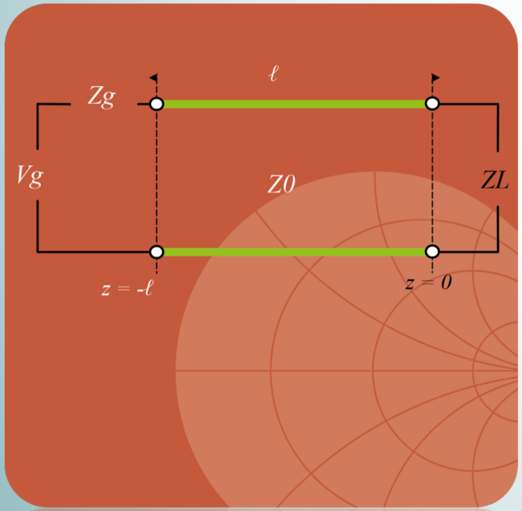
Medios de Transmisión Guiados

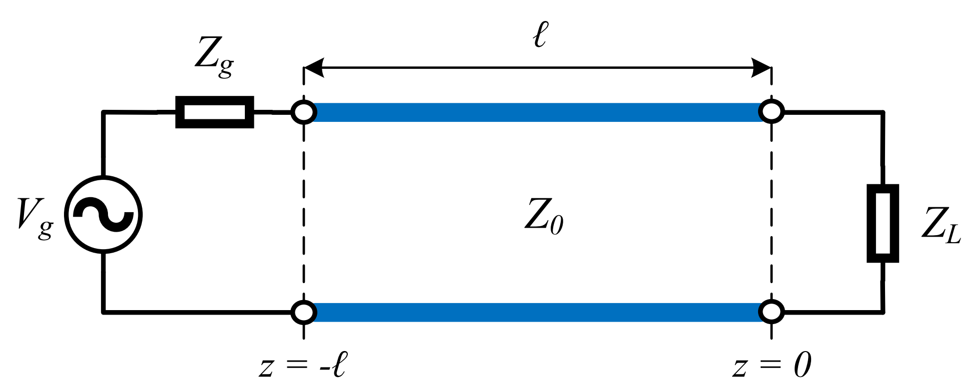
Tema 1. Líneas de transmisión



Juan Luis Cano de Diego
Óscar Fernández Fernández
José Antonio Pereda Fernández
DPTO. DE INGENIERÍA DE COMUNICACIONES

Tema 1. Líneas de Transmisión

- 1.1 Introducción
- 1.2 Modelo circuital de la línea de transmisión
- 1.3 Ecuaciones generales de la línea de transmisión
- 1.4 Solución de la ecuación de ondas
- 1.5 Líneas no dispersivas, con bajas pérdidas y sin pérdidas
- 1.6 Potencia



Bibliografía Básica para este Tema:

- [1] W. H. Hayt Jr. y J. A. Buck , “Engineering Electromagnetics”, McGraw-Hill International Edition, 7ª Ed, 2006.
  - Apartados 11.3 - 11.8

- [2] D. K. Cheng, “Fundamentos de Electromagnetismo para Ingeniería”, Addison-Wesley Longman de México, 1998

  Apartados 8.2, 8.4

- [3] D. M. Pozar, “Microwave Engineering” , 3ª Ed, Wiley, 2005.

  Apartados 2.1, 2.7

- [4] C. Pérez Vega, J. M. Zamanillo Sainz de la Maza, y A. Casanueva López, “*Sistemas de telecomunicación*” Universidad de Cantabria, 1ª Ed, Santander, 2007. https://personales.unican.es/perezvr/apuntes_sc.htm

  Capítulos 2 y 9

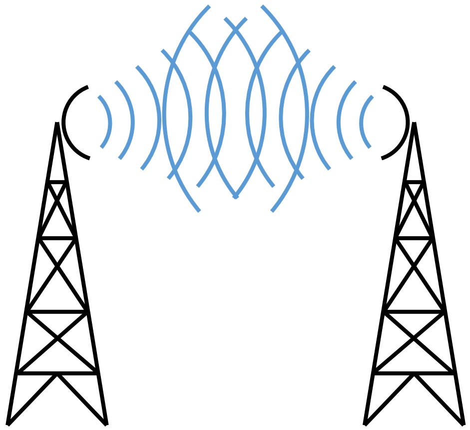
1.1 Introducción

¿Qué es la Ingeniería de Telecomunicación?

- Rama de la ingeniería que resuelve problemas de emisión, transmisión y recepción de señales (información contenida en ondas electromagnéticas o acústicas).
- La transmisión de señales electromagnéticas se puede realizar de dos formas: transmisión radiada y transmisión guiada.

Transmisión radiada.

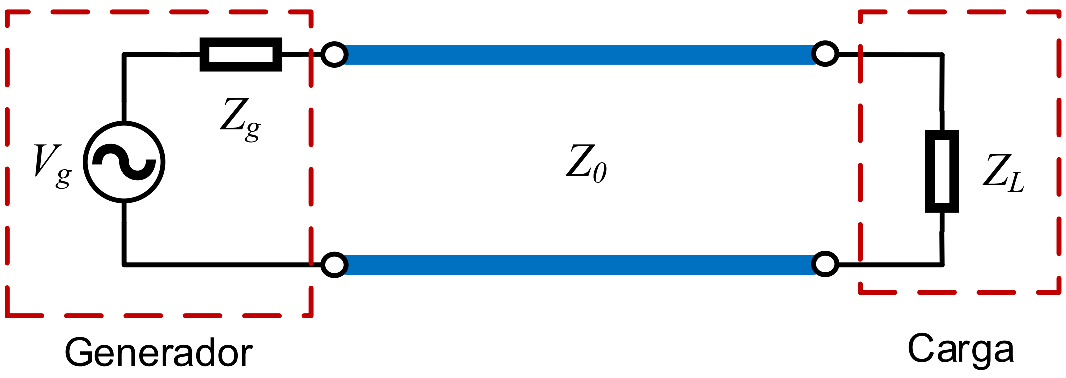
- Hace referencia a la propagación de ondas electromagnéticas por el espacio libre (aire, vacío).



1.1 Introducción

Transmisión guiada.

- Hace referencia a la propagación a través de una estructura que permita el confinamiento y guiado de las ondas desde el punto origen (típicamente llamado generador) hasta un punto destino (típicamente llamado carga).
- La estructura o medio a través del cuál se propaga la señal suele denominarse línea de transmisión.

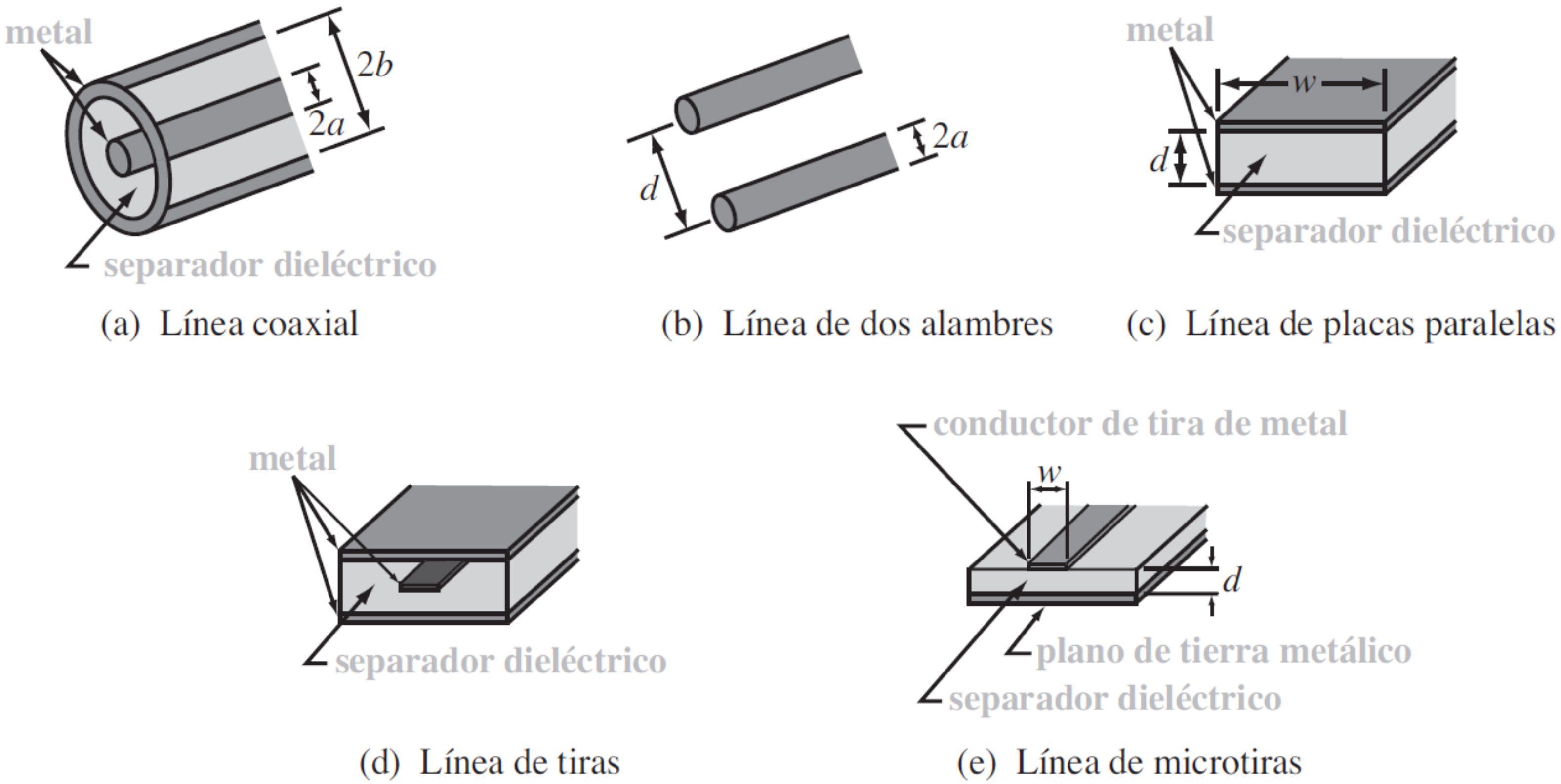


- Una generalización del concepto de línea de transmisión es el de guía de onda

1.1 Introducción

- Clasificación de los medios de transmisión:

1. Líneas de transmisión: formadas, al menos, por dos conductores separados por dieléctrico.



Líneas de transmisión TEM

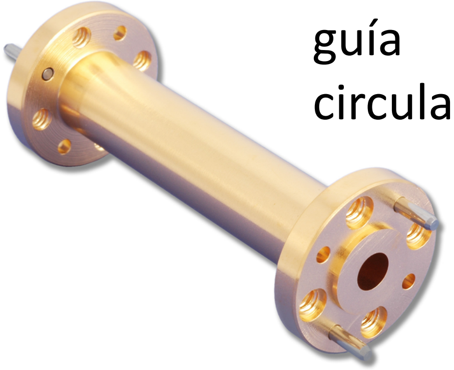
Imagen: F. T. Ulaby, *Fundamentos de aplicaciones en electromagnetismo*, 5ª Ed., Prentice-Hall, Inc., 2007

1.1 Introducción

2. Guías de onda: se pueden considerar dos tipos.

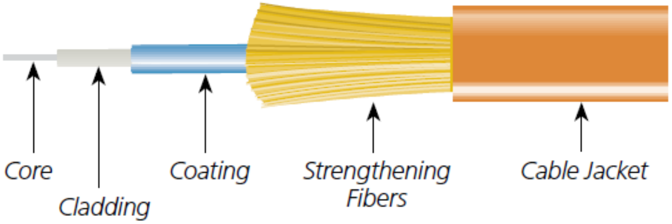
2.1 Guías metálicas: típicamente formadas por un único conductor

guía rectangular



guía circular

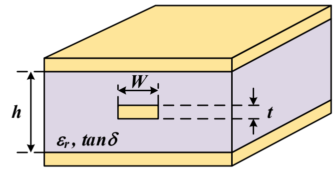
2.2 Guías dieléctricas: típicamente formadas por uno o varios medios dieléctricos (no tienen conductores)

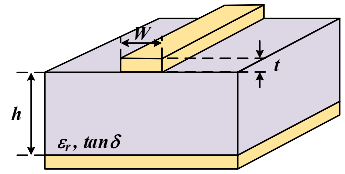


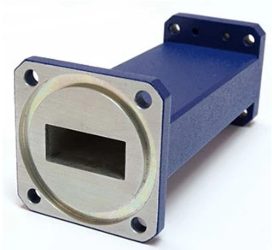
fibra óptica

- Las guías de onda no soportan propagación de tipo TEM
- En este tema nos limitaremos a estudiar **líneas de transmisión en régimen TEM**

1.1 Introducción







	Coaxial	Stripline	Microstrip	Guía rectangular
Modo preferido	TEM	TEM	Quasi-TEM	TE10
Otros modos	TM, TE	TM, TE	TM, TE	TM, TE
Dispersión	No	No	Baja	Media
Ancho de banda	Alto	Alto	Alto	Bajo
Pérdidas	Media	Alta	Alta	Baja
Capacidad potencia	Media	Baja	Baja	Alta
Tamaño	Grande	Medio	Pequeño	Muy grande
Facilidad de fabricación	Media	Fácil	Muy fácil	Media
Integración componentes	Difícil	Media	Fácil	Difícil

1.1 Introducción

- Análisis de las líneas de transmisión

Por teoría de campos electromagnéticos

Ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \overline{E} = -j\omega\mu\overline{H}$$

$$\nabla \times \overline{H} = j\omega\varepsilon\overline{E}$$

$$\nabla \cdot \overline{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \overline{H} = 0$$

E, H

Por teoría de circuitos extendida

Ley de Ohm
Leyes de Kirchhoff
(KVL, KCL)

V, I

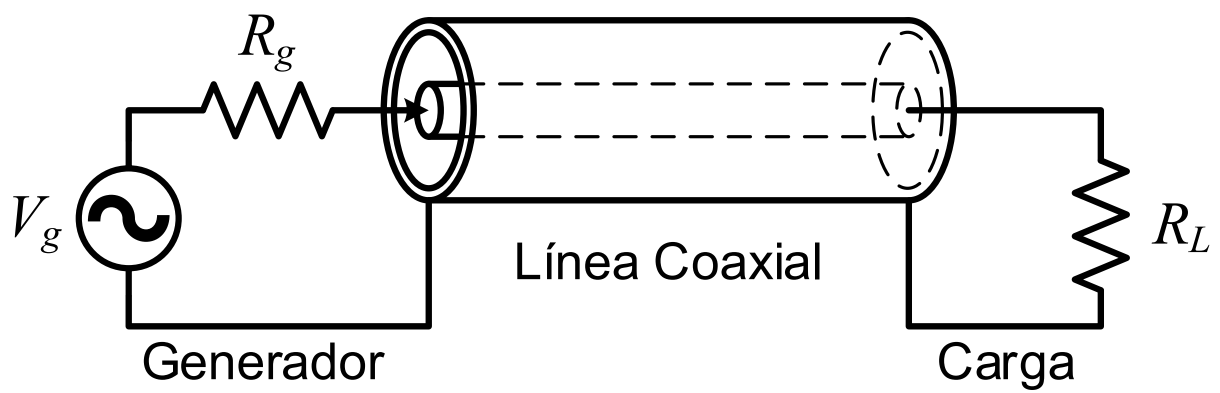
$$V = -\int E dl$$

$$I = \int H dl$$

¿Para qué lo analizamos? Para entender como afectará el medio de transmisión a la propagación de la señal: atenuación, retardos, modos…..

1.2 Modelo circuital de la línea de transmisión

- Consideramos un generador y una carga conectados a través de una línea de transmisión (por ej. un cable coaxial)



- El cable coaxial es un dispositivo físico. Por tanto, surge la siguiente cuestión:

¿Cómo podemos incorporar este elemento en el análisis del circuito?

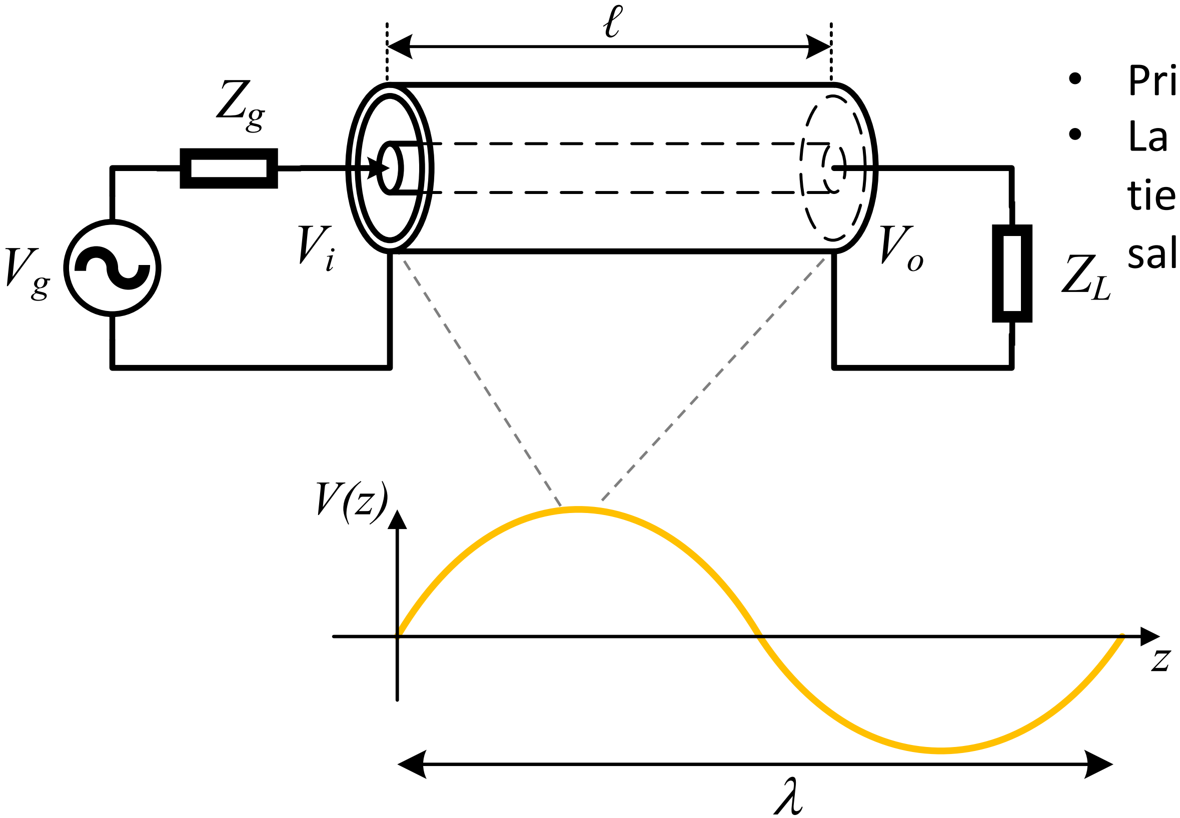
Respuesta → **Mediante su circuito equivalente**

1.2 Modelo circuital de la línea de transmisión

¿Cuál es el circuito equivalente del cable coaxial?

- La respuesta depende de la relación entre la longitud del cable ℓ y la longitud de onda de la señal λ

Caso $\ell << \lambda$ → teoría de circuitos (Kirchhoff)



- Principalmente para baja frecuencia
- La tensión a la entrada del coaxial tiene aprox. el mismo valor que a la salida. $V_i \approx V_0$

Recuerda:
- 100 Hz → λ= 3000 km
- 1 kHz → λ = 300 km
- 1 Mhz → λ = 300 m
- 1 GHz → λ = 0.3 m

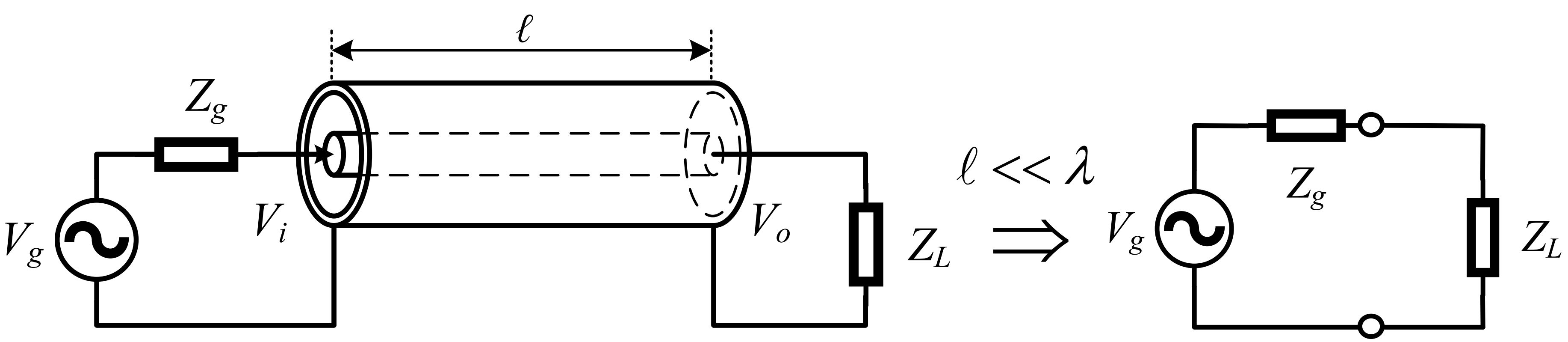
1.2 Modelo circuital de la línea de transmisión

¿Cuál es el circuito equivalente del cable coaxial?

- La respuesta depende de la relación entre la longitud del cable ℓ y la longitud de onda de la señal λ

Caso $\ell << \lambda$ → teoría de circuitos (Kirchhoff)

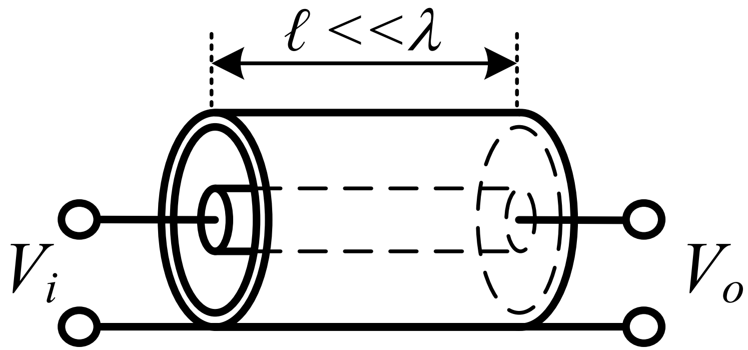
- Principalmente a baja frecuencia
- la tensión a la entrada del coaxial tiene aproximadamente el mismo valor que a la salida ($V_i \approx V_0$).
- Entonces, podemos sustituir el coaxial por conexiones ideales

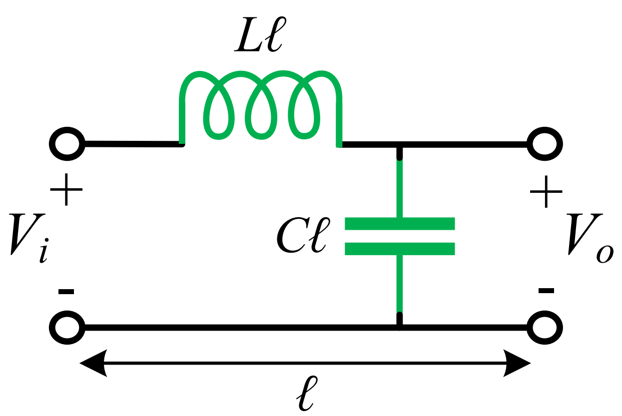


1.2 Modelo circuital de la línea de transmisión

Inconveniente: Modelo muy simplista sobre todo al subir en frecuencia.

- Se completa empleando un modelo equivalente de **parámetros primarios** → parámetros por unidad de longitud.
- Para el **caso sin pérdidas**, el modelo consiste en una capacidad en paralelo y una autoinducción en serie

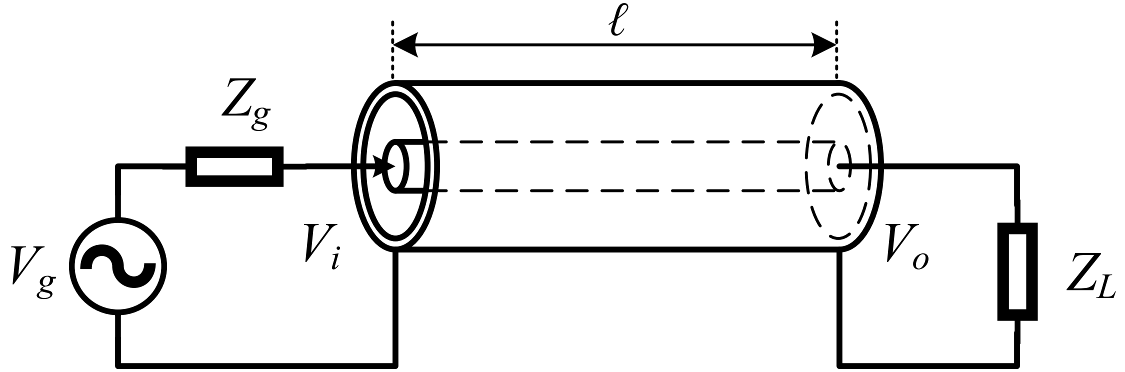


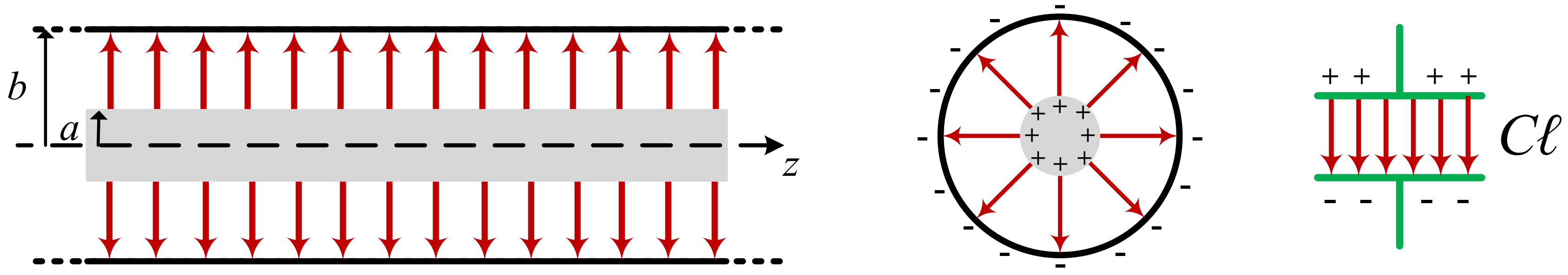


1.2 Modelo circuital de la línea de transmisión

Capacidad:

- El origen de la capacidad está en la presencia de 2 conductores.
- El valor de la capacidad depende linealmente de la longitud de la línea → se trabaja con la capacidad por unidad de longitud C [F/m]





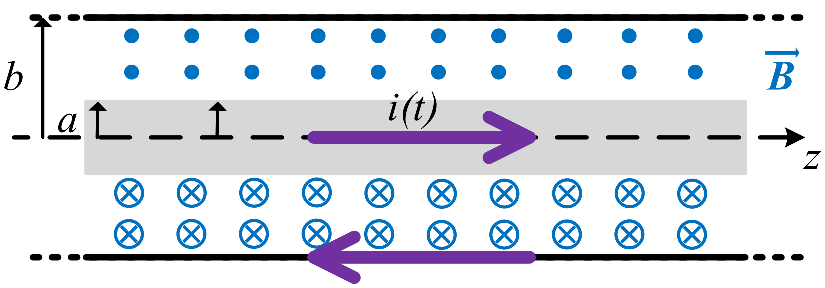
1.2 Modelo circuital de la línea de transmisión

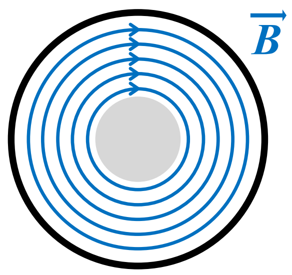
Autoinducción:

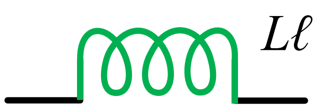
- Al circular una corriente i(t) por el conductor se genera una fuerza electromotriz (fem) que se opone al cambio de flujo de *i(t)*

  → autoinducción serie

- Su valor depende linealmente de la longitud de la línea → se trabaja con la autoinducción por unidad de longitud L [H/m]



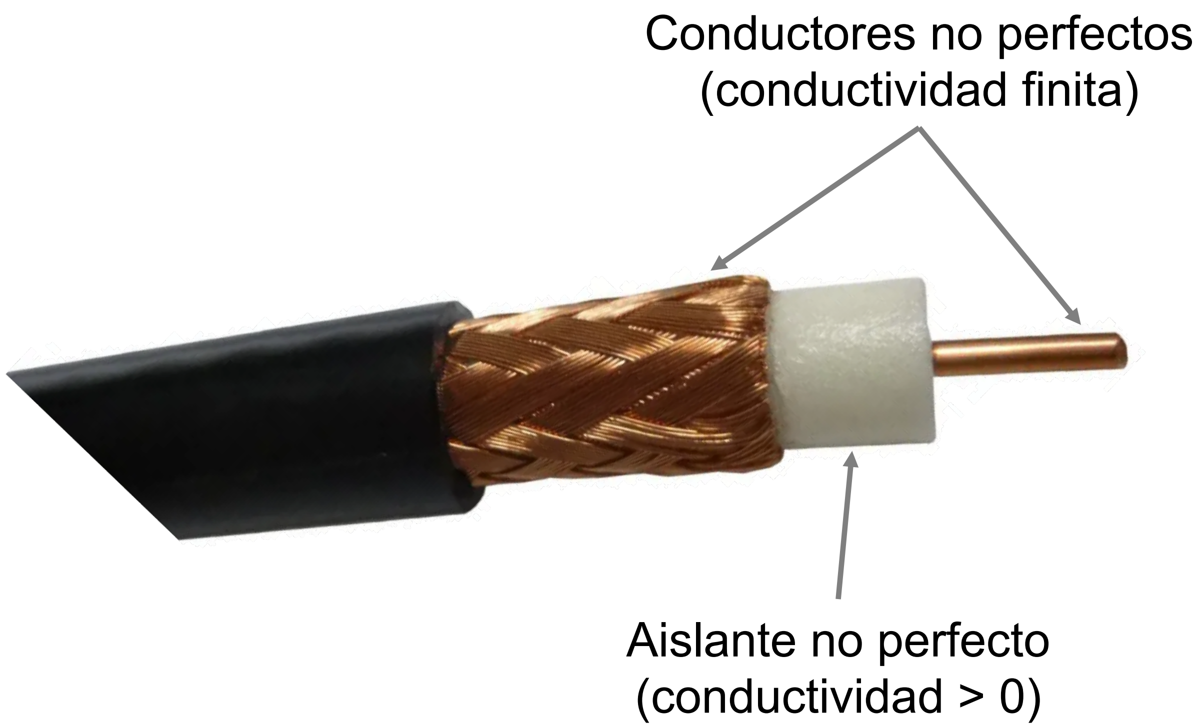




1.2 Modelo circuital de la línea de transmisión

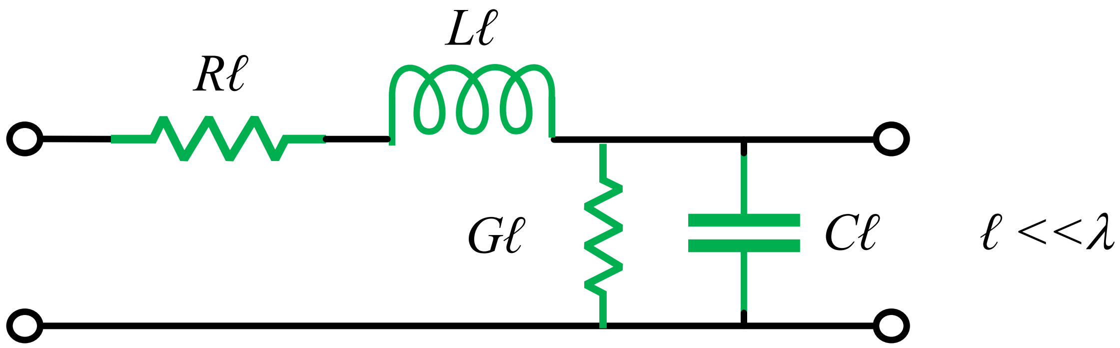
Líneas reales: Modelado de las pérdidas

- Pérdidas en conductores: Resistencia (R) por unidad de longitud [Ω/m]
- Pérdidas en el dieléctrico: Conductancia (G) por unidad de longitud [S/m]



1.2 Modelo circuital de la línea de transmisión

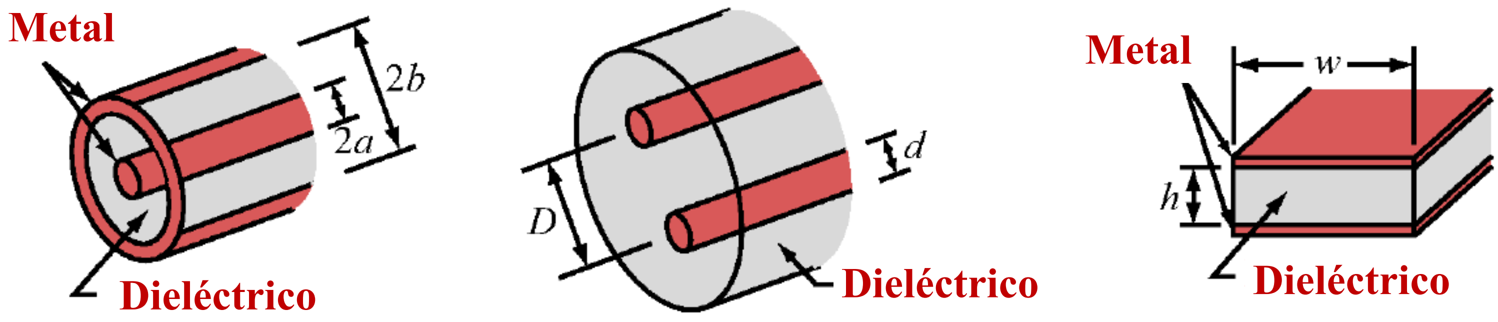
- El modelo con pérdidas se generaliza a



Modelo válido para cualquier línea de transmisión de 2 conductores siempre que se verifique $\ell << \lambda$

- Los parámetros R, L, C, G se denominan **PARAMETROS PRIMARIOS** de la línea (parámetros <u>por unidad de longitud</u>).
- Dependen de
  - la geometría de la línea de transmisión
  - los materiales de la línea de transmisión

1.2 Modelo circuital de la línea de transmisión



	Línea Coaxial	**Línea Bifilar**	**Línea Placas Paralelas**
R (Ω/m)	$\frac{R_s}{2\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$	$\frac{2R_s}{\pi d}$	$\frac{2R_s}{w}$
L (H/m)	$\frac{\mu}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$	$\frac{\mu}{\pi}\ln\left(D/d+\sqrt{(D/d)^2-1}\right)$	$\frac{\mu h}{w}$
G (S/m)	$\frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}$	$\frac{\pi\sigma}{\ln\left(D/d+\sqrt{(D/d)^2-1}\right)}$	$\frac{\sigma w}{h}$
C (F/m)	$\frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$	$\frac{\pi\varepsilon}{\ln\left(D/d+\sqrt{(D/d)^2-1}\right)}$	$\frac{\varepsilon w}{h}$

- Se verifica $\begin{cases} LC=\mu\varepsilon \\ G/C=\sigma/\varepsilon \end{cases}$

ε, μ y σ → material aislante

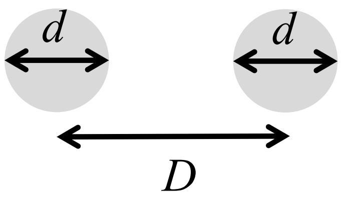
μ_c y σ_c → material conductor

$$R_s=\sqrt{\pi f \mu_c/\sigma_c} \quad (\Omega)$$

Imagen: F. T. Ulaby, *Fundamentos de aplicaciones en electromagnetismo*, 5ª Ed., Prentice-Hall, Inc., 2007

- Ejemplo 1: Calcular los parámetros R, L, G y C de un cable bifiliar en aire sabiendo que el radio de cada hilo vale 1 mm y la distancia entre los dos hilos es 2 cm. Suponer que los hilos son conductores perfectos

Solución:



- Al estar los hilos en el aire y ser conductores perfectos, la línea no tiene pérdidas → R = 0 y G = 0.
- Para determinar L y C aplicaremos las expresiones de la tabla
- De acuerdo con los datos del problema, el diámetro de cada hilo es d = 2 mm y la separación entre hilos D = 20 mm, luego

$$(D/d)^2 = (20/2)^2 = 100 >> 1$$

- Así que aplicamos las expresiones simplificadas

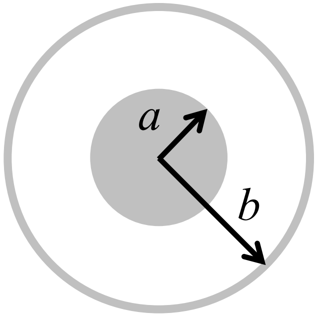
$$L = \frac{\mu_0}{\pi}\ln(2D/d) = \frac{4\pi\times 10^{-7}}{\pi}\ln(20) = 11.98\times 10^{-7} \approx 1.2\ \mu\text{H/m}$$

$$C = \frac{\pi\varepsilon}{\ln(2D/d)} = \frac{\pi\times 8.854\times 10^{-12}}{\ln(20)} = 9.29\times 10^{-12} = 9.29\ \ \text{pF/m}$$

- Ejemplo 2: Calcular los parámetros de línea de transmisión (R, L, G y C), a la frecuencia de 1 MHz, de un cable coaxial con conductores interno y externo de diámetros 0.6 cm y 1.2 cm, respectivamente. Los conductores son de cobre y el material existente entre ambos es aire. Los parámetros constitutivos del cobre son: $\mu_c \approx \mu_0 \quad \sigma_c = 5.8\times10^7 \text{ S/m}$

Solución:

- Aplicamos los fórmulas de la tabla



$$R_S = \sqrt{\frac{\pi f \mu_c}{\sigma_c}} = \sqrt{\frac{\pi\times10^6\times4\pi\times10^{-7}}{5.8\times10^7}} = \frac{2\pi}{\sqrt{5.8}}\times10^{-4} \ \ \Omega$$

$$R = \frac{R_S}{2\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{5.8}}\times10^{-4}\left(\frac{1}{0.3}+\frac{1}{0.6}\right)\times10^2 = 2.07\times10^{-2} \ \ \Omega/\text{m}$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln(b/a) = \frac{4\pi\times10^{-7}}{2\pi}\ln(2) = 0.14 \ \mu\text{H/m}$$

$$G = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)} = 0$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)} = \frac{2\pi\times8.854\times10^{-12}}{\ln(2)} = 80.26\times10^{-12} = 80.26 \ \ \text{pF/m}$$

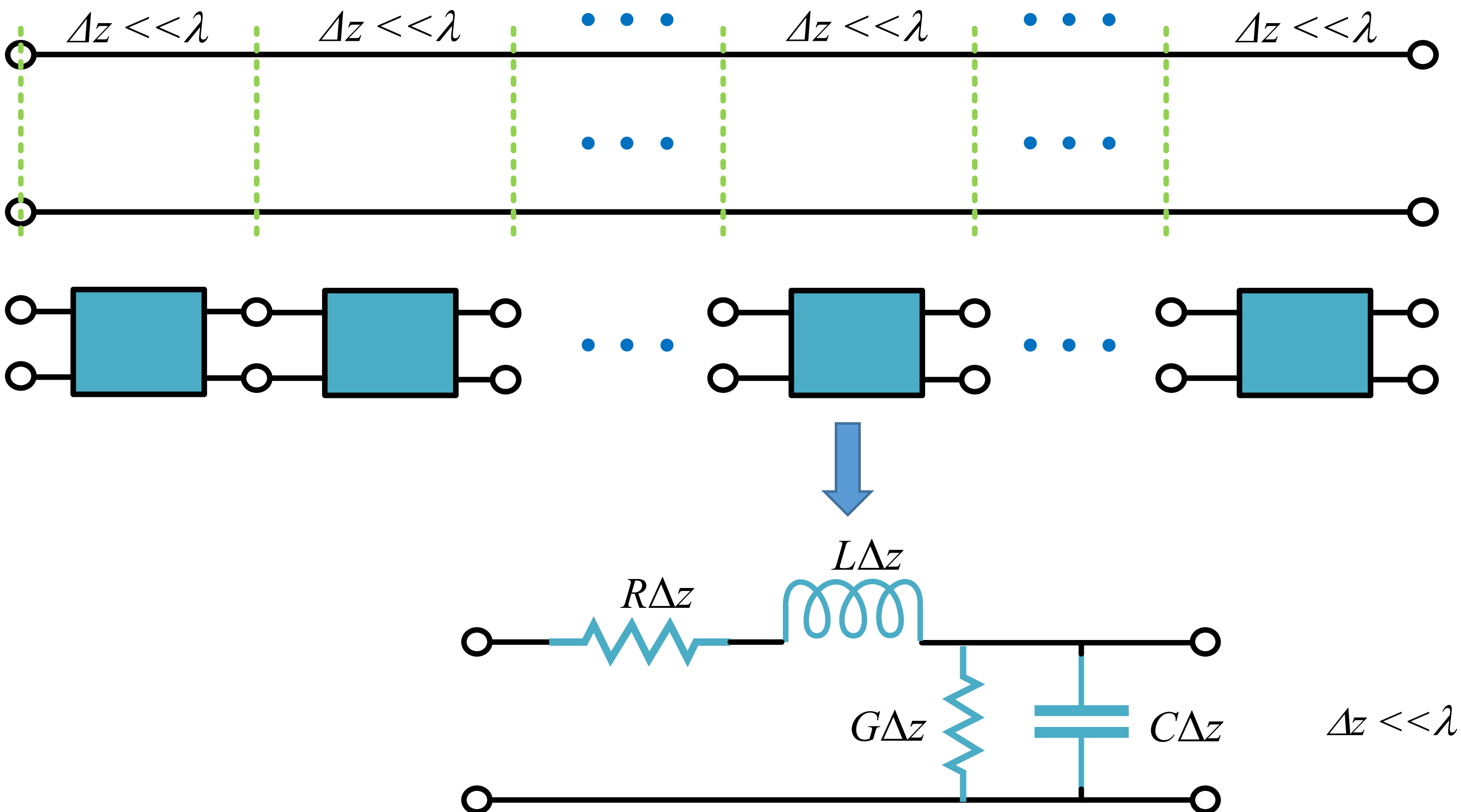
1.2 Modelo circuital de la línea de transmisión

Caso $\ell \not\ll \lambda$ → Teoría de líneas de transmisión

- En este caso se producen fenómenos ondulatorios (reflexión, desfase,…)
- No es posible modelar el cable mediante un circuito de parámetros concentrados. No es válida la teoría de circuitos concentrados (leyes de Kirchhoff)
- Estos circuitos se denominan circuitos distribuidos y su análisis requiere de una extensión de la teoría de circuitos convencional que tenga en cuenta de forma explícita los efectos propagativos de las señales

1.2 Modelo circuital de la línea de transmisión

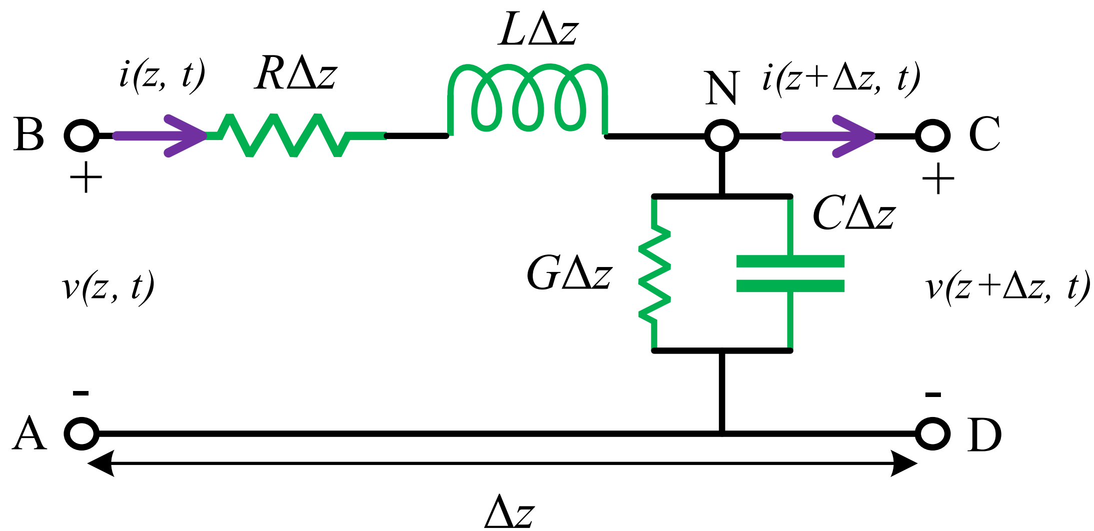
- Los efectos propagativos pueden, hasta cierto punto, modelarse mediante circuitos equivalentes
- En el caso de una línea de transmisión, se puede dividir en secciones de longitud $\Delta z << \lambda$ y sustituir cada sección por su circuito equivalente



1.3 Ecuaciones generales de la línea de transmisión

Más detalles en **Cheng** 8.2

- Consideramos una línea de transmisión de longitud Δz

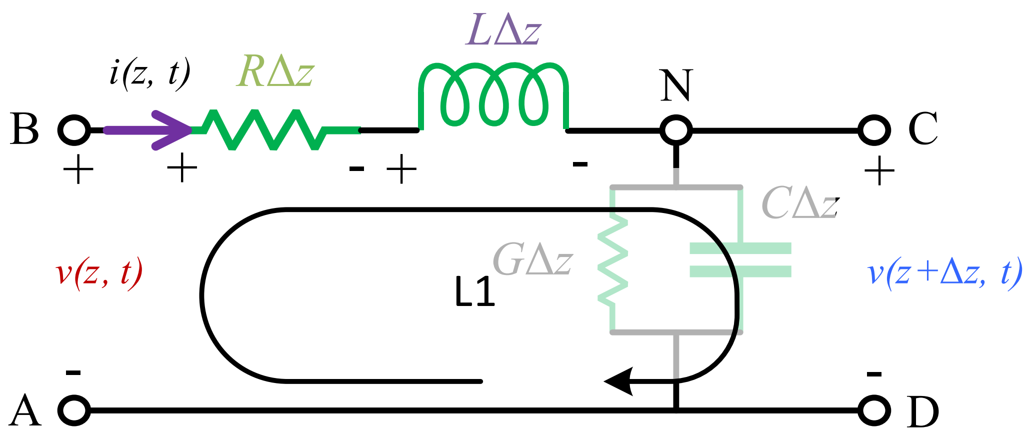


- Mediante teoría de circuitos calculamos:

$$v(z,t),\ v(z+\Delta z,t)$$
$$i(z,t),\ i(z+\Delta z,t)$$

1.3 Ecuaciones generales de la línea de transmisión

- Aplicamos Kirchhoff Voltage Law en la malla ABCD



$$-v(z,t) + R\cdot\Delta z\cdot i(z,t) + L\cdot\Delta z(\partial i(z,t)/\partial t) + v(z+\Delta z,t)$$

- Organizando la expresión

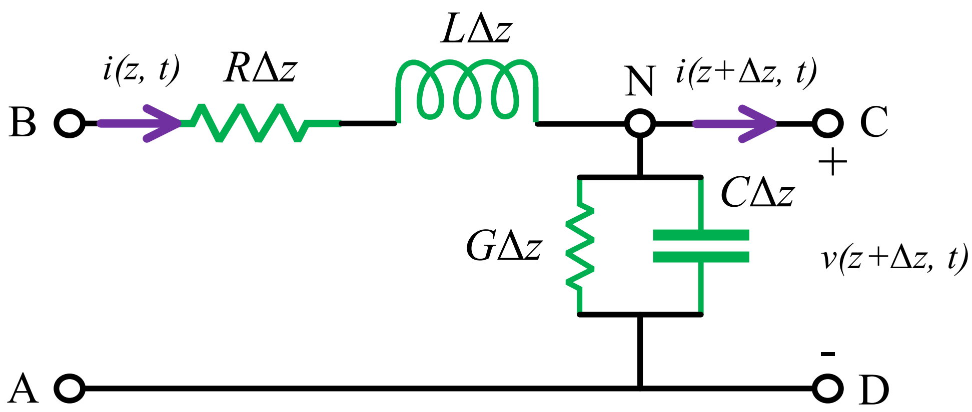
$$-\frac{v(z+\Delta z,t)-v(z,t)}{\Delta z} = Ri(z,t) + L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

- En el límite, cuando $\Delta z \to 0$ resulta:

$$\boxed{-\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = Ri(z,t) + L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}}$$

1.3 Ecuaciones generales de la línea de transmisión

- Aplicamos Kirchhoff Current Law en el nudo N:



$$i(z,t) - G\Delta z \cdot v(z+\Delta z,t) - C\Delta z \frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t} - i(z+\Delta z,t) = 0$$

- Organizando la expresión:

$$-\frac{i(z+\Delta z,t) - i(z,t)}{\Delta z} = Gv(z+\Delta z,t) + C\frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t}$$

- Haciendo el límite cuando $\Delta z \to 0$ resulta:

$$\boxed{-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = Gv(z,t) + C\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}}$$

1.3 Ecuaciones generales de la línea de transmisión

- Hemos obtenido un par de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden:

$$-\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = Ri(z,t) + L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = Gv(z,t) + C\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}$$

Ecuaciones del Telegrafista

Dominio del Tiempo

Dominio de la frecuencia (Excitación sinusoidal) – Fasores: $V(z)$, $I(z)$

$$v(z,t) = \mathrm{Re}\left\{V(z)\cdot e^{j\omega t}\right\} \qquad i(z,t) = \mathrm{Re}\left\{I(z)\cdot e^{j\omega t}\right\} \qquad V(z), I(z) \in \mathbb{C}$$

$$\frac{dV(z)}{dz} = -\left(R + j\omega L\right)I(z)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -\left(G + j\omega C\right)V(z)$$

Ecuaciones del Telegrafista

Dominio de la Frecuencia

1.3 Ecuaciones generales de la línea de transmisión

- Ecuación de Ondas para la Tensión y Corriente (Dominio del tiempo)

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = RGv(z,t) + (LG+RC)\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} = RGi(z,t) + (LG+RC)\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2}$$

- Ecuación de Ondas para la Tensión y Corriente (Dominio de la Frecuencia)

$$\boxed{\frac{d^2 V(z)}{dz^2} = \gamma V(z)} \qquad \boxed{\frac{d^2 I(z)}{dz^2} = \gamma I(z)}$$

Excitación sinusoidal
Notación fasorial

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

Constante de propagación ($\gamma \in \mathbb{C}$)

$\omega = 2\pi f$ [rad/s]

1.4 Solución de la ecuación de ondas

Más detalles en **Pozar** 2.1

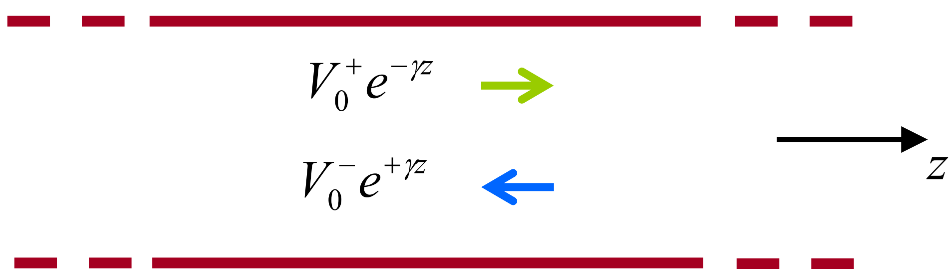
- La solución de la ec. de ondas para la tensión y corriente (Dominio Frec.)

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{+\gamma z}$$
$$I(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{+\gamma z}$$

$$\text{con } V_0^\pm, I_0^\pm, \gamma \in \mathbb{C}$$

- La solución $V_0^+ e^{-\gamma z}$ representa una onda que se propaga según $z > 0$

- Mientras que la solución $V_0^- e^{+\gamma z}$ representa una onda que se propaga según $z < 0$



$$\gamma = \alpha + j\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathrm{R} \begin{cases} \alpha : \text{cte de atenuación [Np/m]} \\ \beta : \text{cte de fase [rad/m]} \end{cases}$$

1.4 Solución de la ecuación de ondas

- La solución de la ec. de Ondas de tensión (dominio del tiempo):

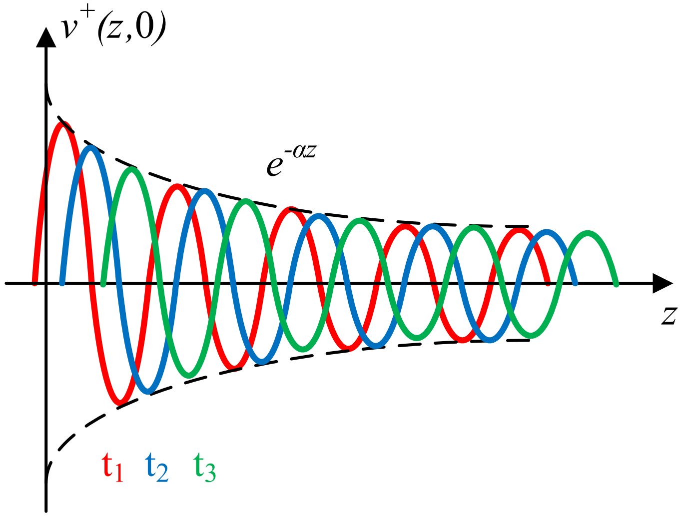
$$v(z,t) = \mathrm{Re}\left[V(z)e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\left(V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{+\gamma z}\right)e^{j\omega t}\right]$$

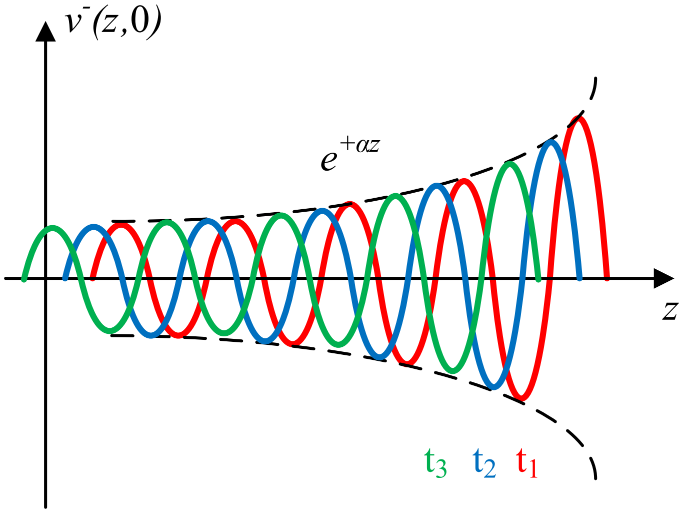
$$V_0^\pm = |V_0^\pm|\,\mathrm{e}^{j\phi^\pm}$$

- Operando:

$$v(z,t) = \underbrace{\left|V_0^+\right| e^{-\alpha z}\cos\left(\omega t - \beta z + \phi^+\right)}_{v^+(z,t)} + \underbrace{\left|V_0^-\right| e^{+\alpha z}\cos\left(\omega t + \beta z + \phi^-\right)}_{v^-(z,t)}$$

- En un instante cualquiera, p.ej. $t = 0$:



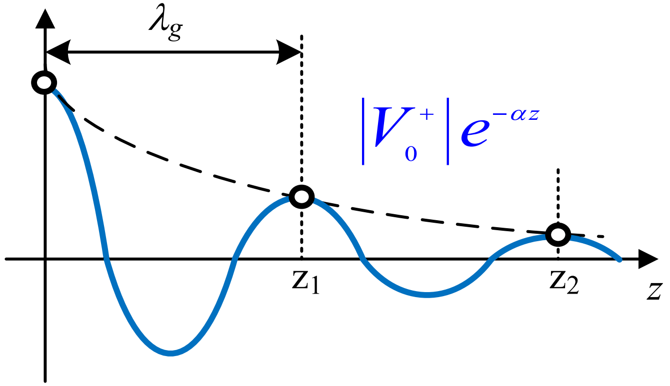


1.4 Solución de la ecuación de ondas

Longitud de onda λ_g : Distancia entre dos puntos de fase cte.

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad v^+(z,0) = \left|V_0^+\right| e^{-\alpha z} \cos\left(-\beta z + \phi^+\right)$$

La onda (su fase) se "repite" cada λ_g :



$$\beta z_2 - \beta z_1 = 2\pi = \beta \lambda_g$$

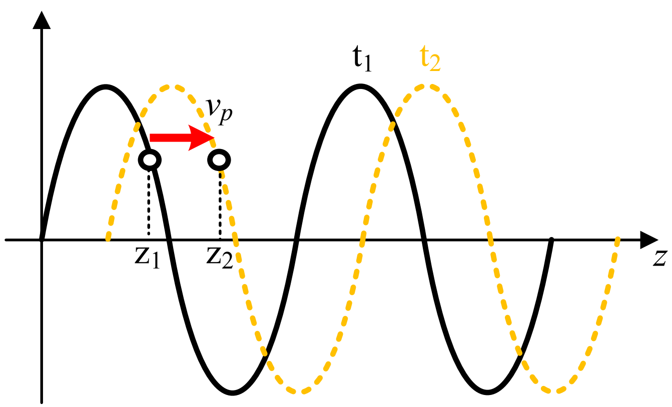
Así:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g} \qquad \boxed{\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta}}$$

Velocidad de fase v_p : Velocidad a la que viaja cada plano de fase constante

$$v^+(z,t) = \left|V_0^+\right| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi)$$

$$\alpha = 0$$



Cualquier punto de fase constante verifica:

$$\omega t - \beta z = \text{constante}$$

$$\omega t_1 - \beta z_1 = \text{cte} = \omega t_2 - \beta z_2$$

$$\omega (t_2 - t_1) = \beta (z_2 - z_1)$$

$$\frac{\omega}{\beta} = \frac{(z_2 - z_1)}{(t_2 - t_1)} = \boxed{v_p = \frac{\omega}{\beta}}$$

1.4 Solución de la ecuación de ondas

Dominio Frecuencia

Impedancia Característica

$$\frac{\mathrm{d}V(z)}{\mathrm{d}z} = -(R + j\omega L)I(z) \quad \Rightarrow \quad \gamma\left(V_0^+ e^{-\gamma z} - V_0^- e^{+\gamma z}\right) = \left(R + j\omega L\right) I(z)$$

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{+\gamma z}$$

- Despejando $I(z)$:

$$\left.\begin{aligned} I(z) &= \frac{\gamma}{R + j\omega L}\left(V_0^+ e^{-\gamma z} - V_0^- e^{+\gamma z}\right) \\ I(z) &= I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{+\gamma z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad I_0^{\pm} = \frac{\pm\gamma}{R + j\omega L} V_0^{\pm}$$

- La impedancia característica de la línea viene dada por:

$$\frac{V_0^+}{I_0^+} = Z_0 = -\frac{V_0^-}{I_0^-}$$

- resulta $\boxed{Z_0 = \sqrt{\dfrac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}}$ $\quad Z_0 \in \mathrm{C}$

* No depende de la posición

1.4 Solución de la ecuación de ondas

RESUMEN

- Solución general para una línea de transmisión:

- Ondas de tensión y de corriente (dominio de la frecuencia):

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{+\gamma z} \qquad I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{+\gamma z}$$

En general $V_0^+,\ V_0^-,\ \gamma,\ Z_0 \in C$ y son función de la frecuencia

- Constante de propagación: $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$

  - donde α es la cte. de atenuación y β la cte. de fase

- Impedancia característica: $$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

- Longitud de onda: $\lambda = 2\pi/\beta$

- Velocidad de fase: $v_p = \omega\ /\beta$

  - En general, es función de la frecuencia

- Ejemplo 3: Los parámetros de una línea de transmisión de planos paralelos valen $R = 1\,\Omega/\text{m}$, $L = 167\,\text{nH/m}$, $G = 0\,\text{S/m}$ y $C = 172\,\text{pF/m}$. Calcular la cte de atenuación, la cte de fase, la velocidad de fase y la impedancia característica a 1 GHz.

Ulaby 6ª Prob. 2-5

Solución:

- La frecuencia angular vale: $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10^9\ \text{rad/s}$
- La constante de propagación resulta

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

$$= \sqrt{(1 + j2\pi \times 10^9 \times 167 \times 10^{-9})(j2\pi \times 10^9 \times 172 \times 10^{-12})} = (0.016 + j33.68)\ \text{m}^{-1}$$

- de donde $\alpha = 0.016\ \text{Np/m}$ $\quad\beta = 33.68\ \text{rad/m}$
- La velocidad de fase es: $v_p = \dfrac{\omega}{\beta} = \dfrac{2\pi \times 10^9}{33.68} = 1.85 \times 10^8\ \text{m/s}$
- La impedancia característica vale:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{1 + j2\pi \times 10^9 \times 167 \times 10^{-9}}{j2\pi \times 10^9 \times 172 \times 10^{-12}}} = (31 - j0.01)\ \Omega$$

1.4 Solución de la ecuación de ondas

Más detalles en **Cheng** 8.4 y **Pozar** 2.7

Dispersión

- En una línea con pérdidas las constantes de atenuación y fase son, en general, funciones complicadas de la frecuencia.
- En particular, β no es una función lineal de la frecuencia y por tanto la velocidad de fase es distinta para cada frecuencia.

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \neq cte$$

- Entonces, cuando un pulso de ancho de banda frecuencial grande se propaga por una línea de transmisión, cada componente frecuencial del pulso viaja a diferente velocidad y llega en distinto momento al receptor.
- En consecuencia la forma del pulso cambia, el pulso se distorsiona.
- Este fenómeno, en general no deseado, se denomina dispersión. Se dice que la línea es dispersiva.

1.5 Líneas no dispersivas, con bajas pérdidas y sin pérdidas

Línea no dispersiva

- Hay un caso especial para el cual una línea con pérdidas es no dispersiva (no distorsiona las señales de banda ancha)
- Este caso se da cuando los parámetros de la línea cumplen la siguiente condición (condición de Heaviside):

$$\mathrm{R/L = G/C}$$

- Aplicando esta condición se obtienen los siguientes resultados
- Constante de propagación:

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \sqrt{LC}\sqrt{(R/L + j\omega)(G/C + j\omega)}$$

$$\gamma = \sqrt{LC}\,(R/L + j\omega)$$

1.5 Líneas no dispersivas, con bajas pérdidas y sin pérdidas

- De donde

$$\alpha = R\sqrt{C/L}$$ Cte. con la frecuencia

$$\beta = \omega\sqrt{LC}$$ Lineal con la frecuencia

- La impedancia característica

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Cte. con la frecuencia
Real

¿Cómo conseguir condición Heaviside?

- Ejemplo 4: A la frecuencia de 125 MHz una línea de transmisión tiene una impedancia característica de Z_0=40 Ω, una cte. de atenuación α = 0.02 Np/m y una cte. de fase β = 0.75 rad/m. Calcular los parámetros R, L, G y C de la línea.

Ulaby 6ª Prob. 2-16

Solución:

- La línea tiene pérdidas y la impedancia característica es real, por lo tanto se trata de una línea de transmisión no dispersiva (no distorsiona)

- Las expresiones para α y Z_0 son:

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= R\sqrt{C/L}\\ Z_0 &= \sqrt{L/C}\end{aligned}\right\} \quad R = \alpha Z_0 = 0.02\times 40 = 0.8\ \Omega/\mathrm{m}$$

-Usando la condición $\mathrm{R/L = G/C}$ $\quad G = R/Z_0^2 = 0.8/40^2 = 0.5\ \mathrm{mS/m}$

-Además $$\left.\begin{aligned}\beta &= \omega\sqrt{LC}\\ Z_0 &= \sqrt{L/C}\end{aligned}\right\} \quad C = \frac{\beta}{\omega Z_0} = \frac{0.75}{2\pi 125\cdot 10^6\cdot 40} = 23.9\,\mathrm{pF/m}$$

-Finalmente $\quad L = C\cdot Z_0^2 = 40^2\cdot 23.9\cdot 10^{-12} = 38.2\ \mathrm{nH/m}$

1.5 Líneas no dispersivas, con bajas pérdidas y sin pérdidas

Línea sin pérdidas

- En el caso sin pérdidas (R=G=0) las expresiones generales se simplifican notablemente
- Constante de propagación: es imaginaria pura y lineal con la frecuencia

$$\beta = \omega\sqrt{LC} \qquad\qquad \alpha = 0$$

- Impedancia características: es real

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

- Tensión: (análogo para la corriente)

$$V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{+j\beta z}$$

- En el dominio del tiempo (estado sinusoidal permanente)

$$v(z,t) = \mathrm{Re}\left[V(z)e^{j\omega t}\right] = \left|V_0^+\right|\cos\left(\omega t - \beta z + \phi^+\right) + \left|V_0^-\right|\cos\left(\omega t + \beta z + \phi^-\right)$$

1.5 Líneas no dispersivas, con bajas pérdidas y sin pérdidas

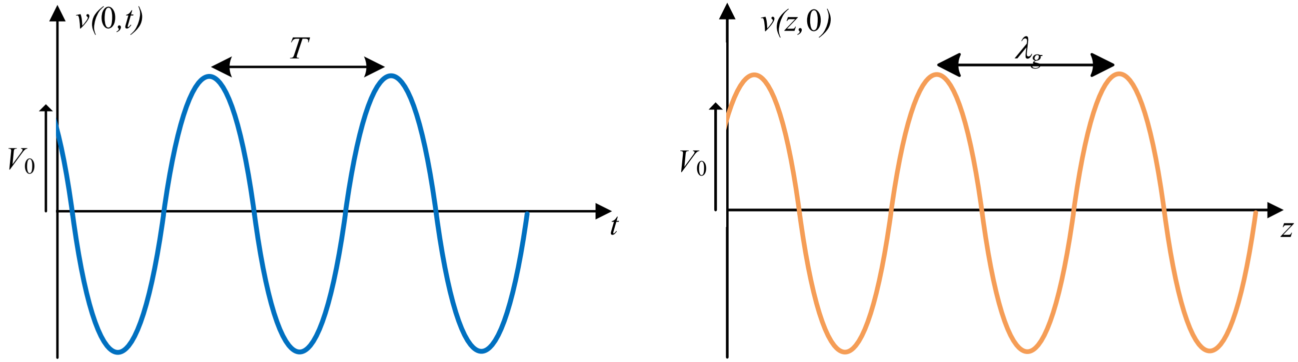
- Velocidad de fase

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

  - Es constante e igual a la velocidad de la luz en el medio dieléctrico

- Longitud de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{LC}}$$



$$\cos\left(\omega t - \beta z\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}z\right)$$

- Ejemplo 5: Los parámetros de una línea de transmisión sin pérdidas son L = 0.25 μH/m y C = 100 pF/m. Calcular la impedancia característica, la constante de fase, la longitud de onda y velocidad de fase para una onda sinusoidal de frecuencia 600 MHz

Hayt 7ª 11-2

Solución:

-Aplicamos las fórmulas vistas anteriormente

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{0.25\times 10^{-6}}{100\times 10^{-12}}} = 50\ \Omega$$

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{1}{0.25\times 10^{-6}\times 100\times 10^{-12}}} = 2\times 10^{8}\ \text{m/s}$$

$$\beta = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi\times 600\times 10^{6}}{2\times 10^{8}} = 6\pi \approx 18.85\ \text{rad/m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{6\pi} \approx 33.3\ \text{cm}$$

1.5 Líneas no dispersivas, con bajas pérdidas y sin pérdidas

Línea con bajas pérdidas

- Consideramos bajas pérdidas cuando se cumplen las condiciones

$$R << \omega L \qquad G << \omega C$$

- Aplicando estas condiciones se obtienen los siguientes resultados
- Constante de propagación:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC}\sqrt{\left(\frac{R}{j\omega L}+1\right)\left(\frac{G}{j\omega C}+1\right)}$$

- Aplicando a la expresión anterior el desarrollo en serie

$$\sqrt{x+1} = 1 + \frac{x}{2} + \ldots \quad (x << 1)$$

1.5 Líneas no dispersivas, con bajas pérdidas y sin pérdidas

- Resulta

$$\alpha \approx \frac{1}{2}\left(R\sqrt{\frac{C}{L}} + G\sqrt{\frac{L}{C}} \right) \qquad \beta \approx \omega\sqrt{LC}$$

- Se observa que α es directamente proporcional a R y G
- Además, β es lineal con la frecuencia

Velocidad de fase: es constante

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \text{cte.}$$

Impedancia característica: se aproxima por

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Cte. con la frecuencia
Real

- Ejemplo 6: A la frecuencia angular de 500 Mrad/s, los parámetros de una línea de transmisión son R = 0.2 Ω/m, L = 0.25 μH/m , G = 10 μS/m y C = 100 pF/m. Calcular la impedancia característica, la cte. de atenuación, la cte. de fase, la longitud de onda y velocidad de fase.

Hayt 7ª D11-1

Solución:

-En primer lugar miramos si es una línea de bajas pérdidas

$$\omega L = 500 \times 10^{6} \times 0.25 \times 10^{6} = 125 \quad \Rightarrow R << \omega L$$

$$\omega C = 500 \times 10^{6} \times 100 \times 10^{-12} = 5 \times 10^{-2} \quad \Rightarrow G << \omega C$$

-Efectivamente se trata de una línea de bajas pérdidas. Aplicamos las fórmulas para este caso:

$$\alpha \approx \frac{1}{2}\left(R\sqrt{\frac{C}{L}} + G\sqrt{\frac{L}{C}} \right) = 2.25\,\mathrm{mNp/m}$$

$$\beta \approx \omega\sqrt{LC} = 2.5\,\mathrm{rad/m}$$

-La velocidad de fase vale

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{500\times10^6}{2.5} = 2\times10^8\ \mathrm{m/s}$$

-La longitud de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{2.5} = 2.51\ \mathrm{m}$$

-La impedancia característica

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}} = 50\ \Omega$$

Repaso: Unidades logarítmicas

- Por qué las usamos:

  - **Motivo histórico**

  La respuesta del oído humano es exponencial al aumento de la intensidad sonora. Esto se expresa mejor de manera logarítmica.

  - **Motivo práctico**

  Facilita los cálculos y la representación de magnitudes (tensión, corriente,...) con rangos muy amplios (más de seis órdenes de magnitud).

Repaso: Unidades logarítmicas

A. Relación de una potencia (P) con respecto a otra de referencia (P_{ref})

$$P(dB) = 10\ log_{10}\left(\frac{P}{P_{ref}}\right)$$

Debemos indicar las unidades de la potencia de referencia dB**XX**.

Nivel de potencia en dB referido a:

$$1w \longrightarrow P(dBw) = 10\ log_{10}\left(\frac{P}{1w}\right) dBw$$

$$1mw \longrightarrow P(dBm) = 10\ log_{10}\left(\frac{P}{1mw}\right) dBm$$

$$1pw \longrightarrow P(dBpw) = 10\ log_{10}\left(\frac{P}{1pw}\right) dBpw$$

Ejemplo 10 W

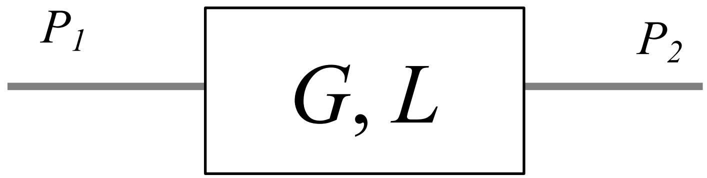
$$P(dBw) = 10\ log_{10}\left(\frac{10\,w}{1\,w}\right) = 10\,dBw$$

$$P(dBm) = 10\ log_{10}\left(\frac{10 \cdot 10^{3}\ mw}{1\,mw}\right) = 40\,dBm$$

$$P(dBpw) = 10\ log_{10}\left(\frac{10 \cdot 10^{12}\ pw}{1\,pw}\right) = 130\ dBpw$$

Repaso: Unidades logarítmicas

B. Relación entre dos potencias P_1 y P_2. (Ganancia o atenuación)

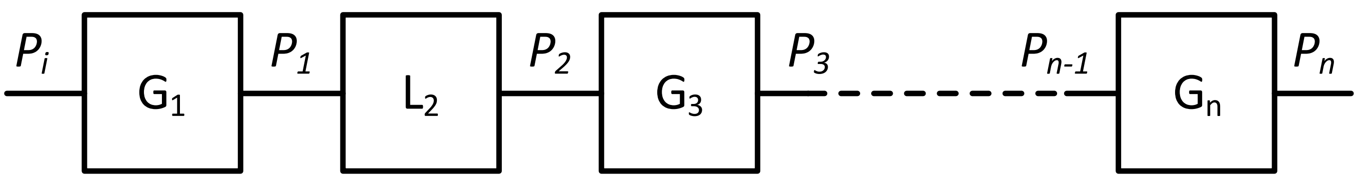


En este caso es adimensional y se expresa simplemente como dB:

$$L(dB) = 10\,log_{10}\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \quad \text{decibelios } (dB)$$ Atenuación/Pérdidas

$$G(dB) = 10\,log_{10}\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \quad \text{decibelios } (dB)$$ Ganancia

Elementos en cascada:



$$G(dB) = G_1(dB) - L_2(dB) + G_3(dB) + \ldots + G_n(dB)$$

1.6 Potencia

Más detalles en **Hayt** 11.8

- Consideramos una línea de transmisión con pérdidas por la que se propaga una onda en dirección $z > 0$.
- La tensión y corriente en la línea vienen dadas por

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} \qquad I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-\gamma z} \qquad \gamma = \alpha + j\beta \qquad Z_0 = R_0 + jX_0$$

- El valor medio de la potencia en la línea vale:

$$\boxed{P(z) = \frac{1}{2}\Re\left[V(z)I^*(z)\right]}$$

- Esta expresión es la misma que la utilizada en la teoría de circuitos

- Sustituyendo las expresiones de $V(z)$ e $I(z)$, resulta:

$$P(z) = \frac{1}{2}\Re\left[V_0^+ e^{-(\alpha+j\beta)z} \frac{\left(V_0^+\right)^*}{Z_0^*} e^{-(\alpha-j\beta)z}\right] = \frac{\left|V_0^+\right|^2}{2\left|Z_0\right|^2} R_0 e^{-2\alpha z}$$

1.6 Potencia

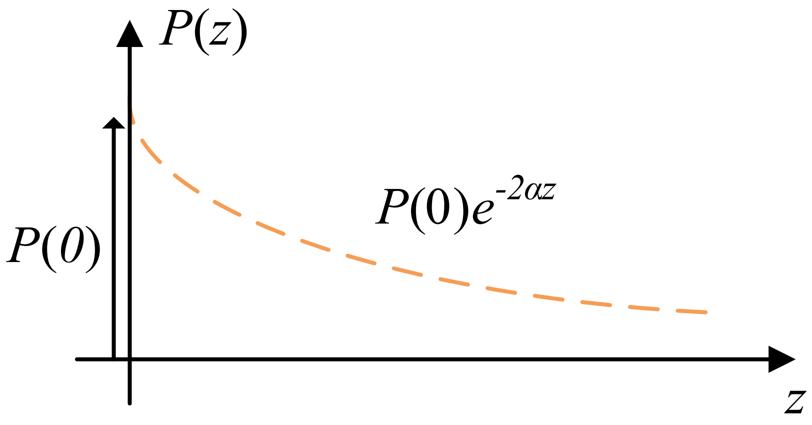
- Entonces

$$P(z) = \frac{|V_0^+|^2}{2|Z_0|^2} R_0 e^{-2\alpha z}$$

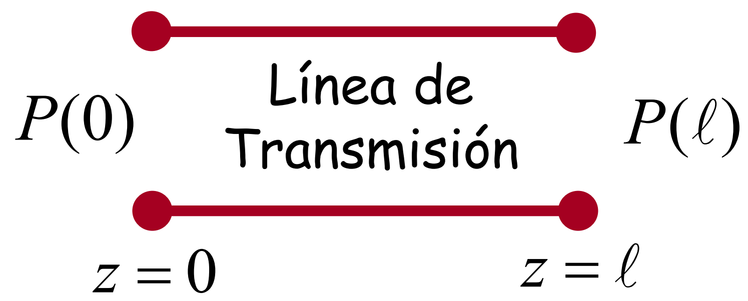
$$P(0) = \frac{|V_0^+|^2}{2|Z_0|^2} R_0$$

$$P(z) = P(0) e^{-2\alpha z}$$

- Este resultado indica que la potencia en la línea decae a un ritmo exponencial <u>doble</u> respecto de la tensión o la corriente.



1.6 Potencia



- La potencia perdida entre un punto inicial $z = 0$ y un punto final $z = \ell$ se puede poner como

$$P_{\ell oss} = P(0) - P(\ell) \quad \text{[W]} \quad \text{(es un valor absoluto)}$$

- Es más útil expresar **pérdida** en términos relativos

$$L = P(0)/P(\ell) \qquad \text{(>= 1 para líneas pasivas)}$$

- Es usual expresar la pérdida de potencia en decibelios como

$$\boxed{L\,(\mathrm{dB}) \;=\; 10\log_{10}\left[P(0)/P(\ell)\right] = e^{+2\alpha\ell}} \qquad P(z) = P(0)e^{-2\alpha z}$$

- Ejs.
    - Línea sin pérdidas: $P(0)/P(\ell) = 1 \;\Rightarrow\; L = 0\ \mathrm{dB}$
    - Pierde la mitad: $P(0)/P(\ell) = 2 \;\Rightarrow\; L = 3\ \mathrm{dB}$

1.6 Potencia

- Hasta ahora el parámetro utilizado para indicar las pérdidas en una línea era la constante de atenuación.

¿Cuál es la relación entre la perdida de potencia L(dB) y α ?

- Teniendo en cuenta que $P(\ell)= P(0)\, e^{-2\alpha\ell}$ podemos poner

$$L\,(\text{dB}) = 10\cdot\log_{10} e^{+2\alpha\ell} = 20\alpha\cdot\ell\,\log_{10} e = 8.69\,\alpha\cdot\ell$$

- Para $\alpha\cdot\ell = 1$ Np se obtiene 1 Np → L(dB) = $20\log_{10} e = 8.69$ dB
- Las **<u>pérdidas</u>**, L(dB) son **<u>lineales con la longitud</u>**.
- Teniendo en cuenta que $P(z) \propto |V(z)|^2$ también se puede expresar la potencia perdida en función de la tensión de la línea

$$L(\text{dB}) = 20\log_{10}\left[|V(0)|/|V(\ell)|\right]$$

$$\frac{|V(0)|}{|V(\ell)|} = \frac{\left|V_0^+ e^{-\gamma\cdot 0}\right|}{\left|V_0^+ e^{-\alpha\ell} e^{-j\beta\ell}\right|} = e^{+\alpha\ell} \rightarrow \alpha\ell = \ln\frac{|V(0)|}{|V(\ell)|}[Np]$$

Neper: relación entre tensiones

- Ejemplo 7: Una línea de transmisión de 20 m produce una pérdida de potencia de 2 dB entre la entrada y la salida.
  a) ¿Qué tanto por ciento de la potencia llega a la salida?
  b) ¿Qué tanto por ciento llega a la mitad de la línea?
  c) ¿Cuánto vale la cte de atenuación?

Hayt 7ª Ej 11-4

Solución:

- Según hemos visto $L\,(\mathrm{dB}) = 10\log_{10}\left[P(0)/P(\ell)\right]$

a) En este caso $2 = 10\log_{10}\left[P(0)/P(20)\right]$

$$\frac{P(0)}{P(20)} = 10^{0.2} \Rightarrow \frac{P(20)}{P(0)} = 10^{-0.2} = 0.63$$

(Llega el 63%)

b) La línea pierde $2\mathrm{dB}/20\mathrm{m} = 0.1\,\mathrm{dB/m}$ por tanto en 10 m pierde 1 dB

Repitiendo el cálculo del caso a): $\dfrac{P(10)}{P(0)} = 10^{-0.1} = 0.79$ (Llega el 79%)

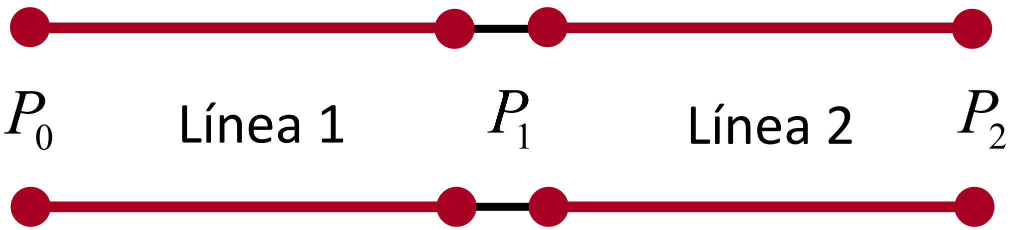
c) Sabemos que L (dB) = $8.69\,\alpha\cdot\ell$

$$\alpha = \frac{L(dB)}{8.60\ell} = \frac{2}{8.69\cdot 20} = 0.012\ \mathrm{Np/m}$$

1.6 Potencia

- <u>Potencia perdida en una conexión en cascada de líneas de transmisión</u>

- Consideramos la conexión ideal de dos líneas



$$L_1 = P_0 / P_1 \qquad L_2 = P_1 / P_2$$

- Las pérdidas totales L son

$$L = P_0 / P_2 = \left(P_0 / P_1\right) \times \left(P_1 / P_2\right) = L_1 \cdot L_2$$

- Haciendo el cálculo en decibelios

$$\begin{aligned} L\,(\mathrm{dB}) \;&=\; 10\log_{10}\left[P_0 / P_2\right] = 10\log_{10}\left[\left(P_0 / P_1\right) \times \left(P_1 / P_2\right)\right] \\ &= 10\log_{10}\left[\left(P_0 / P_1\right)\right] + 10\log_{10}\left[\left(P_1 / P_2\right)\right] = L_1(\mathrm{dB}) + L_2(\mathrm{dB}) \end{aligned}$$

- Las pérdidas totales (en dB) son la suma de las pérdidas (en dB) de cada componente de la cadena

- Ejemplo 8: Dos líneas de transmisión se conectan en cascada. La primera tiene una longitud de 30 m y unas pérdidas de potencia a razón de 0.1 dB/m. La segunda mide 45 m y pierde 0.15 dB/m. La conexión entre ambas no es perfecta, perdiéndose en la misma 3 dB. ¿Qué porcentaje de la potencia de entrada llega a la salida del conjunto?

Hayt 7ª D 11-2

Solución:

- En primer lugar calcularemos las pérdidas totales en dB
- La primera línea pierde $L_1(\text{dB}) = 30\ \text{m} \times 0.1\ \text{dB/m} = 3\ \text{dB}$
- La segunda $L_2(\text{dB}) = 45\ \text{m} \times 0.15\ \text{dB/m} = 6.75\ \text{dB}$
- Las pérdidas totales en dB son:

$$L(\text{dB}) = 3 + 3 + 6.75 = 12.75\ \text{dB}$$

- Por otra parte $L\,(\text{dB}) = 10\log_{10}\left[P_{in}/P_{out}\right]$
- Entonces

$$P_{in}/P_{out} = 10^{1.275} \Rightarrow P_{out}/P_{in} = 10^{-1.275} = 0.053 \Rightarrow 5.3\%$$