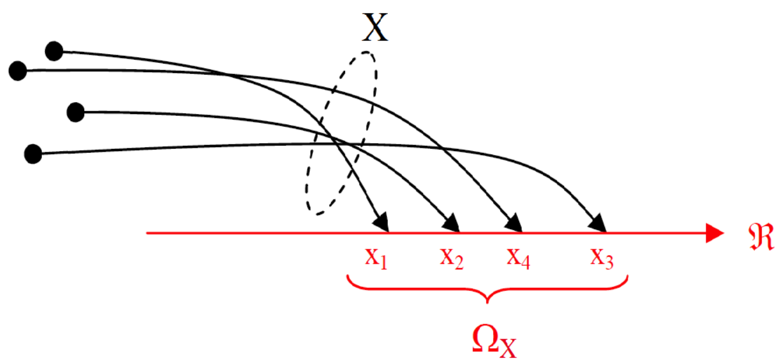
Vectores aleatorios contínuos

Variables aleatorias contínuas

- Experimentos aleatorios:



- La variable aleatoria X asigna un valor numérico real (x_i) al resultado de cada experimento aleatorio.
- El rango de X es el conjunto de valores que puede tomar X: $\quad \Omega_X$
- El rango de una variable aleatoria continua es uno o mas intervalos en $\mathbb{R}$

Jesús Pérez Arriaga

- Función densidad de probabilidad (f.d.p.): $f_X(x)$

$$\Pr(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

- Rango: $\Omega_X = \{x | f_X(x) > 0\}$
- Esperanza matemática: $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$
  - El operador $E[\cdot]$ es lineal
- Momentos: $E[g(X)]$
  - Media: $\mu_X = E[X]$
  - Varianza: $\sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2]$
  - Potencia: $r_X^2 = E[X^2]$
- Transformación lineal de una variable aleatoria: $Y = aX + b$
  - $f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$
- Aproximaciones a partir de un conjunto de realizaciones: $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{M}$
  - Momentos muestrales:

$$E[g(X)] \simeq \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} g(x^{(m)})$$

  - Histograma:

$$f_X(x_k) \simeq \frac{m_k}{M\ \Delta}, \qquad \Delta = x_{k+1} - x_k$$

`ejercicio 1`

- Cálculo en tiempo real (online) de los momentos muestrales.

Variables aleatorias Gaussianas

- Notación: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Función densidad de probabilidad: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
- Función Q:

$$Pr(X \geq x_0) = \int_{x_0}^{\infty} f(x)dx = Q\left(\frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right)$$

  - $Q(0) = 1/2$
  - $Q(-x) = 1 - Q(x)$

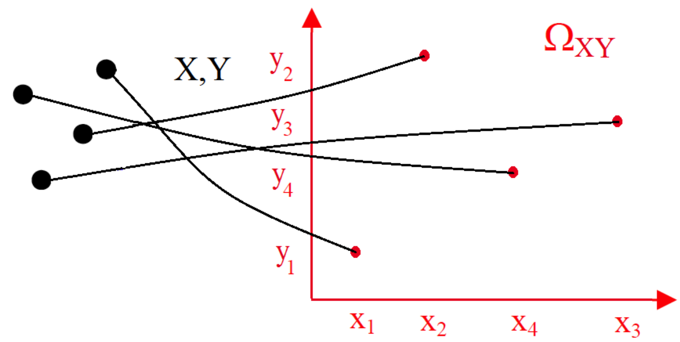
- Momentos:

$$\begin{aligned} E[X] &= \mu \\ E[(X-\mu)^2] &= \sigma^2 \\ E[(X-\mu)^m] &= \begin{cases} 0, & \text{si } m \text{ impar} \\ \sigma^m (m-1)(m-3)\ldots 3 \cdot 1, & \text{si } m \text{ par} \end{cases} \end{aligned}$$

- Una transformación lineal de una v.a. Gaussiana es una v.a. Gaussiana.
- Una combinación lineal de v.a.'s Gaussianas es una v.a. Gaussiana
- Teorema central del límite:
  Bajo condiciones muy generales, la suma de muchas v.a.'s independientes es una v.a. aproximadamente Gaussiana

Caracterización conjunta de dos variables aleatorias continuas

- Experimentos aleatorios:



- La variables aleatorias (X, Y) asignan dos valores numéricos (x_i, y_i) al resultado de cada experimento aleatorio.

- Función densidad de probabilidad (f.d.p.) conjunta: $f_{X,Y}(x, y)$

$$\Pr((X, Y) \in S) = \int_S f_{X,Y}(x, y)\ dx\ dy$$

- Rango: $\Omega_{X,Y} = \{(x, y) | f_{X,Y}(x, y) > 0\}$

- f.d.p.'s marginales:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\ dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\ dx$$

- Esperanza matemática: $E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy$

- Momentos: $E[g(X, Y)]$
  - Correlación: $r_{X,Y} = E[XY]$
  - Covarianza: $\sigma_{X,Y} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$

- Incorrelación: $\sigma_{X,Y} = 0$

- Coeficiente de correlación: $\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}}$

`ejercicio 2`

- Aproximaciones a partir de un conjunto de realizaciones: $\{(x^{(m)}, y^{(m)})\}_{m=1}^{M}$

    - Momentos muestrales:

$$E[g(X,Y)] \simeq \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} g(x^{(m)}, y^{(m)})$$

    - Histograma:

$$f_{X,Y}(x_k, y_s) \simeq \frac{m_{k,s}}{M\ \Delta_X\ \Delta_Y}, \qquad \Delta_X = x_{k+1} - x_k, \quad \Delta_y = y_{s+1} - y_s$$

- Independencia: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

    - Independencia $\Rightarrow$ Incorrelación
    - En v.a.'s Gaussianas: Incorrelación $\Leftrightarrow$ Independencia
    - Independencia $\Rightarrow$ $E[h(X)k(Y)] = E[h(X)]E[k(Y)]$

`ejercicio 3`

Vectores aleatorios continuos

- Experimento aleatorio $\rightarrow \mathbf{X} = [X_1 \dots X_N]^T$
- Realización de experimento aleatorio $\rightarrow \mathbf{x} = [x_1 \dots x_N]^T$
- Función densidad de probabilidad (f.d.p.) conjunta: $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_N)$

$$\Pr(\mathbf{X} \in S) = \int_S f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\ d\mathbf{x} = \int_S f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_N)\ dx_1 \cdots dx_N,$$

- Momentos: $E[g(\mathbf{X})] = \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x})\ f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\ d\mathbf{x}$
  - Media: $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}} = E[\mathbf{X}]$
  - Matriz de correlación (autocorrelación): $\mathbf{R}_{\mathbf{X}} = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^T]$
  - Matriz de covarianza (autocovarianza): $\mathbf{C}_{\mathbf{X}} = E[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}})^T]$
- Componentes incorreladas $\Leftrightarrow \mathbf{C}_{\mathbf{X}}$ es diagonal
- Componentes independientes: $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{N} f_{X_i}(x_i)$

  Componentes independientes $\Rightarrow$ Componentes incorreladas
- Momentos muestrales

$$\{(\mathbf{x}^{(m)})\}_{m=1}^{M} \quad \Rightarrow \quad E[g(\mathbf{X})] \simeq \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} g(\mathbf{x}^{(m)})$$

`ejercicio 4, ejercicio 5`

Vectores aleatorios Gaussianos

- Notación: $\mathbf{X} = [X_1 \cdots X_N]^T \sim N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C})$.
- Función densidad de probabilidad (f.d.p.):

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}|\mathbf{C}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right)$$

  - Componentes independientes:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{N} f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\prod_{i=1}^{N}\sigma_i} \exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right),$$

    donde $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$

  - Componentes independientes e identicamente distribuidas (i.i.d.):

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2\right)$$

    donde $\mu = \mu_i$ y $\sigma^2 = \sigma_i^2$

- Componentes independientes $\Leftrightarrow$ Componentes incorreladas
- Una transformación lineal de un vector aleatorio Gaussiano es un vector aleatorio Gausiano.