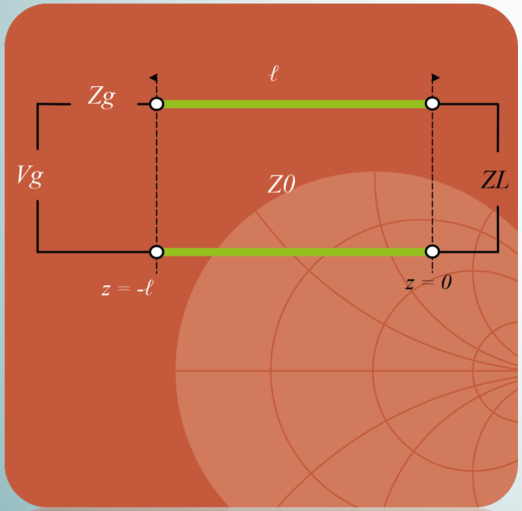
Medios de Transmisión Guiados

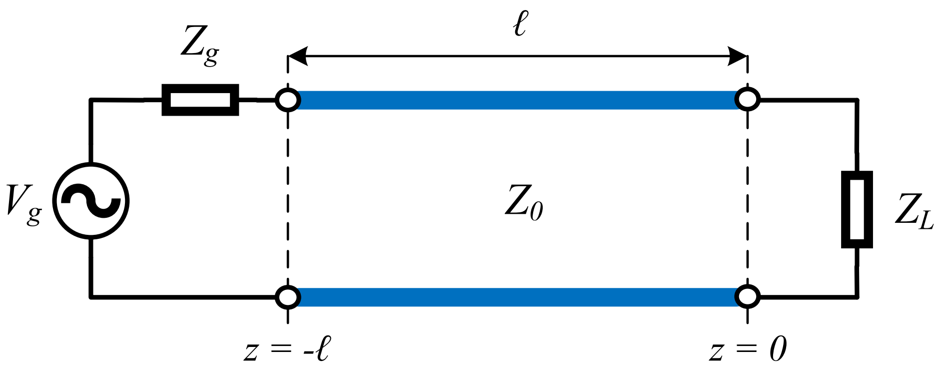
Tema 2. Líneas de transmisión terminadas



Juan Luis Cano de Diego
Óscar Fernández Fernández
José Antonio Pereda Fernández
DPTO. DE INGENIERÍA DE COMUNICACIONES

Tema 2. Líneas de Transmisión Terminadas

- 2.1 Introducción
- 2.2 Reflexión
- 2.3 Ondas estacionarias
- 2.4 Impedancia de entrada
- 2.5 Desadaptación en la carga y en el generador
- 2.6 Respuesta transitoria



Bibliografía Básica para este Tema:

- [1] R. Neri, “Líneas de Transmisión”, McGraw-Hill, México, 1999.
  - Apartado 2.9

- [2] W. H. Hayt Jr. and J. A. Buck , “Engineering Electromagnetics”, McGraw-Hill International Edition, 7ª Ed, 2006.
  - Apartados 11.9

- [3] D. M. Pozar, “Microwave Engineering” , 3ª Ed, Wiley, 2005.

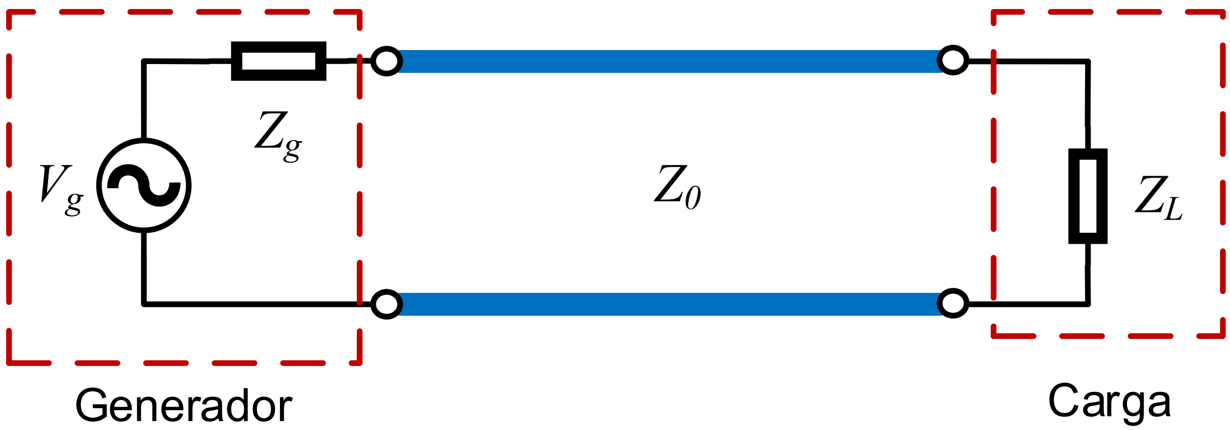
  Apartados 2.3, 2.6

- [4] F. T. Ulaby et. al “Fundamentals od Applied Electromagnetics” , 6ª Ed, Pearson, 2010

  Apartados 2.7, 2.8, 2.12

2.1 Introducción

- En el tema anterior estudiamos líneas de transmisión de longitud infinita, lo cuál obviamente no se encuentra en la práctica.
- El objetivo de este tema es ampliar lo visto en el tema anterior considerando líneas de transmisión terminadas.
- En general consideraremos un generador modelado mediante su equivalente Thevenin y una impedancia de carga unidos por una línea de transmisión de longitud finita.



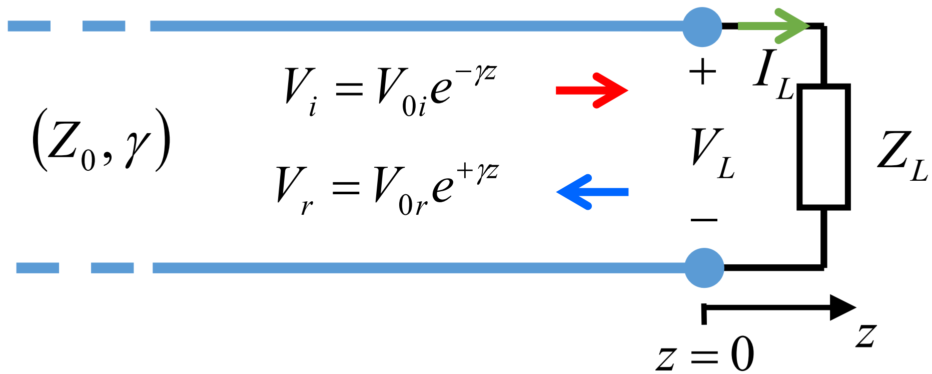
2.1 Reflexión

Más detalles en **Pozar** 2.3 y **Hayt** 11.9

- Consideramos una línea terminada en una impedancia de carga Z_L:

$$V(z) = V_{0i}e^{-\gamma z} + V_{0r}e^{+\gamma z}$$

$$I(z) = \frac{V_{0i}}{Z_0}e^{-\gamma z} - \frac{V_{0r}}{Z_0}e^{+\gamma z}$$



- La tensión en los terminales de la carga ($z = 0$) vale:

$$\left.\begin{aligned} V_L &= Z_L I_L \\ V_L &= V_{0i} + V_{0r} \\ I_L &= \frac{1}{Z_0}(V_{0i} - V_{0r}) \end{aligned}\right\} V_{0i} + V_{0r} = \frac{Z_L}{Z_0}(V_{0i} - V_{0r})$$

$$\Downarrow$$

$$1 + \frac{V_{0r}}{V_{0i}} = \frac{Z_L}{Z_0}\left(1 - \frac{V_{0r}}{V_{0i}}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{V_{0r}}{V_{0i}} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}}$$

2.2 Reflexión

Coeficiente de reflexión en la carga ($z = 0$)

- Definimos el coeficiente de reflexión en la carga como $\Gamma_L \equiv \dfrac{V_{0r}}{V_{0i}}$
- Sustituyendo en la expresión anterior resulta

$$\boxed{\frac{V_{0r}}{V_{0i}} = \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}}$$

- Teniendo en cuenta que $V_{0r} = \Gamma_L V_{0i}$
- La tensión y corriente totales en la línea son:

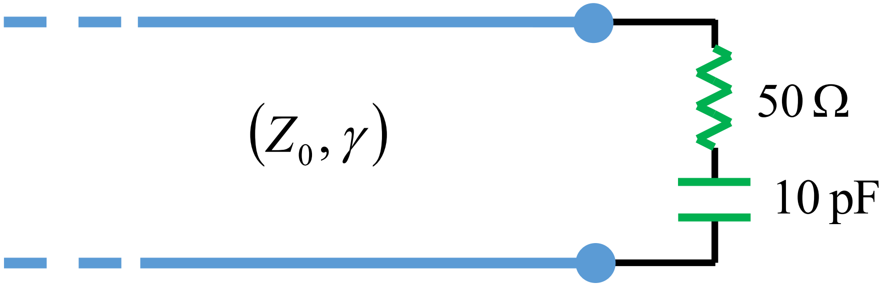
$$V(z) = V_{0i}\left(e^{-\gamma z} + \Gamma_L e^{+\gamma z}\right) \qquad I(z) = \frac{V_{0i}}{Z_0}\left(e^{-\gamma z} - \Gamma_L e^{+\gamma z}\right)$$

- Cuando Γ_L=0 no hay onda reflejada. Esta situación se da cuando $Z_L = Z_0$ y se dice que la línea está terminada en una **carga adaptada**.
- El general, el coeficiente de reflexión es una cantidad compleja.

- Ejemplo 1: Una línea de transmisión de impedancia característica 100 Ohm está terminada en una impedancia de carga formada por una resistencia de 50 Ohm en serie con una capacidad de 10 pF. Calcular el coeficiente de reflexión en la carga a la frecuencia de 100 MHz.

Ulaby 6ª Ej. 2-3

Solución:



- La impedancia de carga vale

$$Z_L = Z_R + Z_c = R + \frac{1}{j\omega C} = 50 - \frac{j}{2\pi \times 10^8 \times 10^{-11}} = (50 - j159.2)\,\Omega$$

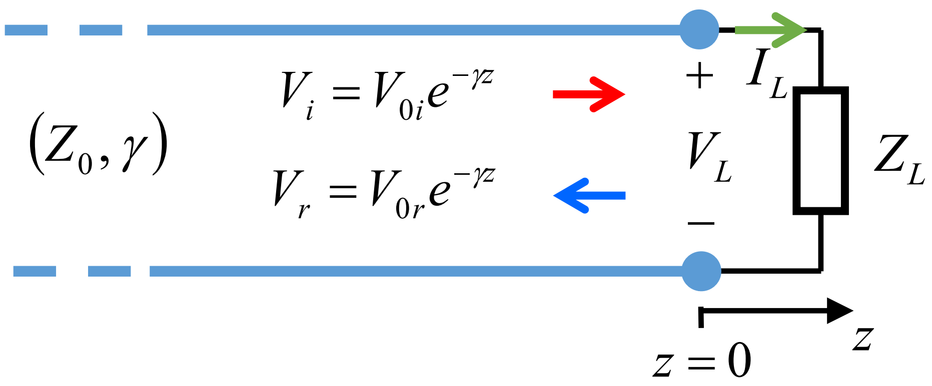
- El coef de refl. resulta

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{50 - j159.2 - 100}{50 - j159.2 + 100} = \frac{-50 - j159.2}{150 - j159.2} = 0.37 \;\; - j0.67 = 0.76e^{-j60.7^{o}}$$

2.2 Reflexión

Conservación de la Potencia:

- En general cuando $Z_L \neq Z_0$ una parte de la potencia incidente se refleja y otra parte es transmitida (disipada) a la carga.



- Según hemos visto, la tensión y la corriente en la línea son:

$$V(z) = V_{0i}\left(e^{-\gamma z} + \Gamma_L e^{+\gamma z}\right)$$

$$I(z) = \frac{V_{0i}}{Z_0}\left(e^{-\gamma z} - \Gamma_L e^{+\gamma z}\right)$$

2.2 Reflexión

- El valor medio de la **potencia incidente** es:

$$P_i(z) = \frac{1}{2}\Re\left[V_i(z) I_i^*(z)\right] = \frac{\left|V_{0i}\right|^2}{2\left|Z_0\right|^2} R_0 e^{-2\alpha z}$$

- La **potencia reflejada** resulta

$$P_r(z) = \frac{1}{2}\Re\left[V_r(z) I_r^*(z)\right] = \frac{\left|V_{0i}\right|^2 \left|\Gamma_L\right|^2}{2\left|Z_0\right|^2} R_0 e^{+2\alpha z}$$

- En los terminales de la carga (z = 0):

$$\boxed{P_r = \left|\Gamma_L\right|^2 P_i}$$

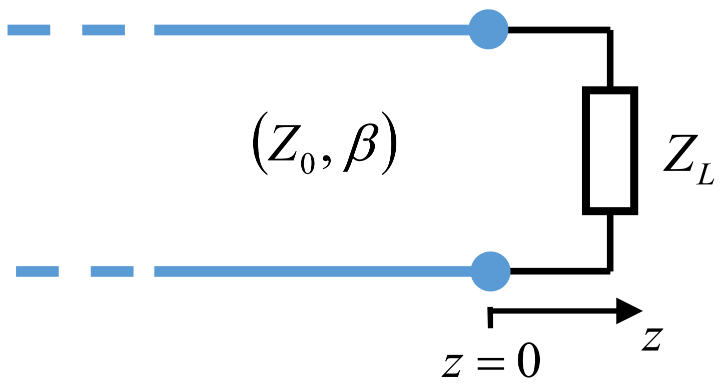
- La **potencia transmitida** es $P_t = P_i - P_r$, luego

$$\boxed{P_t = \left(1 - \left|\Gamma_L\right|^2\right) P_i}$$

- Ejemplo 2: Una línea de transmisión de impedancia característica 50 Ohm y sin pérdidas esta terminada en una impedancia de carga $Z_L = (50 - j75)\Omega$. Si la potencia incidente vale 100 mW, determinar la potencia disipada en la carga.

Hayt 7ª Ej. 11-5

Solución:



- La potencia disipada viene dada por

$$P_t = \left(1 - |\Gamma_L|^2\right) P_i$$

- El coef. de refl. en la carga vale

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{50 - j75 - 50}{50 - j75 + 50} = 0.36 - j0.48$$

- de donde $|\Gamma_L|^2 = (0.36)^2 + (0.48)^2 = 0.36$

- La potencia disipada resulta

$$P_t = \left(1 - |\Gamma_L|^2\right) P_i = (1 - 0.36) \times 100 \times 10^{-3} = 64\,\mathrm{mW}$$

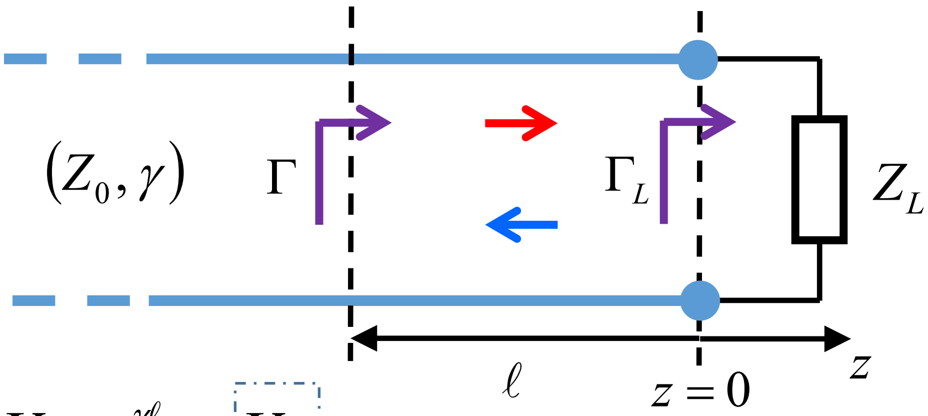
2.2 Reflexión

Coeficiente de reflexión en una posición arbitraria z:

- Hemos definido Γ en los terminales de la carga ($z = 0$) → Γ_L.
- Para cualquier posición z en la línea

$$V_i(z) = V_{0i} e^{-\gamma z}$$

$$V_r(z) = V_{0r} e^{+\gamma z}$$



- El coef. de refl. en $z = -\ell$ vale

$$\Gamma(\ell) \equiv \frac{V_r(\ell)}{V_i(\ell)} = \frac{V_{0r} e^{-\gamma\ell}}{V_{0i} e^{+\gamma\ell}} = \boxed{\frac{V_{0r}}{V_{0i}}} e^{-2\gamma\ell}$$

$$\Gamma(\ell) = \Gamma_L e^{-2\gamma\ell}$$

- Para una línea sin pérdidas ($\alpha = 0$), $\Gamma = \Gamma_L \cdot e^{-2j\beta\ell}$ es una función periódica de periodo $\lambda/2$

- Ejemplo 3: Una línea de transmisión sin pérdidas de impedancia característica 50 Ohm está terminada en una impedancia de carga de valor 100 Ohm. Determinar el coeficiente de reflexión a una distancia 0.1λ de la carga.

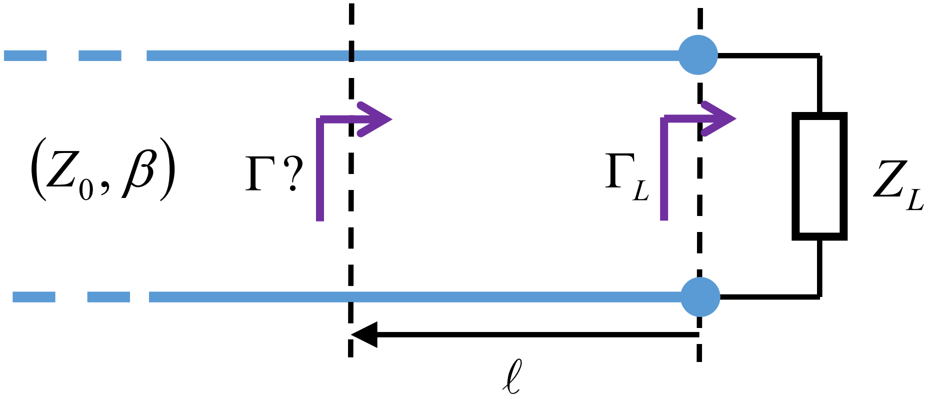
Solución:

- Los datos del problema son:

$$Z_0 = 50\,\Omega \qquad Z_L = 100\,\Omega$$

$$\ell = 0.1\lambda$$

$$\gamma = j\beta,\ \text{con}\ \beta \in \mathrm{R}$$



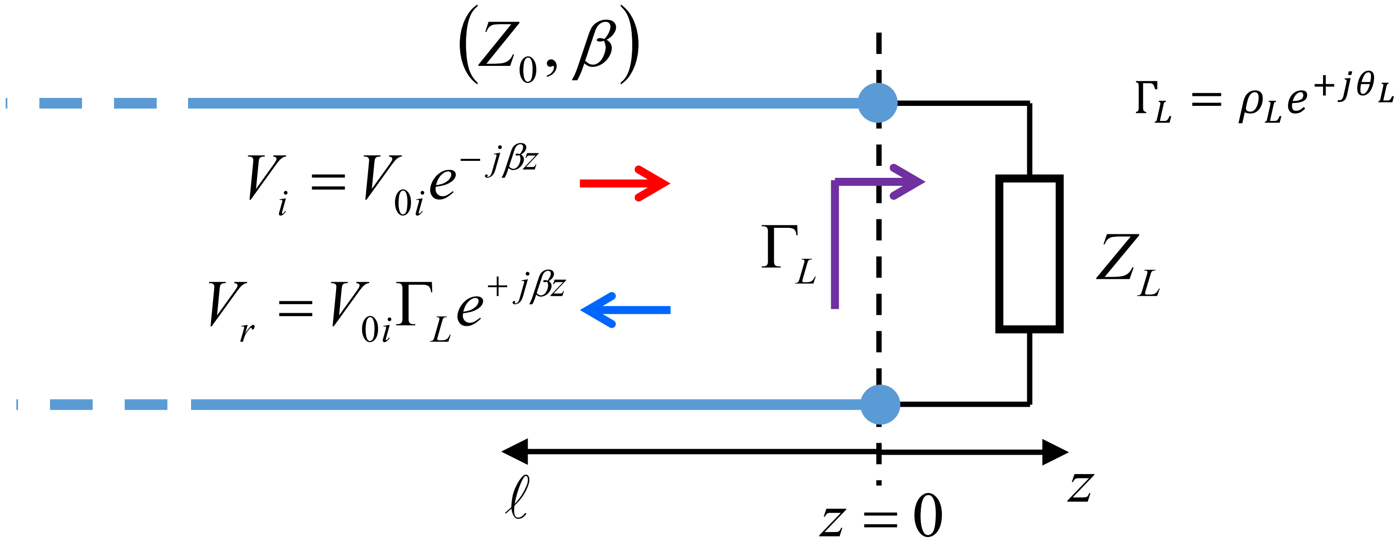
- Según hemos visto, el coef. de refl. a una distancia ℓ vale: $\Gamma(\ell) = \Gamma_L e^{-2\gamma\ell}$

- donde: $$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{100-50}{100+50} = \frac{1}{3} \qquad \gamma\ell = j\beta\ell = j\frac{2\pi}{\lambda}0.1\lambda = j0.2\pi$$

- luego $$\Gamma = \Gamma_L e^{-2\gamma\ell} = \frac{1}{3}e^{-j0.4\pi} = \frac{1}{3}e^{-j72^{\circ}}$$

2.3 Ondas estacionarias

- Consideramos una línea sin pérdidas terminada en una impedancia Z_L:



- La tensión total en la línea es el resultado de la interferencia (suma) de la onda incidente con la reflejada:

$$V(z) = V_i + V_r \qquad \Rightarrow \qquad V(z) = V_{0i}\left(e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{+j\beta z}\right)$$

- Como consecuencia de la interferencia se produce una onda estacionaria. Para estudiar sus propiedades debemos obtener $|V(z)|$

2.3 Ondas estacionarias

$$V(z) = V_{0i}\left(e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{+j\beta z}\right) \quad \Rightarrow \quad |V(z)| = \left|V_{0i} e^{-j\beta z}\right| \left|1 + \rho_L e^{+j(2\beta z + \theta_L)}\right|$$

- Teniendo en cuenta que

$$|e^{-j\beta z}| = 1 \quad \text{y} \quad e^{+j(2\beta z + \theta_L)} = \cos(2\beta z + \theta_L) + j\sin(2\beta z + \theta_L)$$

- Resulta $|V(z)| = |V_{0i}| \left[(1 + \rho_L \cos(2\beta z + \theta_L))^2 + \rho_L^2 \sin^2(2\beta z + \theta_L)\right]^{\frac{1}{2}}$

- Operando

$$|V(z)| = |V_{0i}| \left[1 + 2\rho_L \cos(2\beta z + \theta_L) + \rho_L^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

z → Posiciones en la línea
Por definición z < 0

- Haciendo en cambio $z = -\ell$

$$\boxed{|V(\ell)| = |V_{0i}| \left[1 + 2\rho_L \cos(2\beta \ell - \theta_L) + \rho_L^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

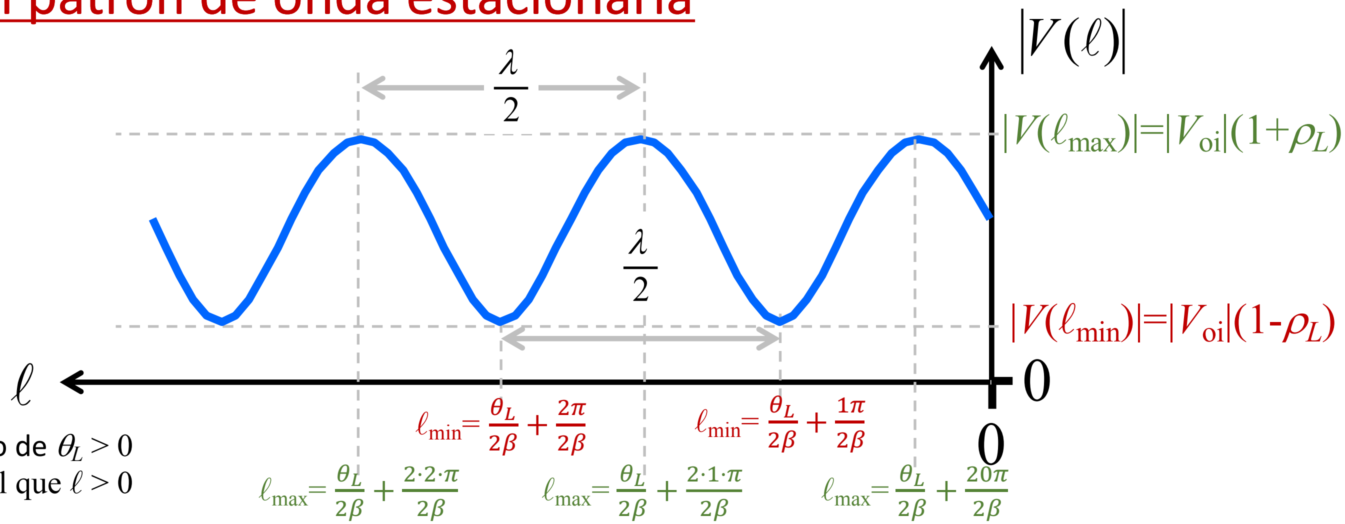
ℓ → Distancias a la carga
$\ell > 0$

- La función |V(z)| (o |V(ℓ)|) se denomina patrón de onda estacionaria de tensión.

2.3 Ondas estacionarias

$$|V(\ell)| = |V_{0i}|\left[1 + 2\rho_L\cos(2\beta\ell - \theta_L) + \rho_L^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Propiedades del patrón de onda estacionaria



Ejemplo para el caso de $\theta_L > 0$
Si $\theta_L < 0$ seleccionar n tal que $\ell > 0$

$|V(\ell)|$ es una función periódica de periodo $\lambda/2$ ya que $\cos(2\beta\ell - \theta_L) = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda/2}\ell - \theta_L\right)$

En un mínimo ($\ell_{\min}$) → $cos(2\beta\ell-\theta_L)= -1$

$|V(\ell_{\min})|=|V_{oi}|[(1-2\rho_L + \rho_L^2]^{0.5}=|V_{oi}|(1-\rho_L)$

$2\beta\ell-\theta_L=n\pi$ con n=1,3,… → distancia de mínimo a la carga es: $\ell_{\min}= \frac{\theta_L}{2\beta} + \frac{n\pi}{2\beta}$, n=1,3,…

En un máximo ($\ell_{\max}$) → $cos(2\beta\ell-\theta_L)= +1$

$|V(\ell_{\max})|=|V_{oi}|[(1+2\rho_L + \rho_L^2]^{0.5}=|V_{oi}|(1+\rho_L)$

$2\beta\ell-\theta_L=2n\pi$ con n=0,1,2,… → distancia de máximo a la carga es: $\ell_{\max}= \frac{\theta_L}{2\beta} + \frac{2n\pi}{2\beta}$, n=0,1,2,…

2.3 Ondas estacionarias

$$|V(\ell)| = |V_{0i}|\left[1 + 2\rho_L \cos(2\beta\ell - \theta_L) + \rho_L^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Cortocircuito

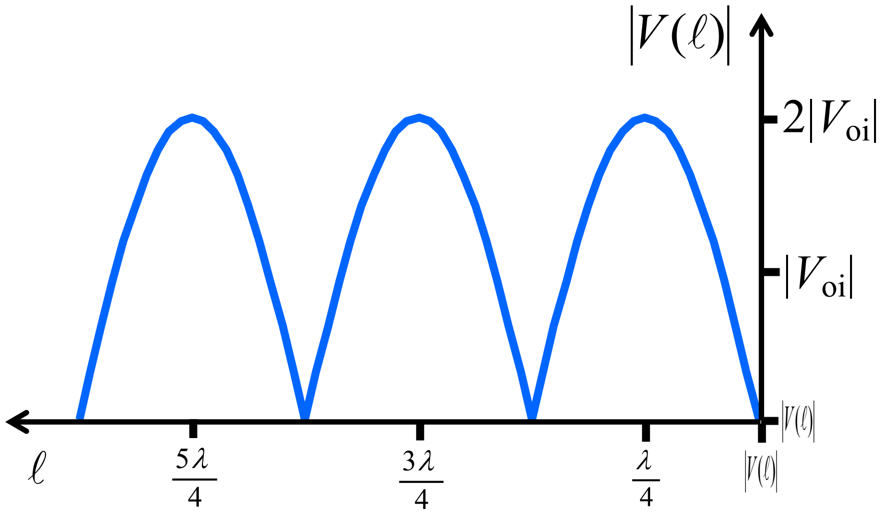
$Z_L = 0$ por tanto $\Gamma_L = -1 = 1 \cdot e^{j\pi}$

$|V(\ell_{\min})| = |V_{oi}|(1-\rho_L) = 0$

$|V(\ell_{\max})| = |V_{oi}|(1+\rho_L) = 2|V_{oi}|$

$$\ell_{\min} = \frac{\theta_L + n\pi}{2\beta} = \pi\frac{1+n}{2\cdot 2\pi}\lambda = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{4},\ n = \pm 1,3,\ldots$$

$$\ell_{\max} = \frac{\theta_L + 2n\pi}{2\beta} = \pi\frac{2n+1}{2\cdot 2\pi}\lambda = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2},\ n = 0,1,2,..$$



Circuito Abierto

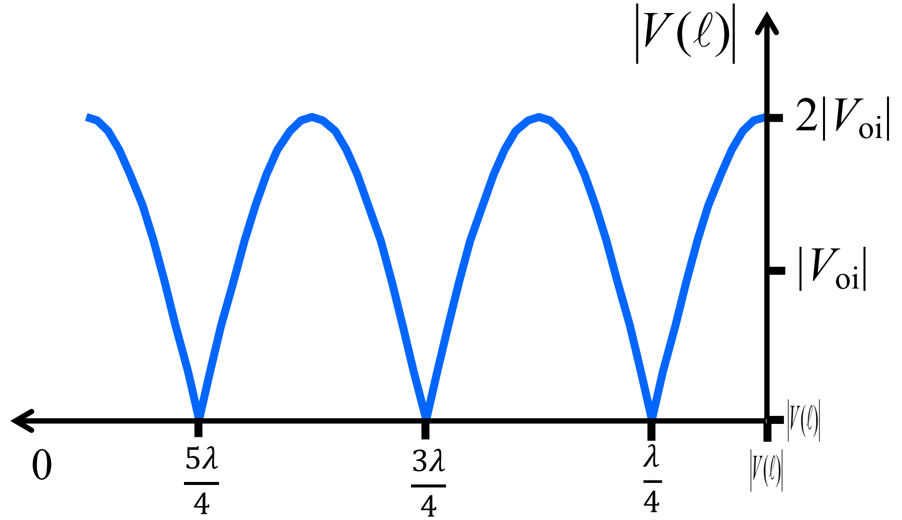
$Z_L = \infty$ por tanto $\Gamma_L = +1 = 1 \cdot e^{j0}$

$|V(\ell_{\min})| = |V_{oi}|(1-\rho_L) = 0$

$|V(\ell_{\max})| = |V_{oi}|(1+\rho_L) = 2|V_{oi}|$

$$\ell_{\min} = \frac{\theta_L + n\pi}{2\beta} = \frac{n\pi}{2\cdot 2\pi}\lambda = n\frac{\lambda}{4},\ n = 1,3,\ldots$$

$$\ell_{\max} = \frac{\theta_L + 2n\pi}{2\beta} = \frac{2n\pi}{2\cdot 2\pi}\lambda = n\frac{\lambda}{2},\ n = 0,1,2,..$$



2.3 Ondas estacionarias

$$|V(\ell)| = |V_{0i}|\left[1 + 2\rho_L \cos(2\beta\ell - \theta_L) + \rho_L^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

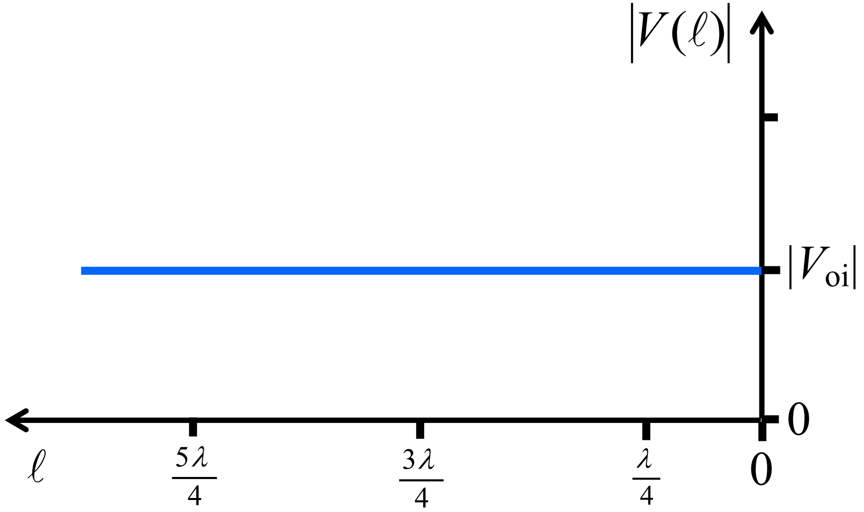
<u>Carga Adaptada</u>

$Z_L = Z_0$ por tanto $\Gamma_L = 0$

$|V(\ell_{\text{min}})| = |V_{\text{oi}}|(1-\rho_L) = |V_{\text{oi}}|$

$|V(\ell_{\text{max}})| = |V_{\text{oi}}|(1+\rho_L) = |V_{\text{oi}}|$

El **patrón de onda estacionaria** no presenta máximos ni mínimos



Nota: recuerda que estamos trabajando con fasores (dominio de la frecuencia - Excitación sinusoidal).

- Ejemplo 4: Considérese una línea de transmisión sin pérdidas terminada en una carga. El coeficiente de reflexión en el plano de la carga vale $\Gamma_L = 0.5e^{-j60^\circ}$ y la longitud de onda $\lambda = 24\text{ cm}$. Determinar la posición del mínimo y el máximo en tensión más cercanos a la carga.

Ulaby 6ª Exercise 2.10

Solución:

- Los máximos de tensión ocurren para $\cos(2\beta\ell - \theta_L) = +1$, de donde

$$2\beta\ell_{\max} - \theta_L = 2n\pi \quad (n = 0,1,2...) \longrightarrow \ell_{\max} = \frac{2n\pi + \theta_L}{2\beta} \quad (n = 0,1,2...)$$

- como $\theta_L < 0$, el primer máximo se corresponderá con n = 1:

$$\ell_{\max} = \frac{2\pi + \theta_L}{2\beta} = \frac{2\pi - \pi/3}{4\pi/\lambda} = 10\text{ cm}$$

- Los mínimos de tensión ocurren para $\cos(2\beta\ell - \theta_L) = -1$

$$2\beta\ell_{\min} - \theta_L = n\pi \quad (n = 1,3,\ldots) \quad \longrightarrow \quad \ell_{\min} = \frac{n\pi + \theta_L}{2\beta} \quad (n = 1,3,\ldots)$$

- Para n = 1:

$$\ell_{\min} = \frac{\pi + \theta_L}{2\beta} = \frac{\pi - \pi/3}{4\pi/\lambda} = 4\ \text{cm}$$

- Se observa que, efectivamente $\ell_{\max} - \ell_{\min} = 10 - 4 = 6\ \text{cm}$, que se corresponde con $\lambda/4$

2.3 Ondas estacionarias

- Definimos la Razón de Onda Estacionaria ROE (también S o VSWR) como el cociente entre las tensiones máxima y mínima del patrón de onda estacionaria en tensión.

$$\mathrm{ROE} = \frac{\left|V(z)\right|_{\max}}{\left|V(z)\right|_{\min}} = \frac{1+\rho_L}{1-\rho_L}$$

- Veamos algunos ejemplos

  - Carga adaptada $\rho_L = 0 \;\rightarrow\; \mathrm{ROE} = 1$

  - Cortocircuito y circuito abierto $\rho_L = 1 \;\rightarrow\; \mathrm{ROE} = \infty$

  - Carga pasiva de valor arbitraria $\rho_L = [0,1] \;\rightarrow\; \mathrm{ROE} = [1,\infty)$

- Ejemplo 5: Una línea de transmisión sin pérdidas y de impedancia característica 140 Ohm está terminada en una impedancia de carga $Z_L = (280 + j182)\,\Omega$. Sabiendo que la longitud de onda en la línea vale 72 cm, calcular:

a) El coeficiente de reflexión en el plano de la carga
b) La razón de onda estacionaria
c) La posición de los máximos de tensión
d) La posición de los mínimos de tensión

Ulaby 6ª Exercise 2.11

Solución:

a) El coef de refl en los terminales de la carga vale

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{280 + j182 - 140}{280 + j182 + 140} = 0.439 + j0.243 = 0.5e^{+j29^\circ}$$

b) La razón de onda estacionaria en la línea es

$$\mathrm{ROE} = \frac{1+\rho_L}{1-\rho_L} = \frac{1+0.5}{1-0.5} = 3$$

c) Localización de los máximos de tensión

Según el ejemplo anterior, los máximos se sitúan a distancias

$$\ell_{\max} = \frac{2n\pi + \theta_L}{2\beta} \quad (n = 0,1,2...)$$

Teniendo en cuenta que $\beta = 2\pi/\lambda$ resulta: $\ell_{\max} = \dfrac{\lambda\theta_L}{4\pi} + \dfrac{n\lambda}{2} \quad (n = 0,1,2...)$

Además $\theta_L = 29^{\mathrm{o}} = 29\pi/180 \text{ rad}$

Luego

$$\ell_{\max} = \lambda\left(\frac{\theta_L}{4\pi} + \frac{n}{2}\right) = 72\left(\frac{29\pi}{180\times 4\pi} + \frac{n}{2}\right) = (2.9 + 36n) \text{ cm} \quad (n = 0,1,2...)$$

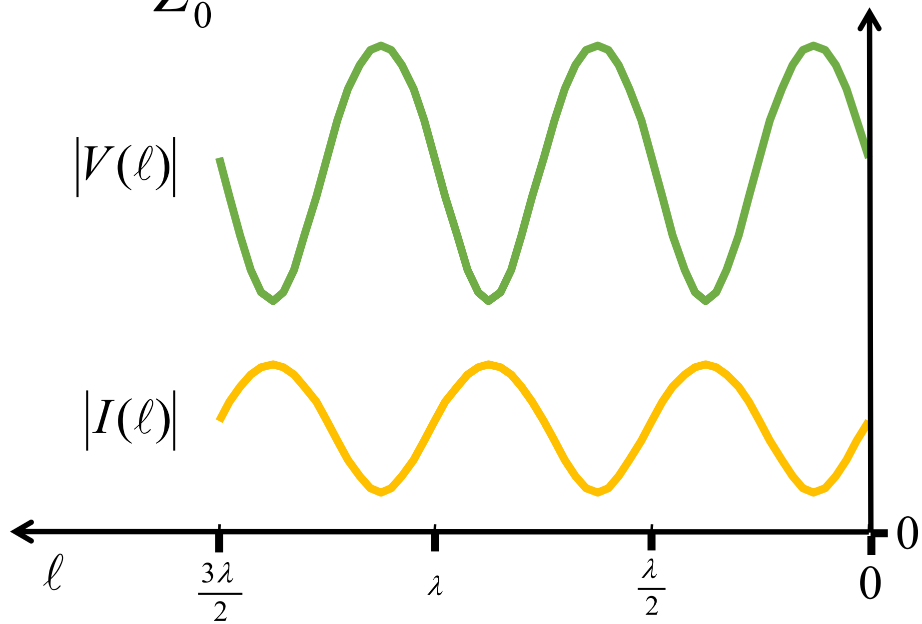
d) Localización de los mínimos de tensión

$$\ell_{\min} = \ell_{\max} + \frac{\lambda}{4} = (20.9 + 36n) \text{ cm} \quad (n = 0,1,2...)$$

2.3 Ondas estacionarias

- Análogamente al caso de la tensión, también es posible definir un patrón de onda estacionaria respecto de la corriente.
- Siguiendo el mismo procedimiento que con la tensión se llega a

$$\left|I(\ell)\right| = \frac{\left|V_{0i}\right|}{Z_0}\left[1 - 2\rho_L \cos(2\beta\ell - \theta_L) + \rho_L^2\right]^{\frac{1}{2}}$$



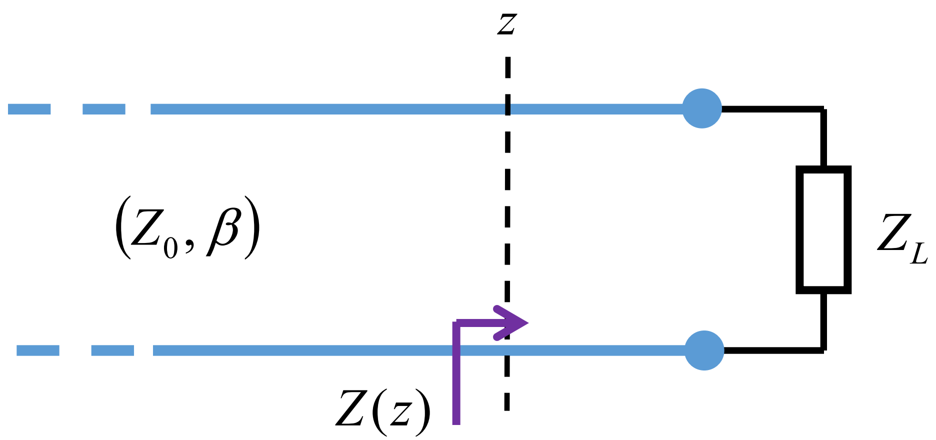
- Los máximos de corriente están en la misma posición que los mínimos de tensión y viceversa

2.4 Impedancia de entrada

Más detalles en **Ulaby** 2.7-2.8

- Consideramos una línea de transmisión sin pérdidas y desadaptada.
- Sabemos que en una línea desadaptada, tanto la tensión como la corriente totales son función de la posición, z.
- Por tanto, el cociente $V(z)/I(z)$ también será función de la posición
- Entonces, podemos definir la impedancia "vista" en una posición arbitraria de la línea, z, como

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)}$$



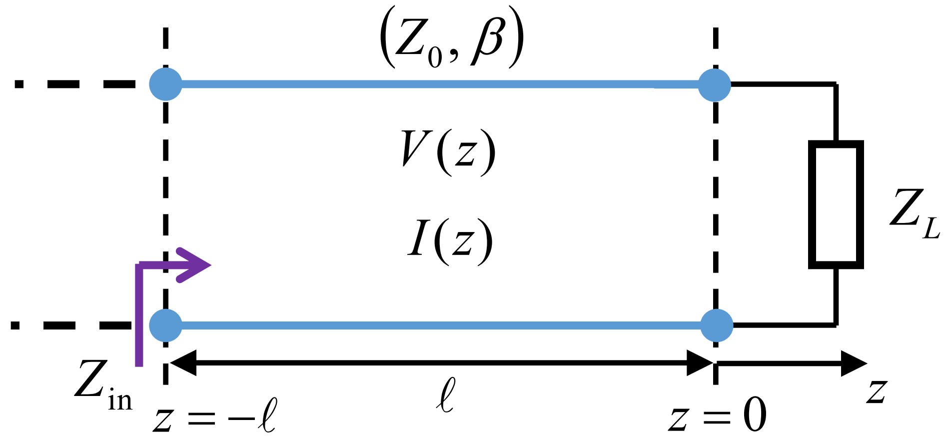
2.4 Impedancia de entrada

- Suele interesar el valor de $Z(z)$ en los terminales de entrada de una línea cargada. En este caso, se denomina impedancia de entrada Z_{in}:

$$V(z) = V_{0i}\left(e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{+j\beta z}\right)$$

$$I(z) = \frac{V_{0i}}{Z_0}\left(e^{-j\beta z} - \Gamma_L e^{+j\beta z}\right)$$

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$



- La impedancia de entrada se puede expresar como:

$$Z_{\text{in}}(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = Z_0\left(\frac{e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{+j\beta z}}{e^{-j\beta z} - \Gamma_L e^{+j\beta z}}\right) = Z_0 \frac{Z_L - jZ_0 \tan(\beta z)}{Z_0 - jZ_L \tan(\beta z)}$$

- La impedancia varía a lo largo de la línea
- Al igual que ROE, la impedancia es una función de periodo espacial $\lambda/2$.

2.4 Impedancia de entrada

- Los máximos y mínimos de la impedancia se sitúan en las mismas posiciones que los máximos y mínimos de tensión, respectivamente.
- Los máximos de impedancia valen:

$$Z_{\text{in}}\big|_{\max} = \frac{|V(z)|_{\max}}{|I(z)|_{\min}} = \frac{|V_{0i}|(1+\rho_L)}{\dfrac{|V_{0i}|}{Z_0}(1-\rho_L)} = Z_0\frac{1+\rho_L}{1-\rho_L} = Z_0\text{ROE}$$

- y los mínimos:

$$Z_{\text{in}}\big|_{\min} = \frac{|V(z)|_{\min}}{|I(z)|_{\max}} = \frac{|V_{0i}|(1-\rho_L)}{\dfrac{|V_{0i}|}{Z_0}(1+\rho_L)} = Z_0\frac{1-\rho_L}{1+\rho_L} = \frac{Z_0}{\text{ROE}}$$

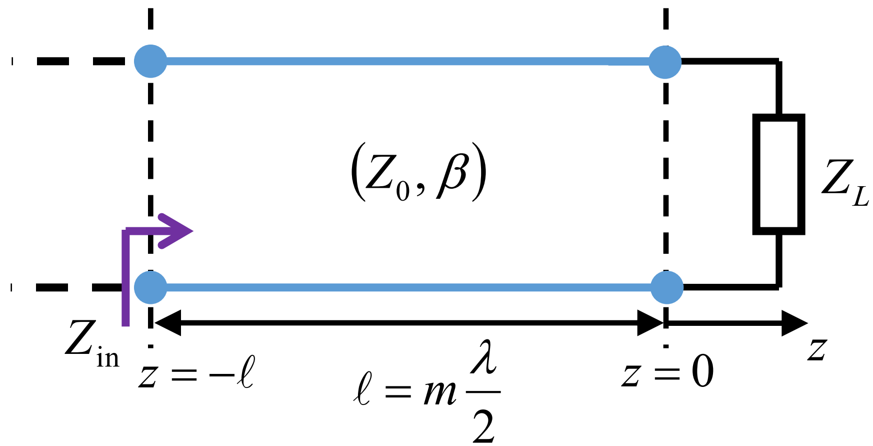
- Se observa que los valores de $Z_{\text{in}}|_{\max}$ y $Z_{\text{in}}|_{\min}$ son reales
- Evaluando la expresión de $Z_{\text{in}}(z)$ en $z = -\ell$, resulta

$$\boxed{Z_{\text{in}}(\ell) = Z_0\frac{Z_L + jZ_0\tan(\beta\ell)}{Z_0 + jZ_L\tan(\beta\ell)}}$$

2.4 Impedancia de entrada

- Veamos algunos casos particulares de la expresión para Z_{in}:

  - Línea de media onda: $$\ell = m\frac{\lambda}{2} \text{ con } m = 0, 1, 2, \ldots$$



  - Luego

$$\beta\ell = m\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2} = \mathrm{m}\pi \qquad Z_{in} = Z_0\frac{Z_L + \cancel{jZ_0\tan(\beta\ell)}}{Z_0 + \cancel{jZ_L\tan(\beta\ell)}}$$

  - Entonces

$$\boxed{Z_{\text{in}}(m\lambda/2) = Z_L}$$

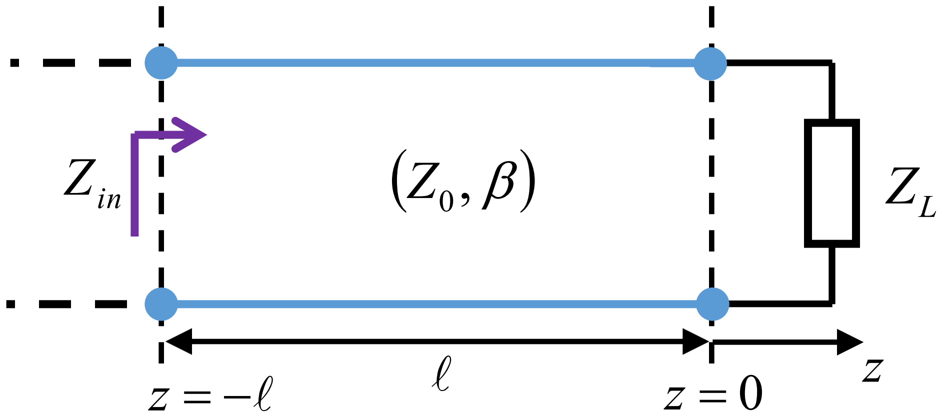
¡ La impedancia de entrada es
igual a la impedancia de carga!

- Ejemplo 6: Se dispone de una línea bifiliar en aire, sin pérdidas, de impedancia característica 50 Ohm y de longitud 2.5 m. Si la línea está terminada en una impedancia de carga $Z_L = (40 + j20)\,\Omega$ a la frecuencia de 300 MHz, determinar la impedancia de entrada. Ulaby 6ª P 2.27

Solución:

- La impedancia de entrada vale:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta\ell)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta\ell)}$$



- donde:

$$Z_0 = 50\,\Omega \qquad Z_L = (40 + j20)\,\Omega$$

$$\left.\begin{array}{l} \ell = 2.5\ \mathrm{m} \\ f = 300\times 10^6\ \mathrm{Hz} \\ \text{Línea en aire} \rightarrow v_p = c \\ \lambda = 3{\cdot}10^8 / 300{\cdot}10^6 = 1\ \mathrm{m} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \beta = \dfrac{\omega}{v_p} = \dfrac{2\pi f}{c} = \dfrac{2\pi\times 300\times 10^6}{3\times 10^8} = 2\pi\ \mathrm{rad/m} \\ \beta\ell = 2\pi\times 2.5 = 5\pi \qquad \text{(es una línea } 5\times(\lambda/2)) \end{array}$$

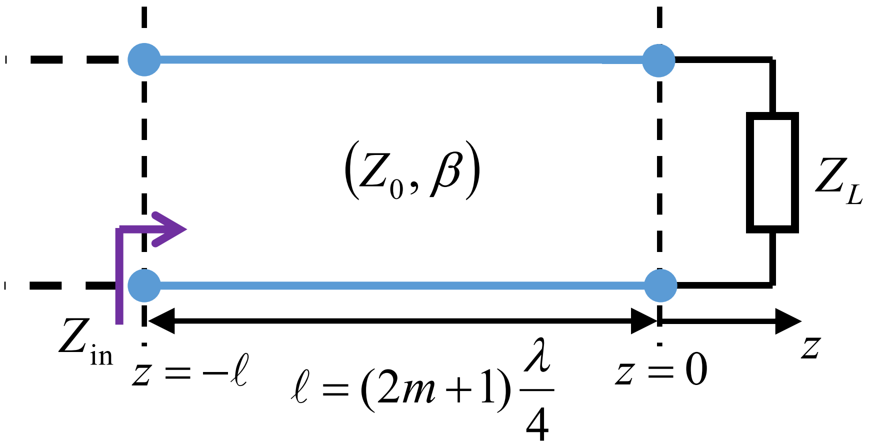
$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta\ell)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta\ell)} = Z_L = (40 + j20)\,\Omega$$

2.4 Impedancia de entrada

- Línea de cuarto de onda: $\ell = (2m+1)\dfrac{\lambda}{4}$ con $m = 0, 1, 2, \ldots$

- Luego

$$\beta\ell = (2m+1)\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4} = (2\mathrm{m}+1)\frac{\pi}{2}$$



- Entonces $\quad Z_{\mathrm{in}}(\lambda/4) = \dfrac{Z_0^2}{Z_L}$

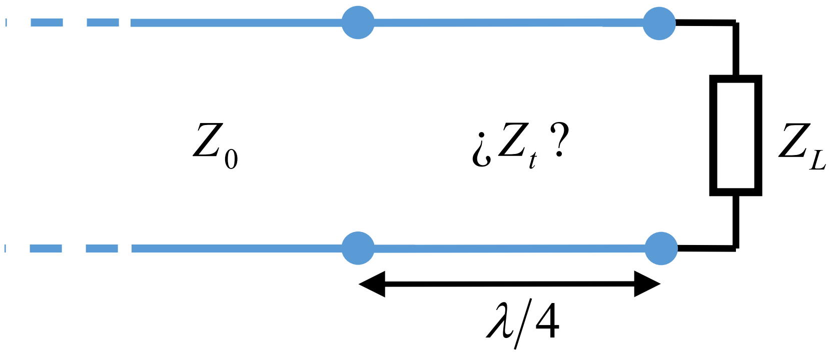
- Normalizando respecto Z_0

$$\boxed{\overline{Z}_{\mathrm{in}}(\lambda/4) = \frac{1}{\overline{Z}_L}}$$

¡ La impedancia de entrada normalizada es
el inverso de la impedancia de carga normalizada!

- Una aplicación muy importante de la línea cuarto de onda es la adaptación de impedancias.

Ejemplo 7: Una línea de impedancia $Z_0 = 50\,\Omega$ esta terminada en una carga de $Z_L = 100\,\Omega$. Como consecuencia se producen reflexiones en la carga. Para eliminar estas reflexiones (adaptar la carga a la línea) se emplea un transformador $\lambda/4$ como se indica en la figura. Determinar la impedancia característica de dicho transformador.



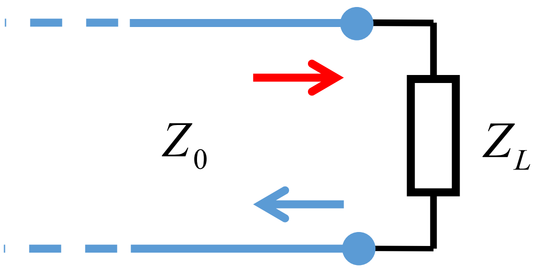
Ulaby 6ª Ex 2-10

Solución:

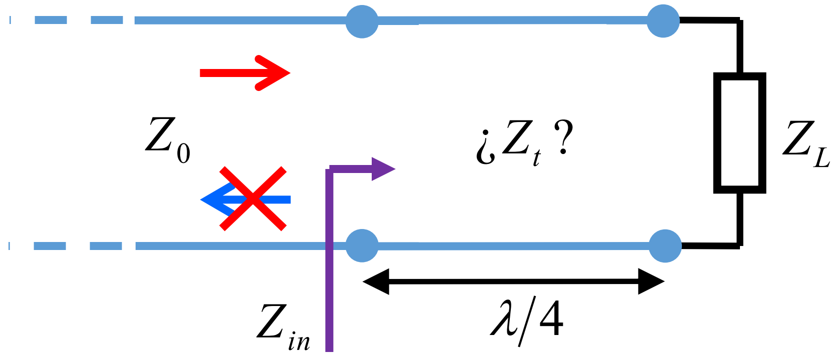
- La situación inicial (sin transformador) se muestra en la figura

- En este caso hay reflexión ya que

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \neq 0$$



- Para eliminar la reflexión utilizamos un transformador como indica el enunciado



- El coef. de refl. en los terminales de la línea vale $\Gamma = \dfrac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0}$

- Para eliminar la reflexión debe verificarse $Z_{in} = Z_0$

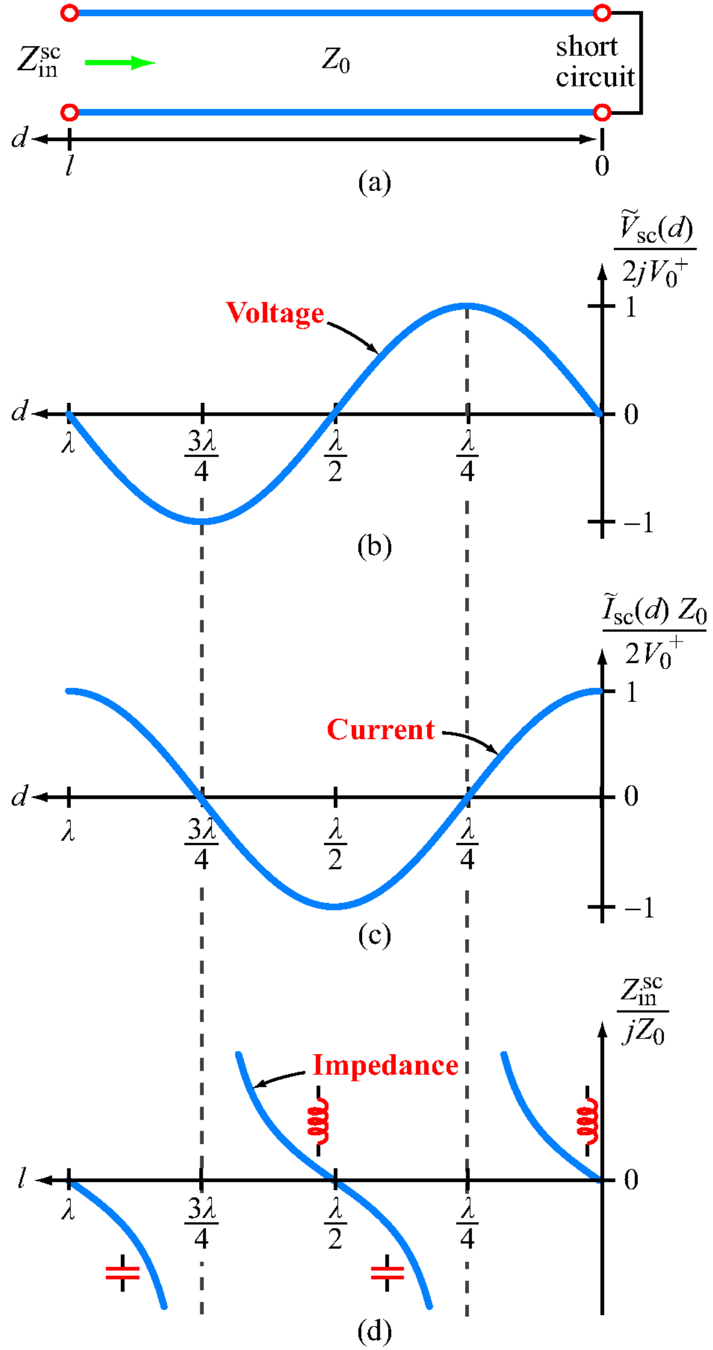
- Por otra parte, según sabemos $Z_{in} = \dfrac{Z_t^2}{Z_L}$

$$\left.\begin{array}{l} Z_{in} = Z_0 \\ Z_{in} = \dfrac{Z_t^2}{Z_L} \end{array}\right\} \dfrac{Z_t^2}{Z_L} = Z_0$$

- Por tanto

$$Z_t = \sqrt{Z_0 Z_L} = \sqrt{50 \times 100} = 70.7\,\Omega$$

2.4 Impedancia de entrada



Línea terminada en cortocircuito:

$$Z_L = 0 \qquad \Gamma_L = -1 \qquad \mathrm{ROE} = \infty$$

- Tensión en la línea:

$$V(\ell) = 2jV_{0i}\sin(\beta\ell)$$

- Corriente en la línea:

$$I(\ell) = 2\frac{V_{0i}}{Z_0}\cos(\beta\ell)$$

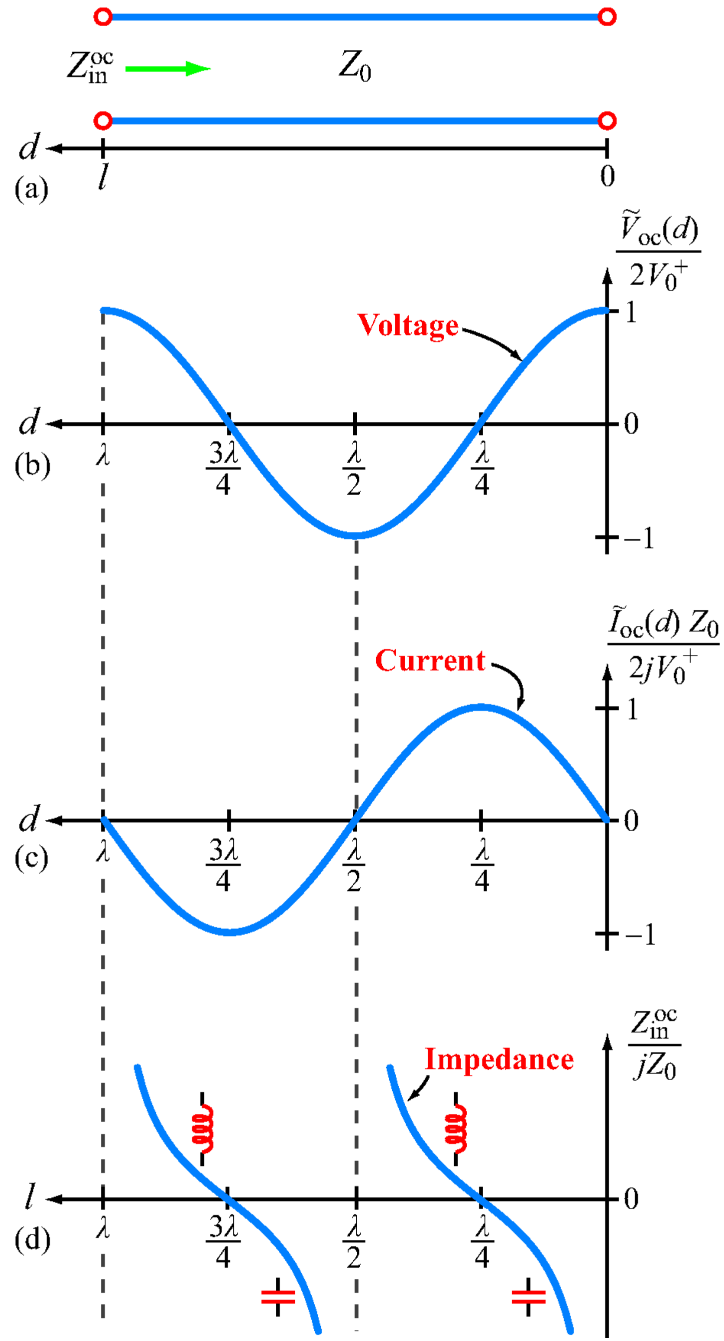
- Impedancia:

$$\boxed{Z_{\mathrm{in}}^{\mathrm{sc}}(\ell) = jZ_0\tan(\beta\ell)}$$

- Si $0 < \beta\ell < \pi/2 \rightarrow Z_{in}$ es inductiva
  ($0 < \ell < \lambda/4$)
- Si $\pi/2 < \beta\ell < \pi \rightarrow Z_{in}$ es capacitiva
  ($\lambda/4 < \ell < \lambda/2$)

Imagen: F. T. Ulaby, *Fundamentals od Applied Electromagnetics*, 6th Ed., Pearson, 2010

2.4 Impedancia de entrada



Línea terminada en circuito abierto:

$$Z_L = \infty \qquad \Gamma_L = +1 \qquad \mathrm{ROE} = \infty$$

- Tensión en la línea:

$$V(\ell) = 2V_{0i}\cos(\beta\ell)$$

- Corriente en la línea:

$$I(\ell) = 2j\frac{V_{0i}}{Z_0}\sin(\beta\ell)$$

- Impedancia:

$$\boxed{Z_{\text{in}}^{\text{oc}}(\ell) = -jZ_0\cot(\beta\ell)}$$

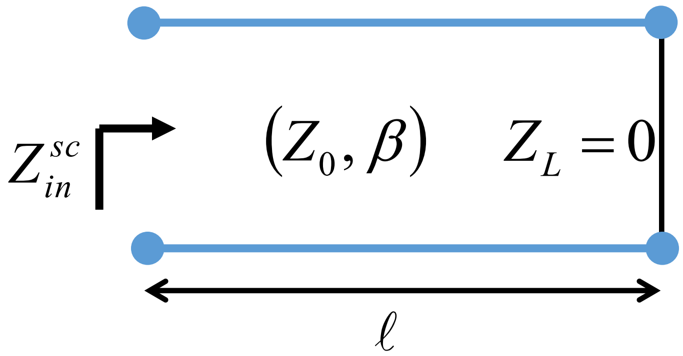
- Si $0 < \beta\ell < \pi/2$ → Z_{in} es capacitiva
  $(0 < \ell < \lambda/4)$
- Si $\pi/2 < \beta\ell < \pi$ → Z_{in} es inductiva
  $(\lambda/4 < \ell < \lambda/2)$

Imagen: F. T. Ulaby, *Fundamentals od Applied Electromagnetics*, 6th Ed., Pearson, 2010

- Ejemplo 8: Determinar la longitud física de una línea de transmisión de 50 Ohm terminada en cortocircuito para que su impedancia de entrada a la frecuencia de 2.25 GHz sea igual a la impedancia de un condensador de 4 pF. La velocidad de fase en la línea vale 0.75c.

Ulaby 6ª Ex 2-8

Solución:



- Debe verificarse: $Z_{\text{in}}^{\text{sc}}(\ell) = Z_C$

- luego $jZ_0 \tan(\beta\ell) = \dfrac{1}{j\omega C}$

- de donde $\tan(\beta\ell) = -\dfrac{1}{Z_0\omega C} = -0.3537$

- entonces

$$\beta\ell = \arctan(-0.3537) = -0.34 + \pi n = \begin{cases} \text{n=0} \Rightarrow -0.34 \text{ rad} \\ \text{n=1} \Rightarrow \pi - 0.34 \text{ rad=2.8 rad} \end{cases}$$

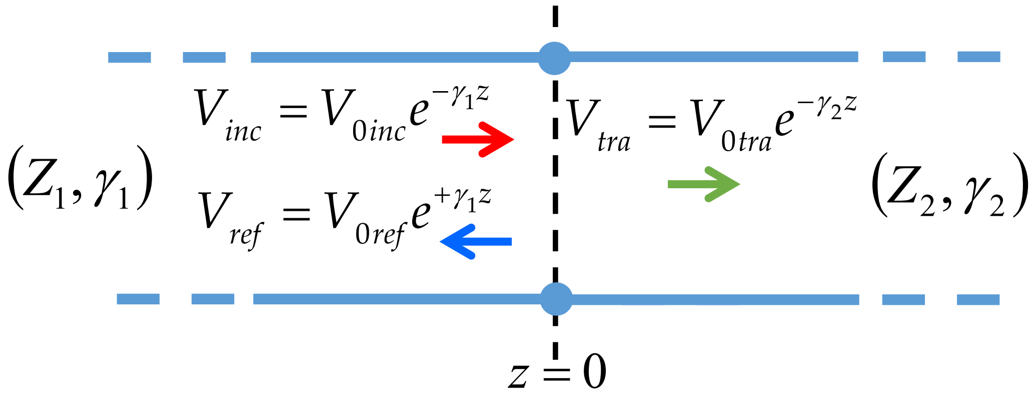
- La longitud de la línea es (tomamos más corta):

$$\ell = \frac{2.8}{\beta} = \frac{2.8 v_p}{\omega} = \frac{2.8 \times 0.75 \times 3 \times 10^8}{2\pi \times 2.25 \times 10^9} = 4.46 \text{ cm}$$

2.4 Impedancia de entrada

<u>Reflexión y transmisión en la unión de dos líneas de transmisión:</u>

- Consideramos la unión de 2 líneas semiinfinitas de distinta impedancia:



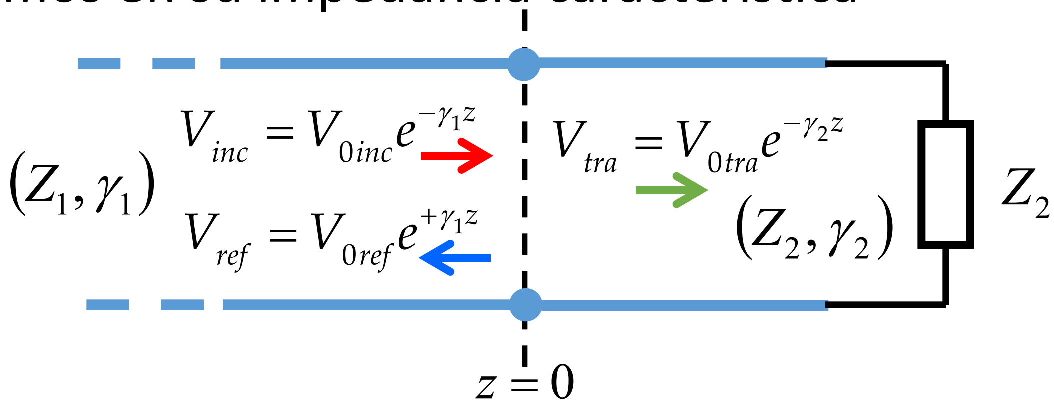
- Una onda incidente se propaga por la línea 1
- Cuando la onda incidente "ve" un cambio de impedancia se produce una onda reflejada y otra transmitida

\- Queremos calcular los coeficientes de reflexión, Γ, y de transmisión, T, en la unión (z = 0)

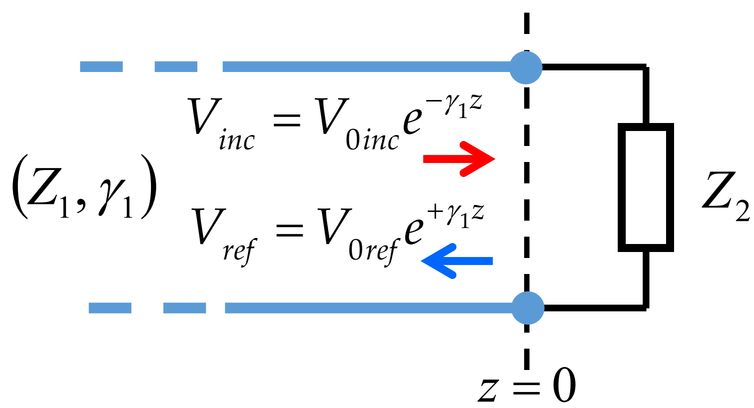
$$\Gamma \equiv \frac{V_{0ref}}{V_{0inc}} \qquad T \equiv \frac{V_{0tra}}{V_{0inc}}$$

2.4 Impedancia de entrada

- El problema planteado no cambia si tomamos una longitud finita de línea 2 y la terminamos en su impedancia característica

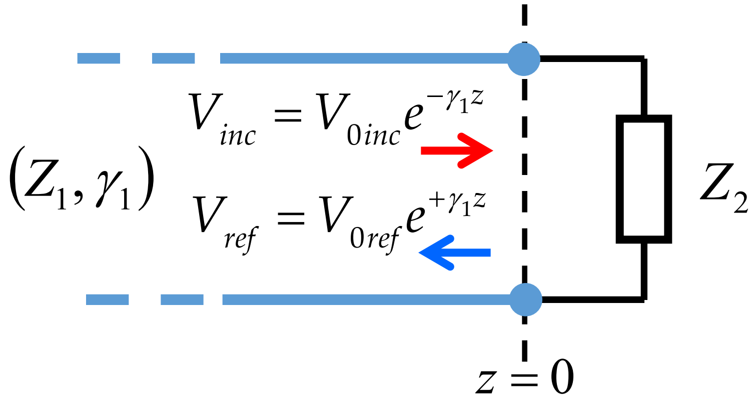


- Tomamos una longitud nula de línea 2



- Este problema ya lo estudiamos en el apartado 2.2

2.4 Impedancia de entrada



- El coef. de refl. vale:

$$\Gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

- Para calcular el coef. de trans. tenemos en cuenta que $V_{0t} = V_{0i} + V_{0r}$

- Dividiendo por V_{0i} resulta $T = 1 + \Gamma$ $\longrightarrow$ $\boxed{T = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}}$

- Es usual expresar Γ y T en decibelios a través de cantidades conocidas como <u>Pérdidas de Retorno</u>

$$\boxed{\mathrm{RL} = \text{-}20 \log |\Gamma| \quad (\mathrm{dB})}$$ (Return Loss)

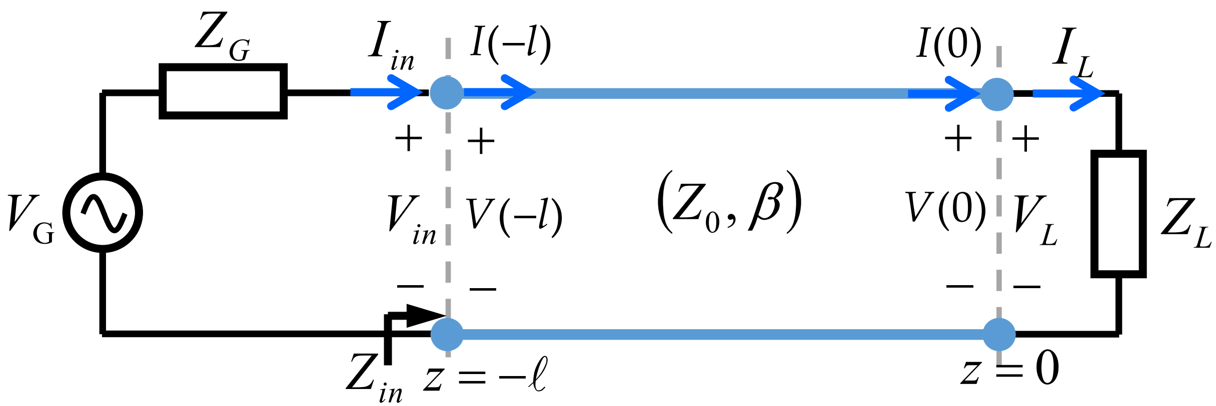
- y <u>Pérdidas de Inserción</u>

$$\boxed{\mathrm{IL} = \text{-}20 \log |T| \quad (\mathrm{dB})}$$ (Insertion Loss)

Más detalles en **Pozar** 2.6

2.5 Desadaptación en la carga y en el generador

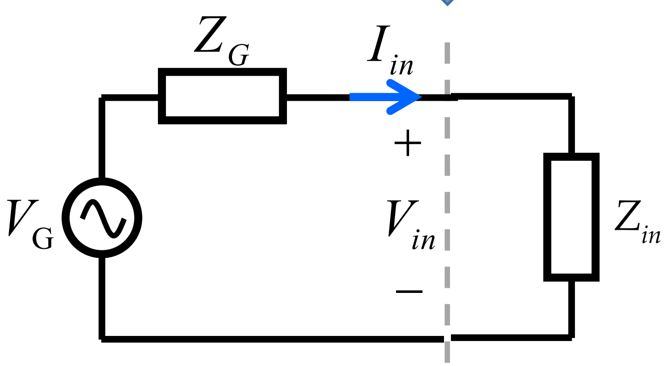
- Potencia media entregada a la carga



$$V(-l) = V_{0i}\left(e^{-j\beta(-l)} + \Gamma_L e^{j\beta(-l)}\right)$$

$$I(-l) = \frac{V_{0i}}{Z_0}\left(e^{-j\beta(-l)} - \Gamma_L e^{j\beta(-l)}\right)$$

Circuitos equivalentes



$$V_{in} = \frac{V_G Z_{in}}{Z_G + Z_{in}}$$

$$I_{in} = \frac{V_G}{Z_G + Z_{in}}$$

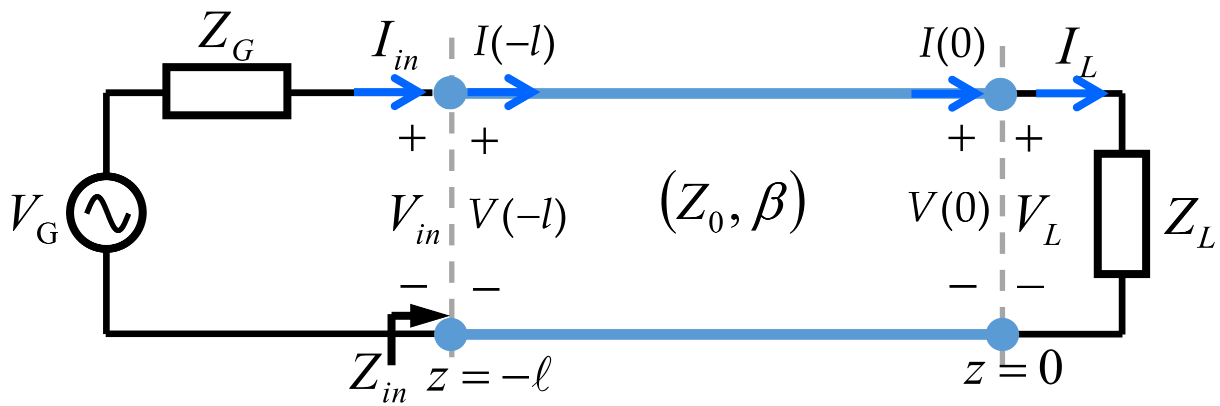
$$V_{in} = V(-l) = V_{0i}\left(e^{-j\beta(-l)} + \Gamma_L e^{j\beta(-l)}\right)$$

$$I_{in} = I(-l) = \frac{V_{0i}}{Z_0}\left(e^{-j\beta(-l)} - \Gamma_L e^{j\beta(-l)}\right)$$

$$\boxed{P_{in} = \frac{1}{2}\Re\left[V_{in} I_{in}^*\right] = \frac{1}{2}\Re\left[V(-l) I^*(-l)\right] = P(-l)}$$

2.5 Desadaptación en la carga y en el generador

- Potencia media entregada a la carga



Potencia a la salida del generador/entrada de la línea

$$\left.\begin{aligned} V_{in} &= V(-l) = V_{0i}\left(e^{-j\beta(-l)} + \Gamma_L e^{j\beta(-l)}\right) \\ I_{in} &= I(-l) = \frac{V_{0i}}{Z_0}\left(e^{-j\beta(-l)} - \Gamma_L e^{j\beta(-l)}\right) \end{aligned}\right\} \quad P_{in} = \frac{1}{2}\Re\left[V_{in} I_{in}^*\right] = \frac{1}{2}\Re\left[V(-l) I^*(-l)\right] = P(-l)$$

Potencia en la carga/final de la línea

$$\left.\begin{aligned} V_L &= V(0) = V_{0i}\left(1 + \Gamma_L\right) \\ I_L &= I(0) = V_{0i}\left(1 - \Gamma_L\right)/Z_0 \end{aligned}\right\} \quad P_L = \frac{1}{2}\Re\left[V_L I_L^*\right] = \frac{1}{2}\Re\left[V(0) I^*(0)\right] = P(0)$$

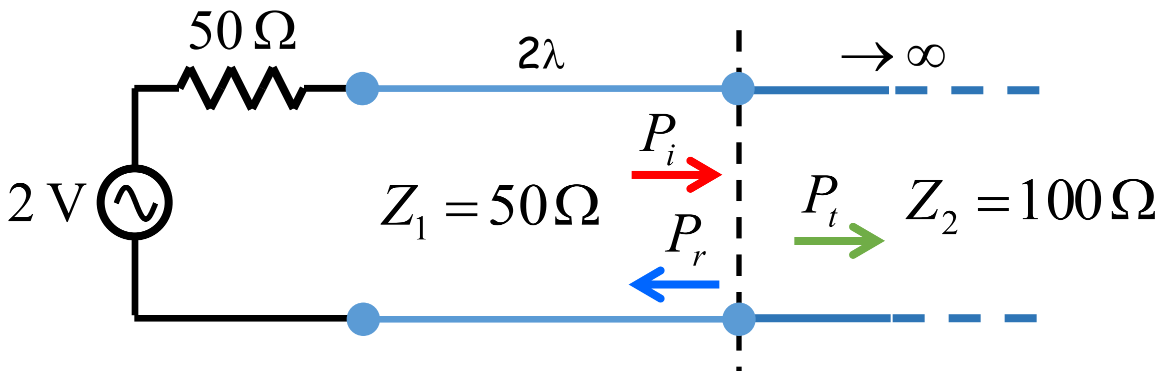
Potencia en cualquier punto de la línea

$$\left.\begin{aligned} V(z) &= V_{0i}\left(e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{j\beta z}\right) \\ I(z) &= \frac{V_{0i}}{Z_0}\left(e^{-j\beta z} - \Gamma_L e^{j\beta z}\right) \end{aligned}\right\} \quad P(z) = \frac{1}{2}\Re\left[V(z) I^*(z)\right] = \frac{\left|V_{0i}\right|^2}{2\left|Z_0\right|^2}\Re(Z_0)\left(1 - \left|\Gamma_L\right|^2\right) \Rightarrow$$

No depende de z

$$\boxed{P_{in} = P(-l) = P(0) = P_L}$$

- Ejemplo 9: Calcular, en el circuito de la figura, las potencias incidente, reflejada y transmitida a la línea de 100 Ohm.

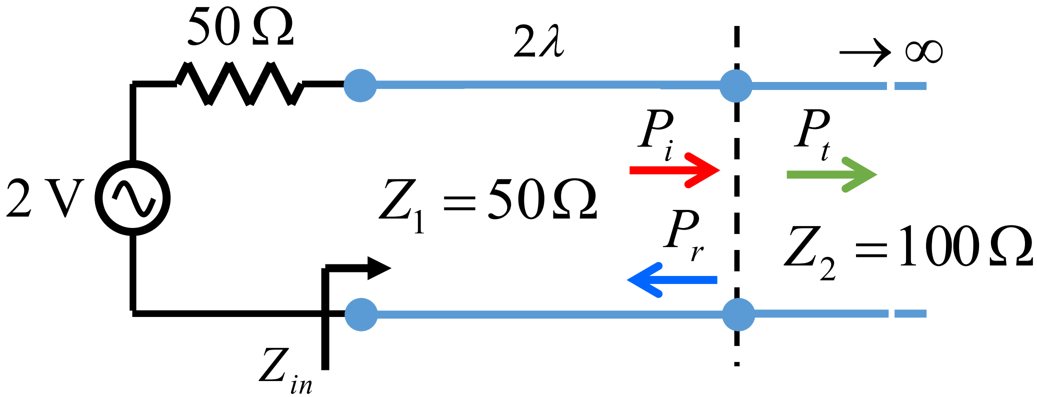


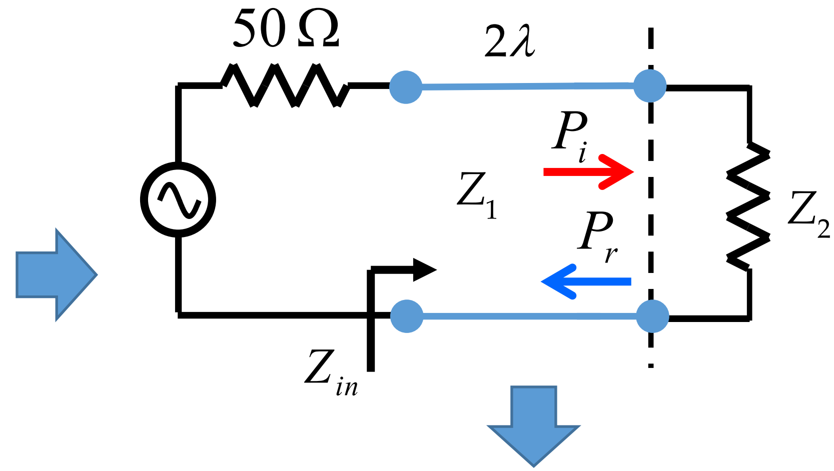
Ulaby 6ª P 2.44

Solución:

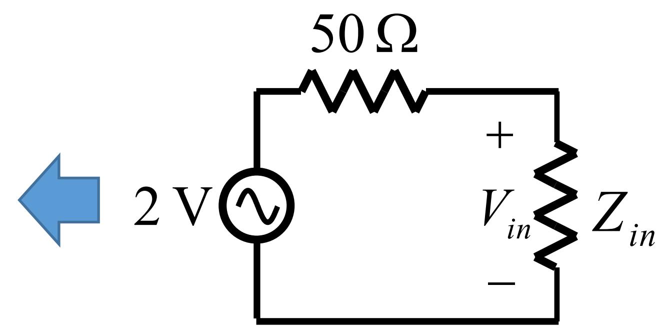
- Teniendo en cuenta la línea no tiene pérdidas, la potencia transmitida a la carga es la misma que la potencia disipada en la impedancia de entrada Zin vista desde los terminales del generador

Potencia transmitida





- En este caso $Z_{in} = 100\,\Omega$



$$V_{in} = V_g \frac{Z_g}{Z_g + Z_{in}} = 2\frac{100}{150} = \frac{4}{3}\,\mathrm{V} \qquad P_t = \frac{1}{2}\frac{|V_{in}|^2}{|Z_{in}|^2}\Re\{Z_{in}\} = \frac{1}{2}\frac{\left(4/3\right)^2}{100} = 8.9\,\mathrm{mW}$$

Potencia incidente (Forma 1)

- Por el principio de la conservación de la energía

$$P_i = P_t + P_r = P_t + |\Gamma_L|^2 P_i \Rightarrow P_i = \frac{P_t}{1 - |\Gamma_L|^2} = \frac{8.9}{1 - \left(1/3\right)^2} = 10\ mW$$

- El coef. de refl. vale $\Gamma_L = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{100 - 50}{100 + 50} = 1/3$

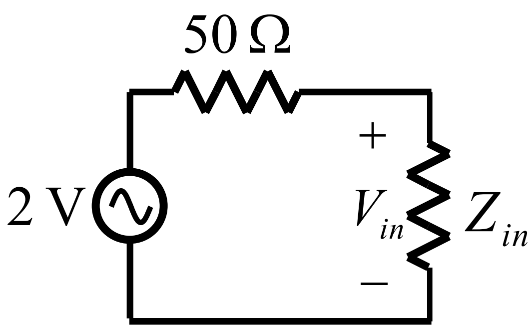
Potencia incidente (Forma 2)

- Como vimos en apartado 2.2, la potencia de la onda incidente es:

$$P_i = \frac{1}{2}\frac{|V_{0i}|^2}{|Z_0|^2}\Re\{Z_0\}$$

Conocemos la impedancia característica y solo necesitamos $|V_{0i}|$

- Según apartado 2.5, $V_{in}=V(-l)$:

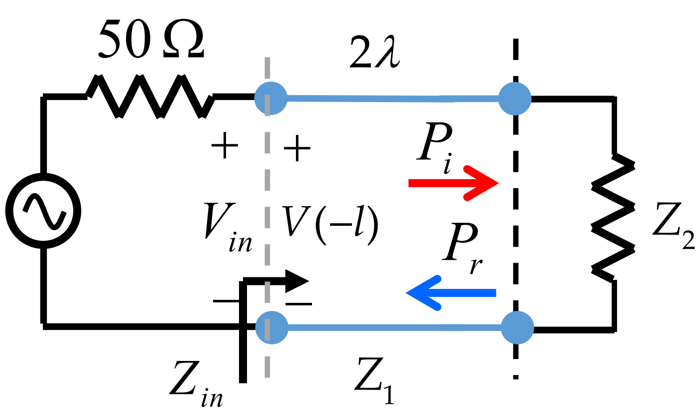


$$V_{in} = V(-l) = V_{0i}\left(e^{-j\beta(-l)} + \Gamma_L e^{j\beta(-l)}\right)$$

$$V_{in} = V(-2\lambda) = V_{0i}\left(e^{-j\beta(-2\lambda)} + \frac{1}{3}e^{j\beta(-2\lambda)}\right)$$

De esta expresión despejamos V_{01}

$$V_{0i} = \frac{4/3}{\left(e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(-2\lambda)} + \frac{1}{3}e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(-2\lambda)}\right)} = 1\ V$$

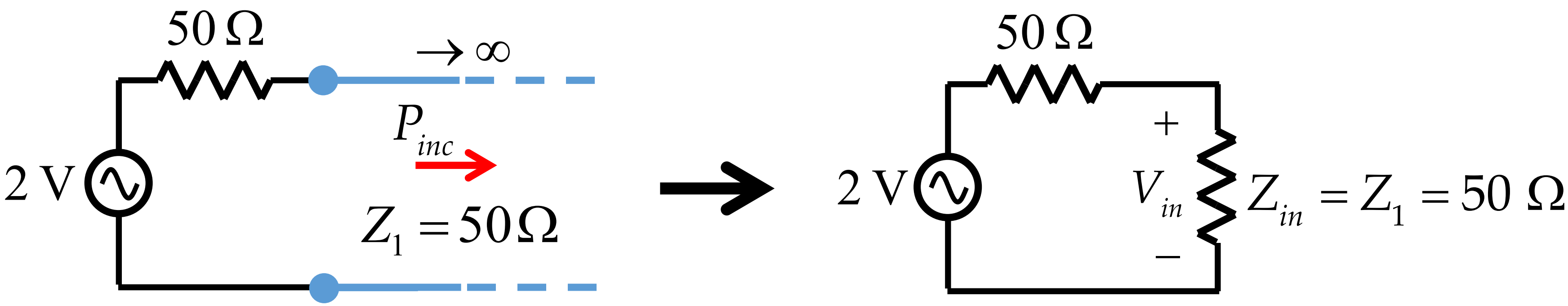


Así la potencia incidente es:

$$P_i = \frac{1}{2}\frac{|V_{0i}|^2}{|Z_0|^2}R_0 = \frac{1}{2}\frac{(1)^2}{|50|^2}50 = 10\ mW$$

Potencia incidente (Forma 3)

- La potencia de la onda incidente solo depende de V_{0i}, es decir, no depende de la carga.
- Por tanto, podemos calcular la potencia incidente como si la línea fuese semiinfinita (sin reflexión):



- De esta manera

$$V_{in} = V_g \frac{Z_{in}}{Z_g + Z_{in}} = 2\frac{50}{50+50} = 1\ \mathrm{V}$$

$$P_i = \frac{1}{2}\frac{\left|V_{in}\right|^2}{\left|Z_1\right|^2}\Re\left\{Z_1\right\} = \frac{1}{2}\frac{(1)^2}{50} = 10\mathrm{mW}$$

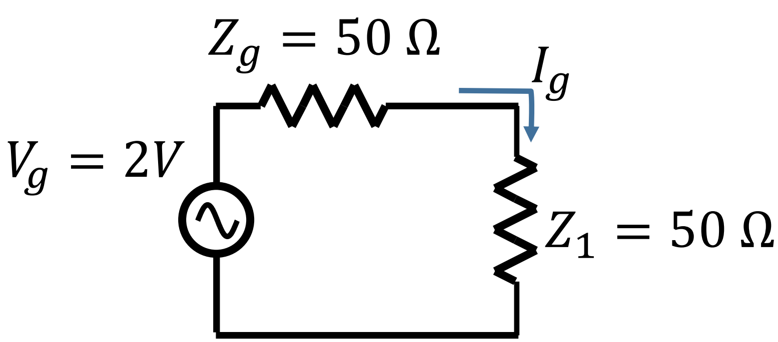
Potencia reflejada

- A partir de la relación entre P_i y P_r

$$P_r = \left|\Gamma_L\right|^2 P_i \Rightarrow P_r = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 10 = 1.1\,mW$$

Potencia generada

- Representa la potencia aportada por el generador.
- Se reparte entre la potencia en la impedancia del generador y la potencia incidente P_i
- *Siguiendo, la "Forma 3" anterior*



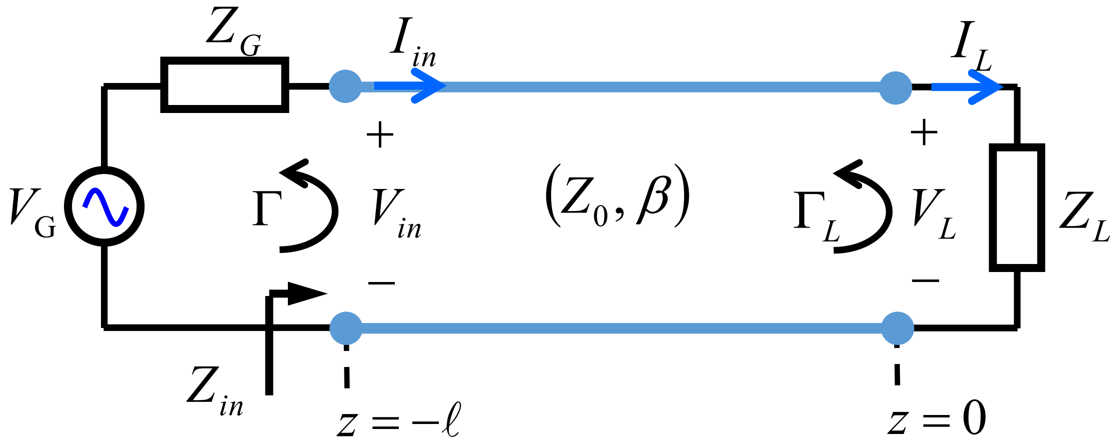
$$P_{gen} = \frac{1}{2}\Re\left\{V_g \cdot I_g^*\right\}$$

$$I_g = \frac{V_g}{Z_g + Z_1}$$

$$P_{gen} = \frac{1}{2}\frac{\left|V_g\right|^2}{\left|Z_g + Z_1\right|^2}\Re\left\{Z_g + Z_1\right\} = \frac{1}{2}\frac{\left|2\right|^2}{\left|100\right|^2}\Re\left\{100\right\} = 20mW$$

2.5 Desadaptación en la carga y en el generador

- Consideramos una línea sin pérdidas terminada en una impedancia de carga Z_L y alimentada mediante un generador de impedancia Z_G



- En general $Z_G \neq Z_0 \neq Z_L$
- Como ya sabemos:

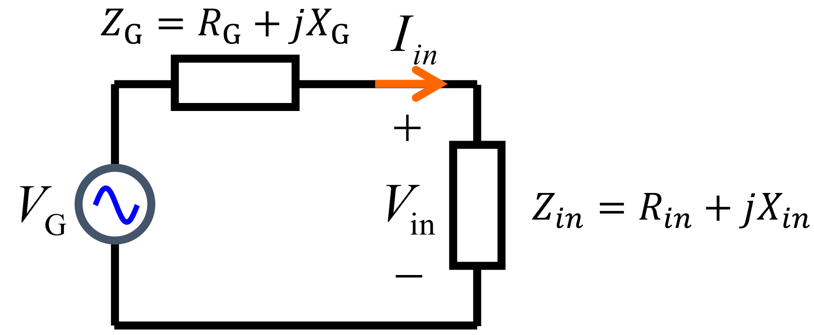
$$Z_{\text{in}} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta\ell)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta\ell)}$$

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

2.5 Desadaptación en la carga y en el generador

Potencia media entregada a la carga:

Como se ha demostrado anteriormente la potencia entregada a la carga Z_L es igual a la disipada en la impedancia a la entrada Z_{in}



$$P_L = P_{in} = \frac{1}{2}\Re[V_{in} I_{in}^*] = \frac{1}{2}\Re\left[V_{in}\frac{V_{in}^*}{Z_{in}^*}\right]$$

Por teoría de circuitos sabemos que:

$$V_{in} = V_g \frac{Z_{in}}{Z_g + Z_{in}} \qquad I_{in} = \frac{V_g}{Z_g + Z_{in}}$$

- Sustituyendo la expresión de V_{in}:

$$P_L = P_{in} = \frac{1}{2}|V_g|^2 \frac{\Re[Z_{in}]}{|Z_g + Z_{in}|^2} = \frac{1}{2}|V_g|^2 \frac{R_{in}}{(R_g + R_{in})^2 + (X_g + X_{in})^2}$$

-Veamos varios casos particulares

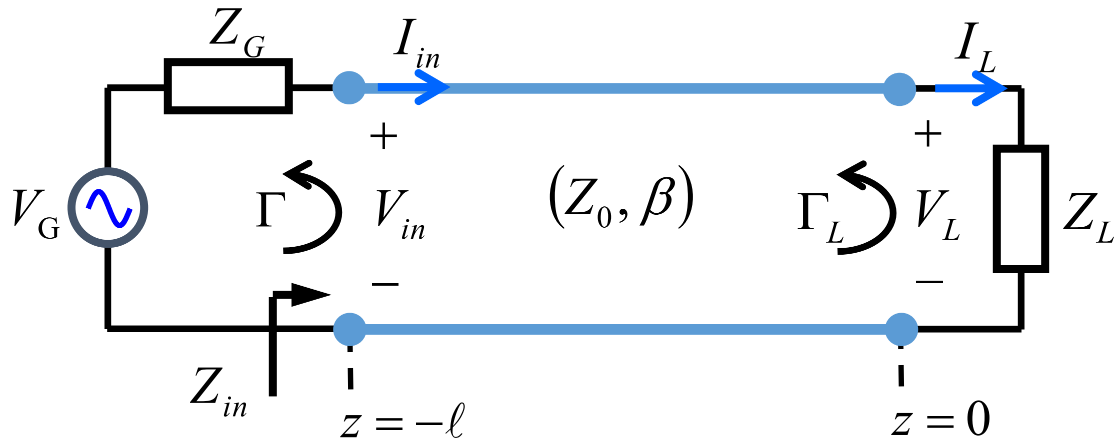
2.5 Desadaptación en la carga y en el generador

- 1. Impedancia de carga adaptada a la línea $Z_L = Z_0$:

$$\Gamma_L = 0$$

$$Z_{in} = Z_0$$

$$P = \frac{1}{2}\frac{|V_g|^2}{|Z_g + Z_0|^2}\Re\{Z_0\}$$



- 2. Impedancia de entrada adaptada al generador $Z_{in} = Z_G$:

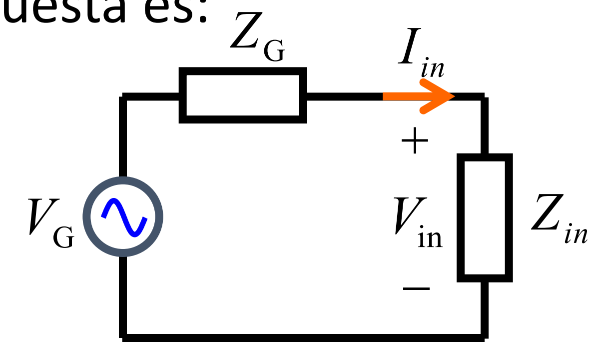
$$\Gamma = 0$$

$$P = \frac{1}{2}|V_g|^2 \frac{R_g}{4\left(R_g^2 + X_g^2\right)}$$

- Surge la siguiente cuestión: ¿cuál es la impedancia Z_{in} óptima para que se produzca la máxima transferencia de potencia a la carga?

2.5 Desadaptación en la carga y en el generador

- Según sabemos de la Teoría de Circuitos, la respuesta es:



$$\boxed{Z_{in} = Z_G^*}$$

!Adaptación Conjugada!

(suponemos Z_G fija)

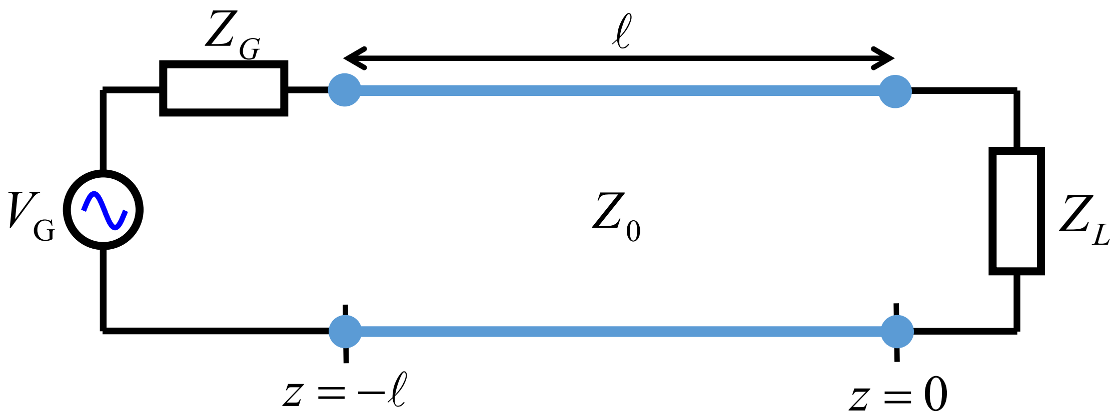
- La potencia máxima transferida a la carga vale

$$\boxed{P_{max} = \frac{|V_G|^2}{8R_G}}$$

Comentarios:

- Este resultado no implica que los coefs. de refl. Γ y Γ_L sean nulos.
- Si Z_g es real este resultado coincide con el caso 2 de la hoja anterior.
- Siempre hay pérdida de potencia en el generador. La mayor eficiencia en la transmisión se consigue haciendo Z_g lo más pequeña posible.

- Ejemplo 10: Calcular la potencia entregada a la carga en el circuito de la figura. $V_g = 15\sqrt{2}\ \mathrm{V}, Z_g = 75\ \Omega,\ Z_0 = 75\ \Omega,\ Z_L = (60 - j40)\ \Omega,\ \ell = 0.7\lambda.$



Pozar 3ª 2.15

Solución:

- Según hemos visto, la potencia entregada a la carga vale

$$P = \frac{1}{2} |V_g|^2 \frac{\Re[Z_{in}]}{|Z_g + Z_{in}|^2}$$

- La impedancia de entrada en $z = -\ell$ se calcula mediante la expresión:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta\ell)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta\ell)}$$

- Los datos para calcular Z_{in} son: $Z_0 = 75\,\Omega$, $Z_L = (60 - j40)\,\Omega$, $\ell = 0.7\lambda$.

- Entonces $\beta\ell = \dfrac{2\pi}{\lambda}\ell = \dfrac{2\pi}{\lambda}0.7\lambda = 1.4\pi$

- Luego

$$Z_{\text{in}} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta\ell)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta\ell)}$$

$$= 75 \frac{60 - j40 + j75\tan(1.4\pi)}{75 + j(60 - j40)\tan(1.4\pi)} = (48.19 + j27.33)\,\Omega$$

- Sustituyendo en la expresión de la potencia

$$P = \frac{1}{2}|V_g|^2 \frac{\Re[Z_{in}]}{|Z_g + Z_{in}|^2} = 15^2 \frac{48.19}{|75 + 48.19 + j27.33|^2} = 0.68\ \text{W}$$

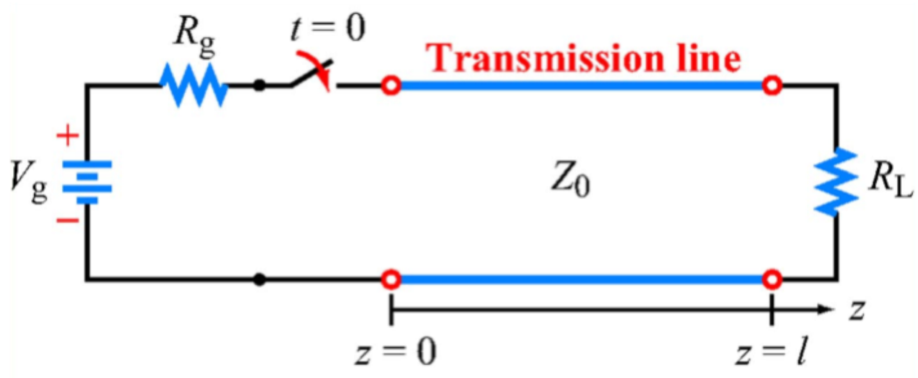
- La máxima potencia entregable a la carga es (no lo piden)

$$P_{\max} = \frac{|\mathrm{V_g}|^2}{8R_{\mathrm{g}}} = 0.75\ \text{W}$$

2.6 Respuesta transitoria

Más detalles en
Ulaby 2.12

- Hasta ahora hemos estudiado las líneas de transmisión en el dominio de la frecuencia.
- En este apartado abordamos el estudio de la respuesta transitoria
- Consideramos el siguiente circuito:

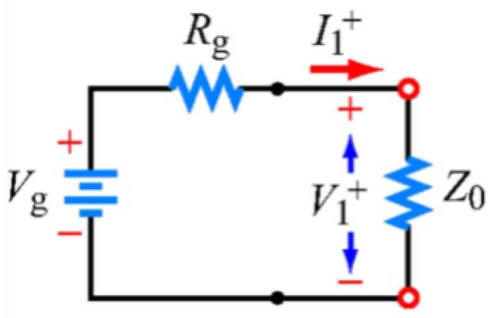


- Suponemos que el interruptor se cierra en $t = 0$
- En este apartado consideramos el origen de coordenadas, $z = 0$, al inicio de la línea de transmisión.

Imagen: F. T. Ulaby, *Fundamentals od Applied Electromagnetics*, 6th Ed., Pearson, 2010

2.6 Respuesta transitoria

- Al cerrar el interruptor, en el instante $t = 0^+$ la señal comienza a propagarse (velocidad v_p).
- Al no haber aún onda reflejada, la impedancia vista desde el generador, Z_{in}, es igual a la impedancia característica de la línea, Z_0.
- El circuito equivalente en ese instante, $t = 0^+$, es:



$$I_1^+ = \frac{V_g}{R_g + Z_0}$$

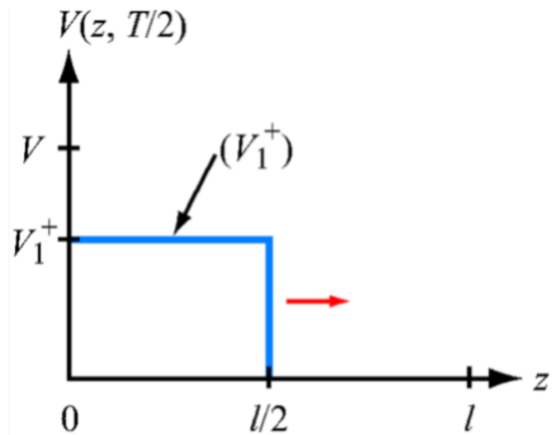
$$V_1^+ = \frac{V_g Z_0}{R_g + Z_0}$$

-

Imagen: F. T. Ulaby, *Fundamentals od Applied Electromagnetics*, 6th Ed., Pearson, 2010

2.6 Respuesta transitoria

- En el instante t, la señal habrá llegado hasta al posición $z = t \cdot v_p$
- Para llegar hasta el final de la línea requiere un tiempo $T=l/v_p$
- Si observamos la tensión a lo largo de la línea en el instante $t = T/2$, $V(z,T/2)$ obtenemos la siguiente gráfica:



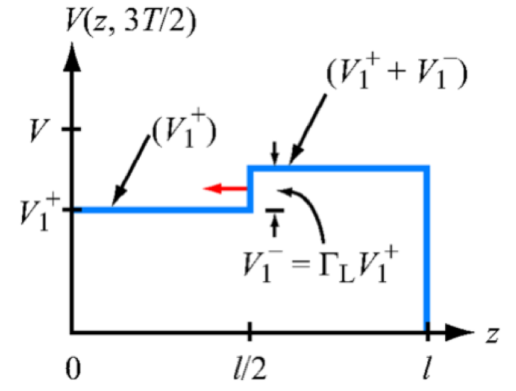
- En $t = T$, la señal llega hasta la carga y se produce una señal reflejada $V_1^- = \Gamma_L V_1^+$ con $\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$
- Esta señal reflejada se propaga hacia el generador, siendo la tensión en la línea la combinación de las ondas incidentes y reflejada

$$V = V_1^+ + V_1^- = (1 + \Gamma_L)V_1^+$$

Imagen: F. T. Ulaby, *Fundamentals od Applied Electromagnetics*, 6th Ed., Pearson, 2010

2.6 Respuesta transitoria

- La tensión a lo largo de la línea en $t=3T/2$ es:



- En $t = 2T$, la señal V_1^- llega hasta el generador y se produce una nueva señal reflejada $V_2^+ = \Gamma_g V_1^-$ con $\Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0}$
- Esta señal reflejada V_2^+ se propaga junto con V_1^+ hacia la carga. Ahora, la tensión en la línea es

$$V = V_1^+ + V_1^- + V_2^+ = \left(1 + \Gamma_L + \Gamma_L \Gamma_g\right) V_1^+$$

- La tensión a lo largo de la línea en $t=3T/2$ es:

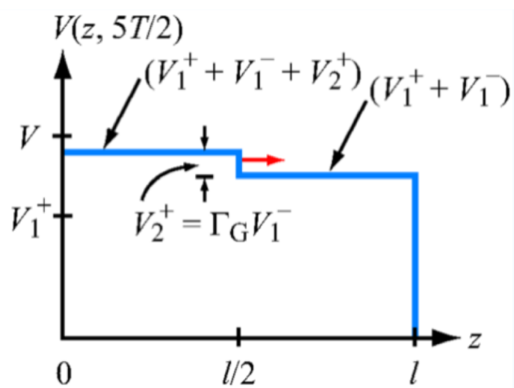


Imagen: F. T. Ulaby, *Fundamentals od Applied Electromagnetics*, 6th Ed., Pearson, 2010

2.6 Respuesta transitoria

- Este proceso de múltiples reflexiones continua indefinidamente
- Después de mucho tiempo, t → ∞, se alcanza estado estacionario
- En el estado estacionario la tensión es:

$$V = V_1^+ + V_1^- + V_2^+ + V_2^- + \cdots =$$
$$= \left(1 + \Gamma_L + \Gamma_L\Gamma_g + \Gamma_L^2\Gamma_g + \Gamma_L^2\Gamma_g^2 + \Gamma_L^3\Gamma_g^2 + \cdots\right)V_1^+ =$$
$$= (1 + \Gamma_L)\left(1 + \Gamma_L\Gamma_g + \Gamma_L^2\Gamma_g^2 + \Gamma_L^3\Gamma_g^3 + \cdots\right)V_1^+$$

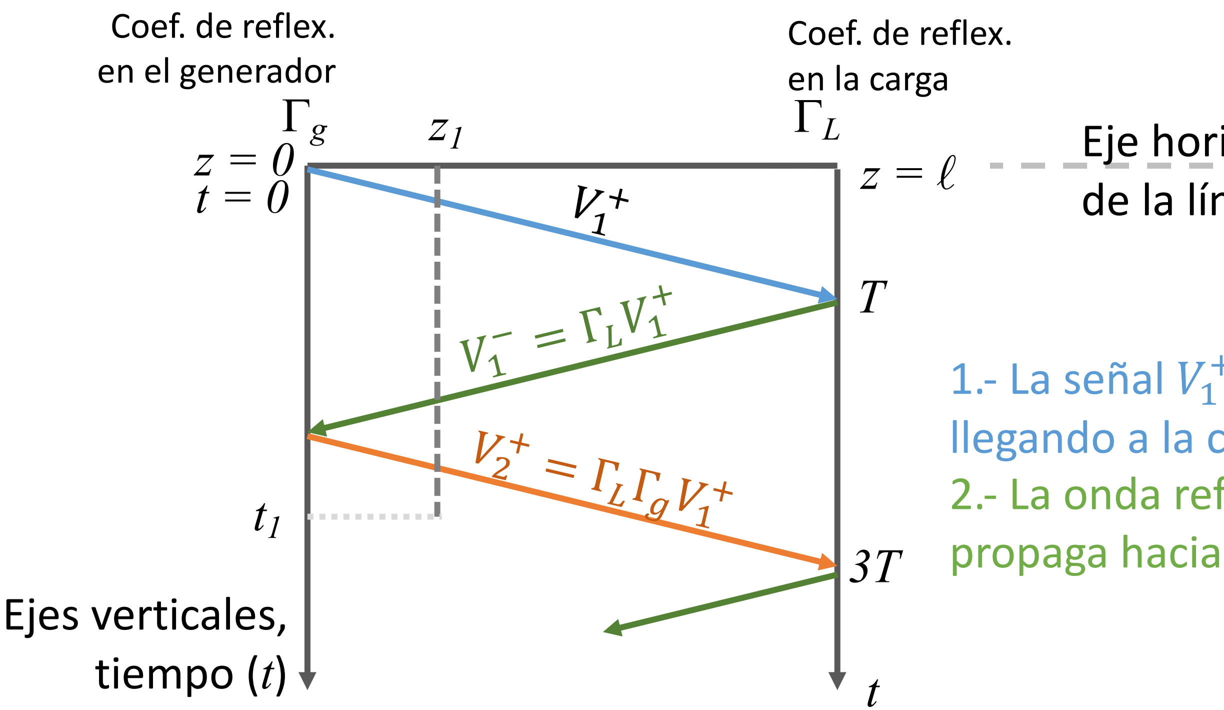
- El segundo paréntesis es una serie geométrica cuya suma vale $\frac{1}{1-\Gamma_L\Gamma_g}$
- Por tanto

$$V = \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L\Gamma_g}V_1^+ = \frac{V_g R_L}{R_g + R_L}$$

- Representa la tensión en estado estacionario, la cual corresponde con el resultado obtenido en un análisis DC en el que la línea se sustituye por una conexión ideal

2.6 Respuesta transitoria

- Para calcular la tensión en un punto de la línea utilizamos diagramas espacio – tiempo



1.- La señal V_1^+ comienza a propagarse en t=0 llegando a la carga en $t = T$

2.- La onda reflejada en la carga V_1^- se propaga hacia generador llegando en $t = 2T$.

- Para calcular la tensión en un punto de la línea z1 en un instante dado t1, $V(z_1,t_1)$ se traza una vertical en $z = z_1$ desde $t = 0$ hasta $t = t_1$ y se suman todas las ondas que corten la vertical trazada

- Ejemplo: $V(z_1,t_1) = V_1^+ + V_1^- + V_2^+$

2.6 Respuesta transitoria

- La variación temporal de la tención en un cualquier punto de la línea, z_1, puede determinarse dibujando los valores de $V(z_1,t)$ obtenidos al recorrer la línea vertical dibujada en $z = z_1$ desde $t = 0$ hasta el instante deseado.
- En el ejemplo se muestra la posición $z_1 = \ell/4$

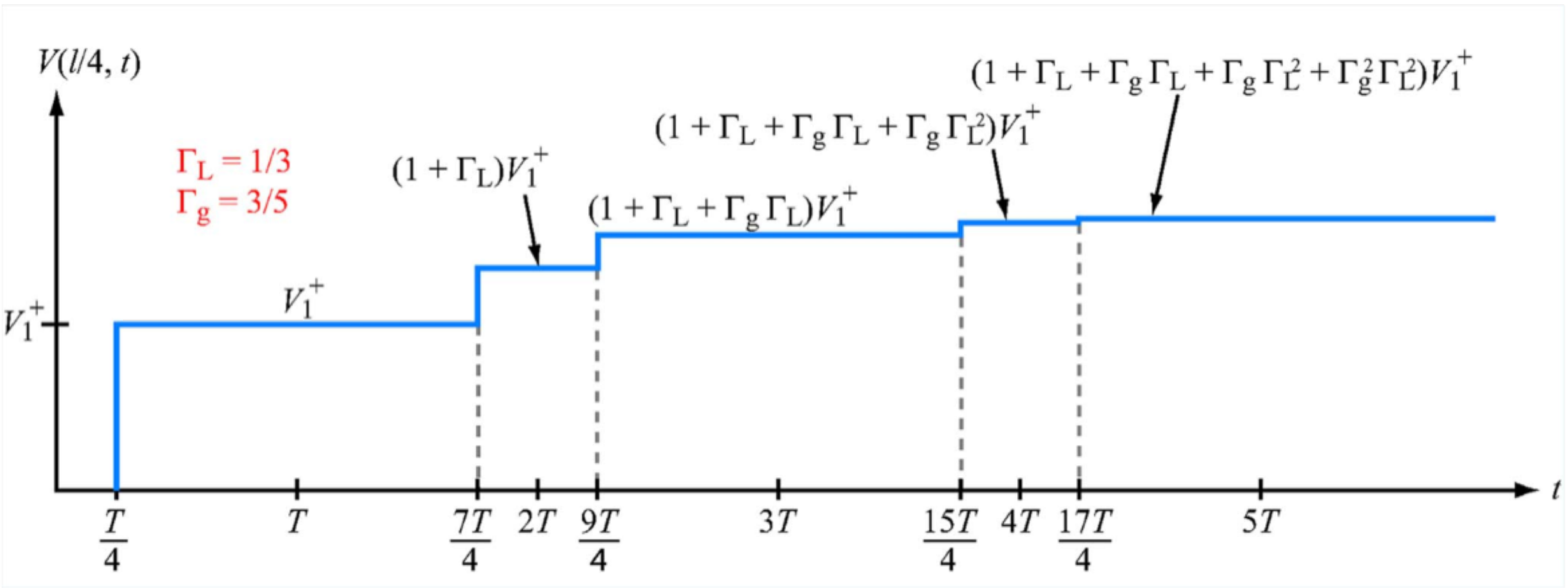
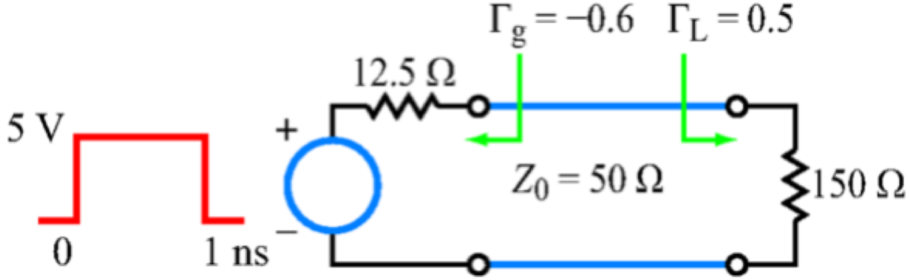


Imagen: F. T. Ulaby, *Fundamentals od Applied Electromagnetics*, 6th Ed., Pearson, 2010

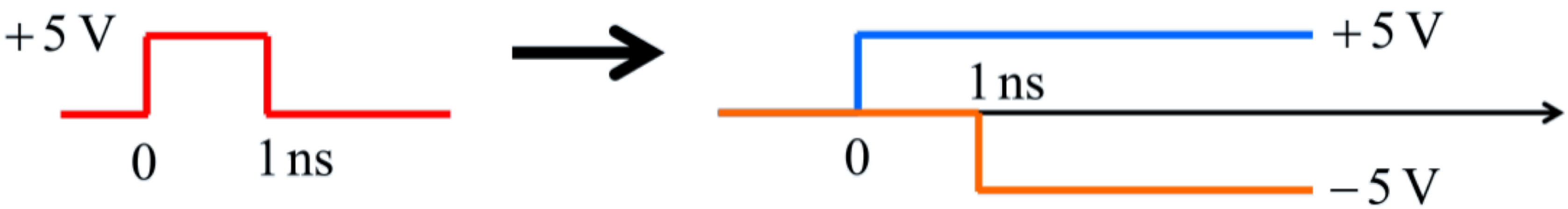
- Ejemplo 10: El circuito de la figura se excita con un pulso de tensión rectangular de amplitud 5 V y anchura 1 ns. Calcular la forma de la onda de la tensión en los terminales de la carga sabiendo que la línea de transmisión tiene 0.6 m de longitud y la velocidad de fase es c.



Ulaby 6ª Ex 2.15

Solución:

- Trataremos el pulso como la suma de 2 funciones escalón $5u(t)$ y $-5u(t+1)$



- Obtendremos el diagrama espacio-tiempo de cada función escalón

- Antes hay que calcular los parámetros necesarios
  - Tiempo que tarda en recorrer la línea:

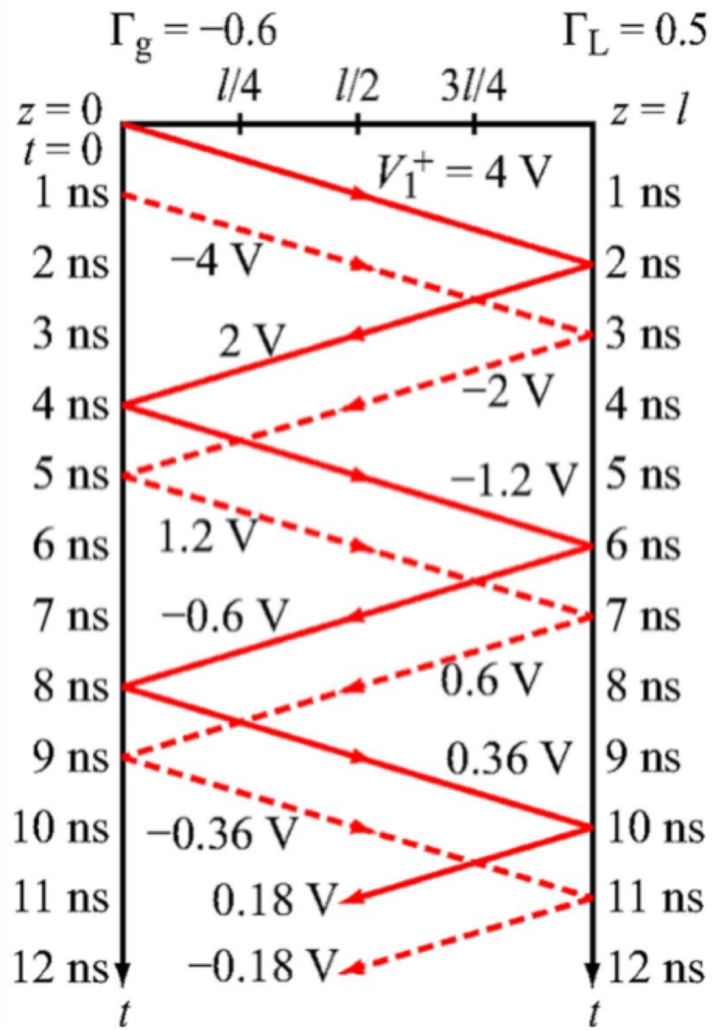
$$T = \frac{l}{c} = \frac{0.6}{3 \cdot 10^8} = 2\ ns$$

  - Coeficientes de reflexión en generador y carga

$$\Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} = \frac{12.5 - 50}{12.5 + 50} = -0.6 \qquad \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{150 - 50}{150 + 50} = 0.5$$

  - Tensión inicial:
    - Para el escalón positivo: $V_1^+ = \frac{V_g Z_0}{R_g + Z_0} = \frac{5 \times 50}{12.5+50} = 4V$
    - Para el escalón negativo será -4V

-Se obtiene el siguiente diagrama espacio-temporal



— función escalón $5u(t)$

- - - función escalón $-5u(t+1)$

Con esta información se obtiene la tensión en el plano de carga $V(\ell,t)=V_L(t)$

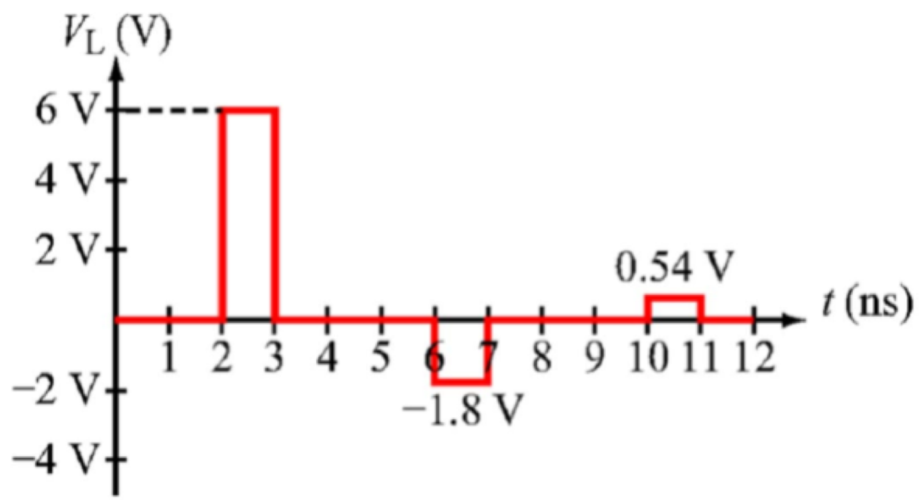


Imagen: F. T. Ulaby, *Fundamentals od Applied Electromagnetics*, 6th Ed., Pearson, 2010