Análisis Espectral de Procesos Estocásticos

1. Introducción y objetivos

En estos apuntes se presentan los métodos básicos para estimar de la densidad espectral de potencia (DEP) de procesos estocásticos ergódicos. En primer lugar se repasan los procesoso ergódicos y la estima de su media y su autocorrelación a partir de una realización del proceso. Posteriormente se estudian los estimadores clásicos periodograma y de Blackman-Tukey y el estimador paramétrico AR.

2. Procesos ergódicos

Muchos procesos estocásticos estacionarios en sentido amplio (WSS) se pueden caracterizar estadísticamente a partir de una sola realización; evitando la necesidad de promediar sobre varias realizaciones del proceso. Estos procesos se llaman ergódicos (ver figura 1.).

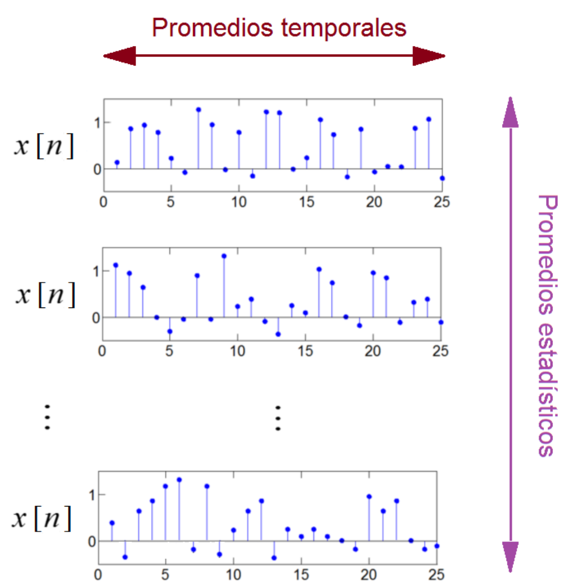

Figura 1: Procesos estocásticos ergódicos.

Formalmente, un proceso es ergódico para la media si el promedio temporal (o media

Jesús Pérez Arriaga

muestral) de cualquier realización, $x(n)$, tiende al promedio estadístico (media del proceso) cuando el número de muestras tiende a infinito.

$$\mu_X = E[X(n)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n).$$

Similarmente, en los procesos ergódicos para la autocorrelación

$$r_X[m] = E[X(n)\ X(n+m)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)\ x(n+m),$$

por lo que la autocorrelación se podría obtener a partir de una sola realización de longitud infinita del proceso. En la práctica no se dispone de una realización con un número infinito de muestras. Pero a partir de una realización de longitud finita, N, suficientemente grande, es posible aproximar la media y la autocorrelación cuando el proceso es ergódico. Si se dispone de una realización $x[n]$ con muestras indexadas en el intervalo $0 \leq n \leq N-1$, la media y la función de autocorrelación se pueden aproximar así:

$$\mu_X \simeq \hat{\mu}_X = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n), \tag{1}$$

$$r_X(m) \simeq \hat{r}_X(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)\, x(n+|m|), \quad -N+1 \leq m \leq N-1. \tag{2}$$

3. Análisis espectral

Sea un proceso ergódico, $X(n)$ con función de autocorrelación $r_X(m)$ y densidad espectral de potencia (DEP) $S_X(\omega)$. El objetivo es estimar $S_X(\omega)$ a partir de un registro finito de una realización del proceso: $x[n], 0 \leq n \leq N-1$.

Las técnicas de análisis espectral se pueden clasificar en dos grandes grupos: 1) análisis espectral clásico y 2) análisis espectral paramétrico. La siguiente relación muestra algunos de las técnicas de cada grupo:

- Análisis espectral clásico:
  - Periodograma / Correlograma
  - Estimador de Balckman-Tukey
  - Estimador de Bartlett
  - Estimador de Welch
- Análisis espectral paramétrico

- Modelado AR
- Modelado ARMA
- Modelado MA

4. Periodograma/Correlograma

La DEP de $X(n)$ es la transformada de Fourier(FT) de su función de autocorrelación

$$r_X(m) \quad \stackrel{F}{\longleftrightarrow} \quad S_X(\omega) \qquad \Longleftrightarrow \qquad S_X(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_X(m)\; e^{-j\,\omega m}.$$

El **correlograma** es un estimador de la DEP que se obtiene calculando la FT de la estima de la autocorrelación dada por (2),

$$\hat{S}_X^c(\omega) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}_X(m)\; e^{-j\,\omega m}.$$

Una definición alternativa de la DEP es

$$S_X(\omega) = \lim_{N\to\infty} E\left[\frac{1}{N}\left|X_N(\omega)\right|^2\right],$$

donde $E[\cdot]$ es el operador esperanza matemática sobre las realizaciones del proceso y $X_N(\omega)$ representa la FT de un registro finito de N muestras del proceso.

A partir de esta definición, y considerando el registro finito de una única realización, $x(n)$, la DEP se puede aproximar así

$$\hat{S}_X^p(\omega) = \frac{1}{N}\left|X(\omega)\right|^2,$$

donde $X(\omega)$ es la FT del registro finito. $\hat{S}_X^p(\omega)$ se conoce como el estimador **periodograma**. Se puede demostrar que el correlograma y el periodograma son el mismo estimador, $\hat{S}_X^p(\omega) = \hat{S}_X^c(\omega)$

5. Estimador de Blackman-Tukey

El estimador de la autocorrelación proporciona estimas poco precisas de la autocorrelación cuando $|m|$ es grande. Esto hace que, en muchas ocasiones, el periodograma / correlograma proporcione resultados pobres.

Una forma de mejorar sus prestaciones consiste en estimar la DEP como la FT de la estima de la autocorrelación enventanada,

$$\hat{S}_X^{BT}(\omega) = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \hat{r}_X(m)\; w(m)\; e^{-j\omega m}, \tag{3}$$

donde $w(m)$ es una ventana simétrica de longitud $2M-1$. Limitando la longitud de la estima de la autocorrelación se elimina las muestras de la autocorrelación donde la estima es mala. Además, eligiendo adecuadamente la forma de la ventana se puede dar mas peso a las estimas en torno a $m=0$, que son las mas precisas. La expresión (3) define el estimador de **Blackman-Tukey**.

Una ventana muy utilizada en la práctica es la ventana triangular

$$w(m) = \frac{M-|m|}{M}, \qquad 1-M \leq m \leq M-1.$$

6. Estimador de Bartlett

Otra forma de mejorar las estimas del periodograma consiste en dividir la secuencia original $x(n)$ en segmentos de longitud K y promediar los K periodogramas. Este método se conoce como estimador de Barlett.

7. Análisis espectral paramétrico

Una alternativa a las técnicas clásicas de estimación espectral son las técnicas paramétricas. Estas se fundamentan en el teorema de Paley-Wiener que dice que cualquier proceso WSS, con DEP $S_X(\omega)$, que cumpla

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln S_X(\omega) d\omega < \infty,$$

puede modelarse como un proceso ARMA (incluyendo los procesos AR y MA como casos particulares). Es decir, la DEP de cualquier proceso WSS que cumpla la condición de Paley-Wiener se puede escribir así

$$S_X(\omega) = \sigma^2 \left| \frac{\sum_{k=0}^{q} b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k e^{-j\omega k}} \right|^2, \tag{4}$$

donde $b_0, b_1, \ldots, b_q$, $a_1, \ldots, a_p$ son los coeficientes del filtro asociado y σ^2 es la varianza del ruido a la entrada del filtro. Si se conocieran los coeficientes del filtro, (4) proporcionaría la DEP del proceso. Entonces, el problema de la estimación paramétrica de la DEP se reduce a estimar los coeficientes del filtro y la varianza a la entrada a partir de realizaciones del proceso. Después, la DEP estimada vendrá dada por (4).

8. Modelado AR(p)

En modelado AR(p) se asume que el proceso estocástico de interés es un proceso AR(p). Por tanto su DEP será de la forma

$$S_X(\omega) = \sigma^2 \left| \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k e^{-j\omega k}} \right|^2, \tag{5}$$

Se puede demostrar que los coeficientes del filtro y los valores de la autocorrelación de un proceso AR(p) están relacionados por la siguiente ecuación:

$$r_X(m) = -\sum_{k=1}^{p} a_k r_X(m-k) + \sigma^2 \delta(m), \qquad m \geq 0. \tag{6}$$

Considerando (6) para $m = 1, 2, \dots, p$, y teniendo en cuenta que $r_x(m) = r_x(-m)$ se obtiene el siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{array}{lcllll}
r_X(1) & = & -a_1 r_X(0) & -a_2 r_X(1) & \dots & -a_p r_X(p-1) \\
r_X(2) & = & -a_1 r_X(1) & -a_2 r_X(0) & \dots & -a_p r_X(p-2) \\
 & \vdots & & & \vdots & \\
r_X(p) & = & -a_1 r_X(p-1) & -a_2 r_X(p-2) & \dots & -a_p r_X(0)
\end{array}$$

Estas son la llamadas ecuaciones de Yule-Walker (o ecuaciones normales). Las ecuaciones de Yule-Walker se pueden escribir de forma matricial así

$$\mathbf{R}(-\mathbf{a}) = \mathbf{r},$$

donde

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_X(0) & r_X(1) & \dots & r_X(p-1) \\ r_X(1) & r_X(0) & \dots & r_X(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_X(p-1) & r_X(p-2) & \dots & r_X(0) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_X(1) \\ r_X(2) \\ \vdots \\ r_X(p) \end{bmatrix}.$$

Note que la matriz $\mathbf{R}$ es una matriz Toeplitz simétrica.

Entonces, el procedimiento para estimar la DEP mediante modelado AR es

1. Se obtiene una estima de la función de autocorrelación , $\hat{r}_X(m)$, a partir del una realización del proceso.

2. Se estiman los coeficientes del filtro resolviendo el sistema de ecuaciones de Yule-Walker,

   $$\hat{\mathbf{a}} = -\mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{r},$$

   donde $\mathbf{r}$ y $\mathbf{R}$ se construyen, de forma aproximada, a partir de las estimas de la autocorrelación $\hat{r}_X(m)$.

3. Se obtiene la estima de la varianza del ruido particularizando (6) para $m = 0$:

   $$\hat{\sigma^2} = r_X(0) + a_1 r_X(1) + a_2 r_X(2) + \dots + a_p r_X(p). \tag{7}$$

4. Finalmente, considerando (5), la estima de la DEP vendrá dada por

$$\hat{S}_X(\omega) = \frac{\hat{\sigma}^2}{|1 + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}_k e^{-j\omega k}|^2}, \tag{8}$$

En el caso de modelos ARMA y MA, la relación entre los valores de autocorrelación y los coeficientes del filtro no es lineal. Esto conduce a un sistemas de ecuaciones no lineal y por tanto más difícil de resolver que en el modelo AR. Esto hace que el modelado AR sea el más utilizado para la estimación paramétrica de la DEP.