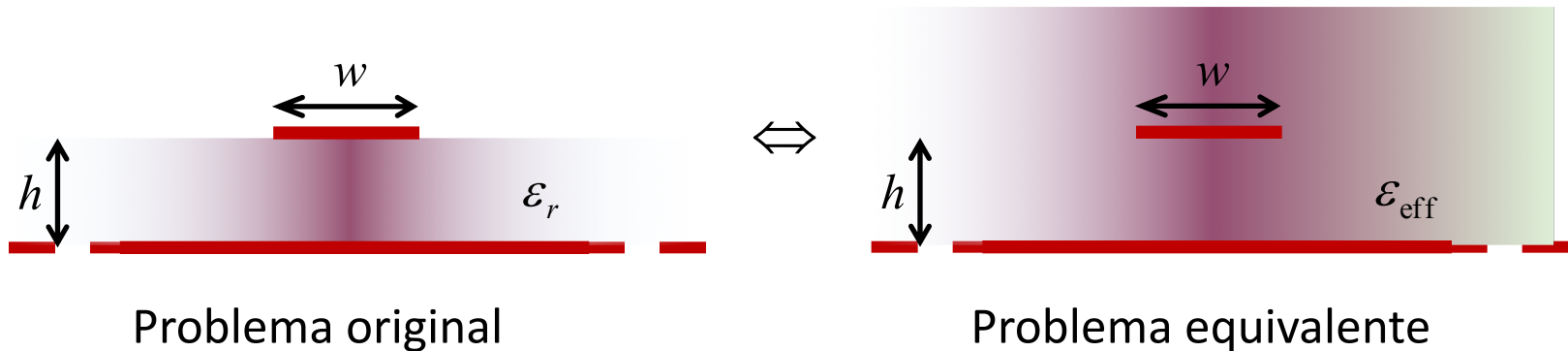
- Los modos son de tipo híbrido (HEM), tienen las 6 componentes del campo no nulas
- En la mayoría de las aplicaciones se usan sustratos eléctricamente delgados, con $h \ll \lambda$, y dominan los campos transversales en consecuencia los campos se denominan **cuasi-TEM**.
- Por tanto, pueden utilizarse soluciones estáticas (o cuasi-estáticas)

3.7 Líneas planares – Línea microtira (microstrip)

- Es típico expresar la cte de fase y la velocidad de fase para el modo cuasi-TEM como

$$\beta = k_0 \sqrt{\epsilon_{\text{eff}}} \quad v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}}$$

- donde ϵ_{eff} es la cte dieléctrica efectiva de la línea microstrip
- La constante dieléctrica efectiva puede interpretarse como la cte dieléctrica de un medio que rellena todo el espacio



- ϵ_{eff} depende de ϵ_r , h , w y de la frecuencia. Además, $1 < \epsilon_{\text{eff}} < \epsilon_r$

3.7 Líneas planares – Línea microtira (microstrip)

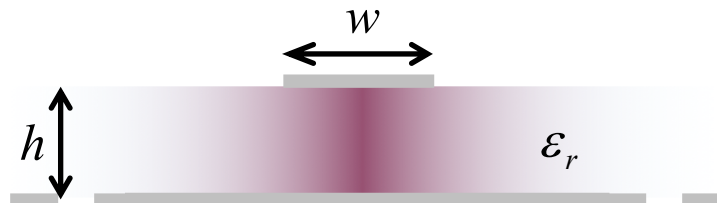
Fórmulas de Análisis

Fórmulas para calcular la cte dieléctrica efectiva, ϵ_{eff} , y la impedancia característica Z_0 a partir de las dimensiones de la línea.

$$w, h \rightarrow \epsilon_{\text{eff}}, Z_0$$

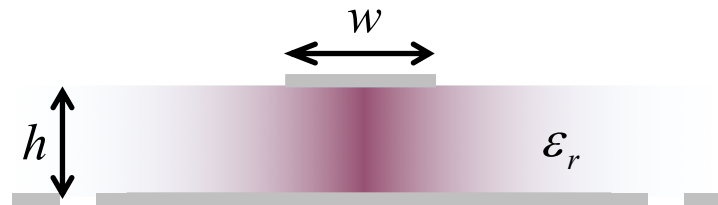
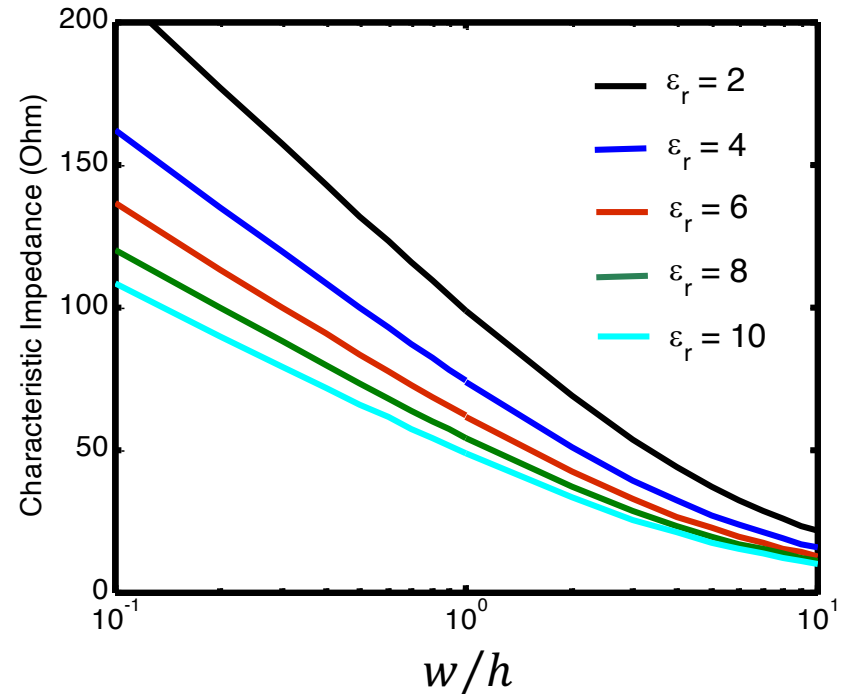
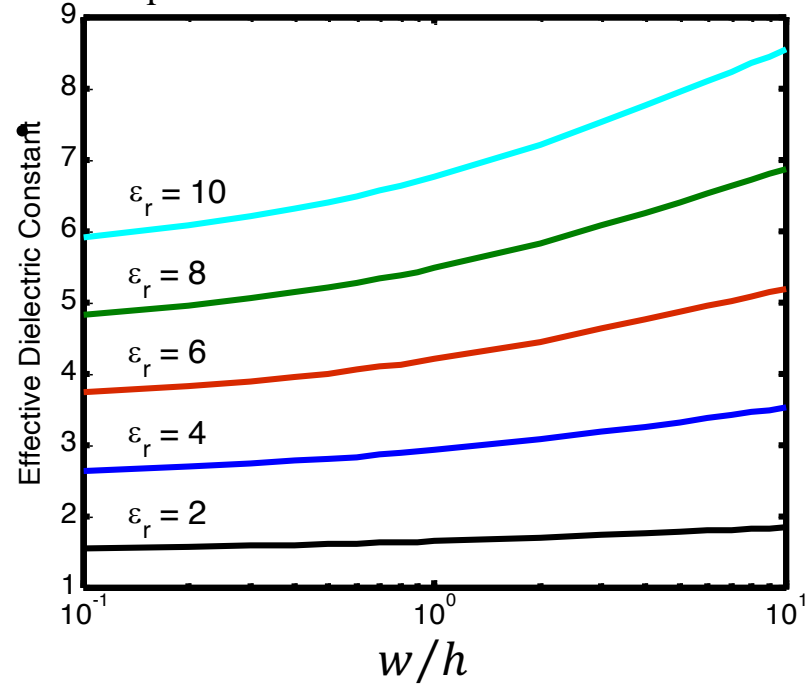
$$\epsilon_{\text{eff}} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 12h/w}}$$

$$Z_0 = \begin{cases} \frac{60}{\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}} \ln\left(\frac{8h}{w} + \frac{w}{4h}\right) & \text{para } w/h \leq 1 \\ \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}\left[\frac{w}{h} + 1.393 + 0.667\ln\left(\frac{w}{h} + 1.444\right)\right]} & \text{para } w/h > 1 \end{cases}$$



3.7 Líneas planares – Línea microtira (microstrip)

- Ejemplos de ϵ_{eff} y Z_0 obtenidos a partir de w y h para diferentes valores de ϵ_r



$$t = 0, \tan \delta = 0$$

3.7 Líneas planares – Línea microtira (microstrip)

Formulas de diseño

Fórmulas para calcular las dimensiones físicas a partir de la cte dieléctrica y la impedancia $\epsilon_r, Z_0 \rightarrow w/h$

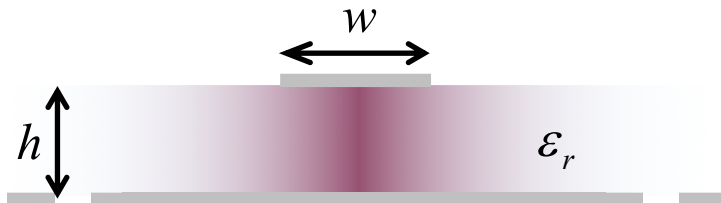
Desde el punto de vista del diseño, lo que interesa es valor de w/h que da lugar a la impedancia característica requerida.

Conocidos Z_0 y ϵ_r , las dimensiones de la línea se pueden obtener mediante las siguiente expresiones aproximadas

$$\frac{w}{h} = \begin{cases} \frac{8e^A}{e^{2A}-2} & \text{si } w/h \leq 2 \\ \frac{2}{\pi} \left[B - 1 - \ln(2B - 1) + \frac{\epsilon_r - 1}{2\epsilon_r} \left\{ \ln(B - 1) + 0.39 - \frac{0.61}{\epsilon_r} \right\} \right] & \text{si } w/h > 2 \end{cases}$$

- siendo

$$A = \frac{Z_0}{60} \sqrt{\frac{\epsilon_r + 1}{2}} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left(0.23 + \frac{0.11}{\epsilon_r} \right) \quad B = \frac{377\pi}{2Z_0 \sqrt{\epsilon_r}}$$



- Ejemplo 5: Calcular la anchura y la longitud de una línea microstrip para que su impedancia característica sea 50 Ohm y produzca un desfase de 90° a 2.5 GHz. El sustrato utilizado tiene una altura 0.127 cm y la cte dieléctrica vale 2.20.

Pozar 3ª Ed., Ej. 3-7

Solución:

- Suponemos $w/h > 2$

$$B = \frac{377\pi}{2Z_0\sqrt{\epsilon_r}} = 7.985$$

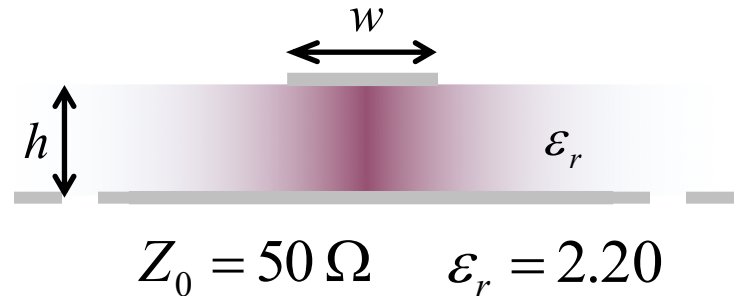
$$\frac{w}{h} = \frac{2}{\pi} \left[B - 1 - \ln(2B - 1) + \frac{\epsilon_r - 1}{2\epsilon_r} \left\{ \ln(B - 1) + 0.39 - \frac{0.61}{\epsilon_r} \right\} \right] = 3.081 > 2$$

- Luego $w = 3.081h = 0.391$ cm

- La cte dieléctrica efectiva vale $\epsilon_{\text{eff}} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 12h/w}} = 1.87$

- Cálculo de la longitud

$$\beta\ell = \pi/2 \longrightarrow \ell = \frac{\pi}{2\beta} = \frac{\pi v_p}{2 \times 2\pi f} = \frac{c}{4f\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}} = 2.19 \text{ cm}$$



3.7 Líneas planares – Línea microtira (microstrip)

Atenuación

- La cte de propagación es compleja: $\gamma = \alpha + j\beta$
- La constante de atenuación, α , tiene principalmente dos contribuciones

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_c$$

- α_d representa la constante de atenuación debida a pérdidas dieléctricas

$$\alpha_d = \frac{k_0 \epsilon_r (\epsilon_{\text{eff}} - 1) \tan \delta}{2\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}} (\epsilon_r - 1)} \quad [\text{Np/m}] \quad \tan \delta: \text{Tangente de pérdidas}$$

- α_c representa la atenuación en los conductores

$$\alpha_c = \frac{R_s}{Z_0 w} \quad [\text{Np/m}] \quad \text{con } R_s = \sqrt{\omega \mu_0 / 2 \sigma_c}$$

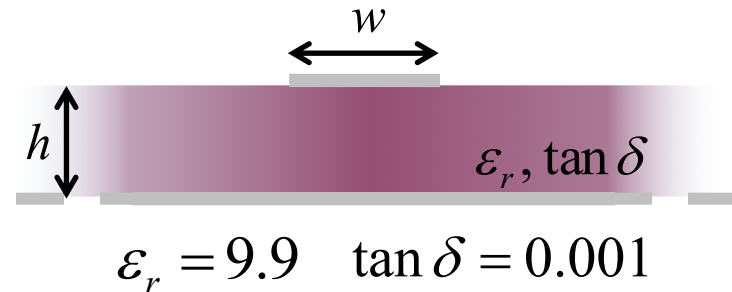
- En general, las pérdidas más importantes se deben a los conductores

- Ejemplo 6: Calcular la cte de atenuación total a 10 GHz en una línea microstrip de impedancia 50 Ohm, realizada en substrato de alúmina de $\epsilon_r = 9.9$, $\tan \delta = 0.001$ y $h = 0.5$ mm. La metalización es de cobre de conductividad $\sigma_c = 5.88 \times 10^7$ S/m y la anchura de la microtira vale $w = 0.483$ mm.

Pozar 4ª Ed., Ej. 3-7

Solución:

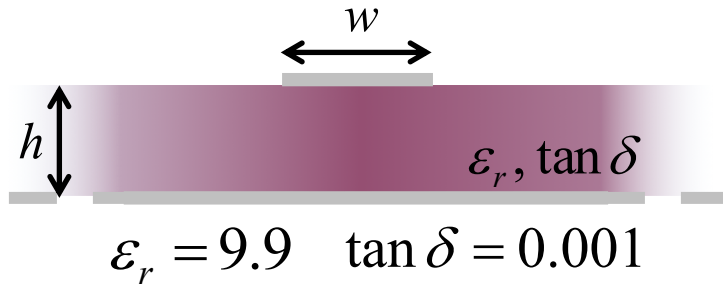
- Según hemos visto $\alpha = \alpha_d + \alpha_c$



$$\alpha_d = \frac{k_0 \epsilon_r (\epsilon_{\text{eff}} - 1) \tan \delta}{2 \sqrt{\epsilon_{\text{eff}}} (\epsilon_r - 1)} = 0.255 \text{ Np/m} = 0.022 \text{ dB/cm}$$

$$k_0 = 2\pi f / c = 209.44 \text{ rad/m}$$

$$\epsilon_{\text{eff}} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 12h/w}} = 6.665$$



$$\sigma_c = 5.88 \times 10^{+7} \text{ S/m}$$

$$f = 10 \text{ GHz}$$

- La constante de atenuación debida a los conductores es

$$\alpha_c = \frac{R_s}{Z_0 w} = 1.08 \text{ Np/m} = 0.094 \text{ dB/cm}$$

$$R_s = \sqrt{\omega \mu_0 / 2 \sigma_c} = 0.026 \text{ } \Omega$$

- La constante de atenuación total es

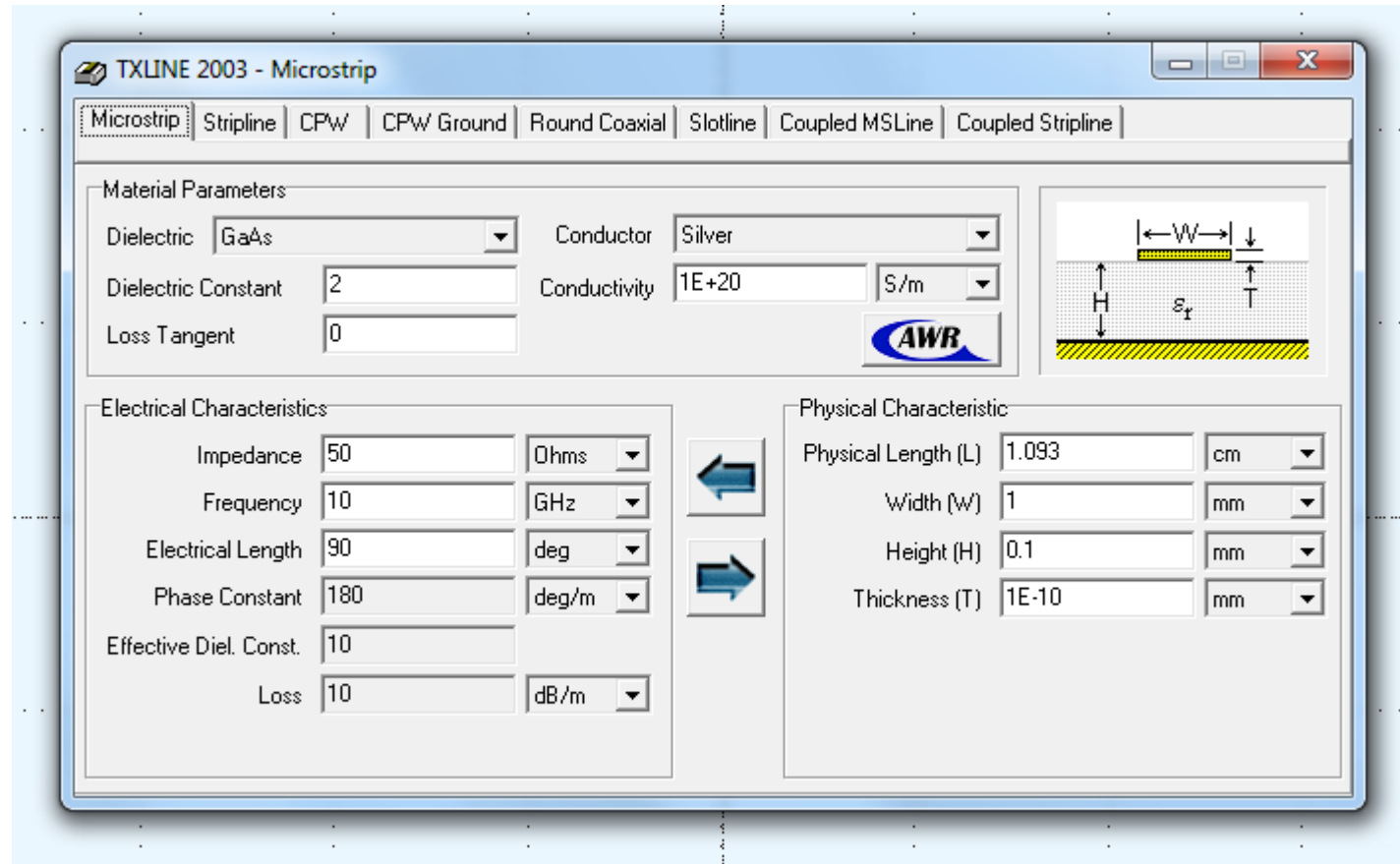
$$\alpha = \alpha_d + \alpha_c = 0.022 \text{ dB/cm} + 0.094 \text{ dB/cm} = 0.116 \text{ dB/cm}$$

3.7 Líneas planares – Línea microtira (microstrip)

Dispersión y modos superiores

- Todo lo visto hasta ahora sobre la microstrip es estrictamente válido solo en DC (o muy bajas frecuencias) → Aproximación cuasi-estática
- Esto es debido a que la microstrip NO es una verdadera línea TEM
- A más altas frecuencias los valores de la cte dieléctrica efectiva, impedancia y atenuación cambian. Además, pueden aparecer modos superiores
- La variación de ϵ_{eff} con la frecuencia produce cambios de fase, mientras que la variación de Z_0 produce pequeñas desadaptaciones
- Además, las señales de banda ancha sufrirán distorsión
- El modelado del comportamiento dispersivo de la línea microstrip no es sencillo. Existen fórmulas aproximadas, pero hoy en día es mejor usar directamente herramientas de CAD (Ej. Tx-line)

3.7 Líneas planares – Línea microtira (microstrip)



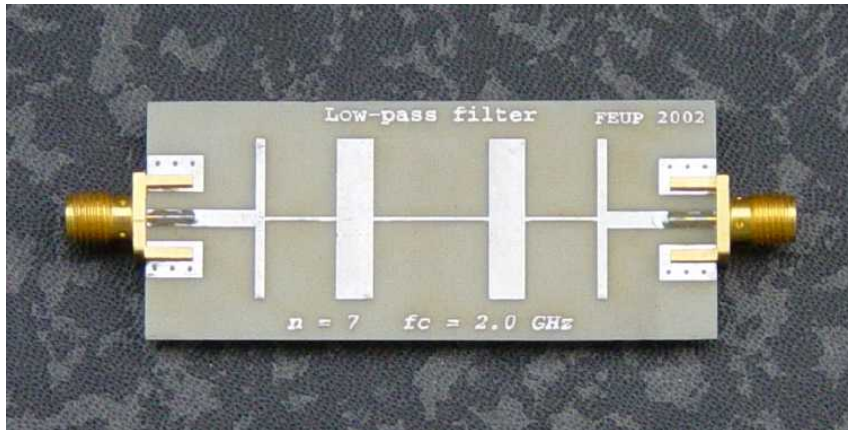
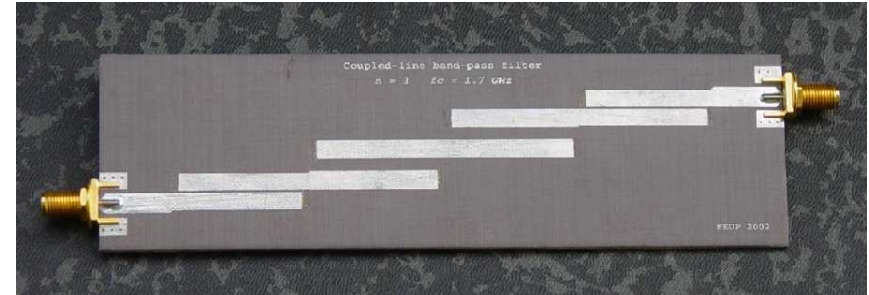
https://www.cadence.com/ko_KR/home/tools/system-analysis/rf-microwave-design/awr-tx-line.html

3.7 Líneas planares – Línea microtira (microstrip)

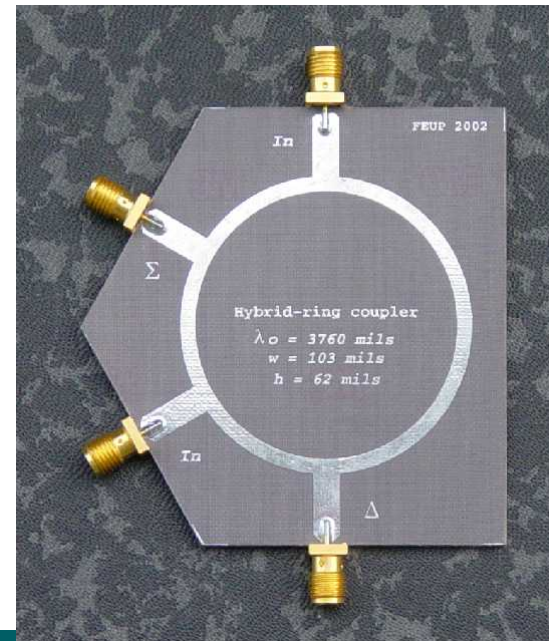
Filtro paso-banda
de líneas acopladas

- Ejes de dispositivos en microstrip

Filtro paso-bajo
de salto de impedancia



Anillo híbrido



3.8 Comparación entre distintos tipos de líneas y guías

	Coaxial	Guía rectangular	Stripline	Microstrip
Modo preferido	TEM	TE ₁₀	TEM	Quasi-TEM
Otros modos	TM, TE	TM, TE	TM, TE	TM, TE
Dispersión	No	Media	No	Baja
Ancho de banda	Alto	Bajo	Alto	Alto
Pérdidas	Media	Baja	Alta	Alta
Capacidad potencia	Media	Alta	Baja	Baja
Tamaño	Grande	Muy grande	Medio	Pequeño
Facilidad de fabricación	Media	Media	Fácil	Muy fácil
Integración componentes	Difícil	Difícil	Media	Fácil