Clasificación

Ejercicio 1

Se plantea el siguiente test de hipótesis para decidir la presencia o ausencia de una señal $s[n]$ conocida.

$$\begin{array}{llll} H_0: & x[n] = & r[n], & n = 0, \ldots, N-1 \\ H_1: & x[n] = & s[n] + r[n], & n = 0, \ldots, N-1, \end{array}$$

donde $r[n]$ es ruido blanco Gaussiano con varianza σ^2.

1. Obtenga una expresión, lo más simplificada posible, del estadístico óptimo para este problema.
2. Determine la distribución del estadístico para ambas hipótesis. Obtenga las expresiones de la probabilidad de detección, de la probabilidad de falsa alarma y de la probabilidad de error, en función del umbral de decisión.
3. (p) Dibuje la RoC.
4. Para una probabilidad de falsa alarma dada, $P_{FA} = \alpha$, obtenga el umbral de decisión que maximiza la probabilidad de detección.
5. Suponga que la probabilidad a priori de la hipótesis H_0 es $P(H_0) = p$. Obtenga el umbral de decisión que minimiza la probabilidad de error.
6. Obtenga una expresión del umbral de decisión que minimiza el coste Bayesiano.

Ejercicio 2

Considere el siguiente problema de clasificación binaria

$$\begin{array}{lll} H_0: & x[n] = & r[n], \quad n = 0, \ldots, N-1, \\ H_1: & x[n] = & \begin{cases} s[n] + r[n], & n = 0, \ldots, M-1, \\ r[n], & n = M, \ldots, N-1, \end{cases} \end{array}$$

donde $s[n]$ es una constante conocida y $r[n]$ es un ruido Gaussiano y blanco, con media nula y varianza σ^2.

Obtenga una expresión, lo más simplificada posible, del estadístico óptimo para este problema.

Jesús Pérez Arriaga

Ejercicio 3

Un transmisor de comunicaciones digitales transmite dos posibles señales, $s_0[n]$ y $s_1[n]$, conocidas. En el receptor se reciben las señales con ruido blanco, Gaussiano, de varianza σ^2. Se desea determinar, a partir de la señal recibida, qué señal se ha transmitido.

1. Obtenga una expresión, lo más simplificada posible del estadístico óptimo
2. Obtenga la expresión de la probabilidad de error, la probabilidad de detección y la probabilidad de falsa alarma, en función del umbral.
3. (p) Dibuje la RoC del clasificador en el caso
$$\sigma^2 = 1, \quad N = 10, \quad s_0[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right), \quad s_1[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$$
4. Obtenga la expresión del valor del umbral que minimice la probabilidad de error.
5. Obtenga la expresión del valor del umbral que minimiza el coste Bayesiano.
6. Suponga que las formas de onda tienen la misma energía y son equiprobables. Determine qué condición deben cumplir las señales para minimizar la probabilidad de error. Determine la probabilidad de error en este caso.

Ejercicio 4

Un sistema de comunicaciones digitales con modulación BPSK envía símbolos equiprobables con amplitudes $s = \pm a$, y se reciben con ruido blanco Gaussiano con varianza σ^2.

1. Deduzca el test óptimo de decisión bajo el criterio de mínima probabilidad de error.
2. Obtenga la probabilidad de error del decisor anterior.

Ejercicio 5

Se tienen dos fuentes de ruido blanco Gaussiano con varianzas $\sigma_0^2 < \sigma_1^2$. Una de las fuentes está activa. Un receptor adquiere N muestras de señal y, a partir de ellas, pretende identificar la fuente activa.

1. Plantéelo como un problema de clasificación binaria.
2. Obtenga una expresión, los más simplificada posible del estadístico óptimo.
3. (p) Dibuje la RoC del clasificador en el caso

   $N = 10,\ \sigma_0^2 = 0{,}5,\ \sigma_1^2 = 1{,}0,\ P(H_0) = 3/4.$
4. Obtenga el valor del umbral que minimice la probabilidad de error en el caso anterior
5. (p) Para el clasificador anterior determine la probabilidad de error, la probabilidad de detección y la probabilidad de falsa alarma.
6. Obtenga el valor del umbral que minimice el coste Bayesiano en el caso de que: $C_{0,1} = 10, C_{1,0} = 1, C_{0,0} = C_{1,1} = 0$.
7. (p) Para el clasificador anterior determine la probabilidad de error, la probabilidad de detección y la probabilidad de falsa alarma.

Ejercicio 6

Un transmisor de comunicaciones transmite dos posibles señales, $s_0[n]$ y $s_1[n]$. En el receptor se reciben las señales con ruido Gaussiano coloreado con matriz de covarianza $\mathbf{C}$. Se desea determinar, a partir de la señal recibida, qué señal se ha transmitido.

1. Obtenga una expresión, lo más simplificada posible del estadístico óptimo.
2. Determine la probabilidad de error del clasificador en el caso de que:

$$\mathbf{s}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad P(H_0) = 3/4, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Repita el primer apartado suponiendo que cuando se transmite $s_0[n]$ la matriz de covarianza del ruido es $\mathbf{C}_0$ y que cuando se transmite $s_1[n]$ la matriz de covarianza del ruido es $\mathbf{C}_1$,

$$\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 7

La f.d.p. de una variable aleatoria Laplaciana es $f(r) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}} \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}\, |r|\right)$, donde σ^2 denota la varianza.

1. Obtenga la expresión, los más simplificada posible, del estadístico para el problema del ejercicio 3, suponiendo que el ruido es Laplaciano y las muestras de ruido son independientes.

Ejercicio 8

Un transmisor transmite una señal de entre un conjunto de M señales posibles. Un receptor recibe la señal con ruido blanco Gaussiano y debe determinar cuál de ellas fue transmitida. Este problema se puede plantear como un problema de clasificación

$$H_m: \quad x[n] = s_m[n] + r[n], \qquad n = 0, \ldots, N-1, \quad m = 0, \ldots, M-1,$$

donde $s_m[n]$ es la señal asociada a la hipótesis H_m y $r[n]$ es ruido blanco Gaussiano. Se supone que el receptor conoce las posibles señales, sus probabilidades a priori, y la varianza del ruido σ^2.

1. Derive el clasificador de mínima probabilidad de error.
2. Particularice el clasificador para el caso particular de que las señales tienen la misma energía y la misma probabilidad a priori.

Ejercicio 9

Considere el siguiente problema de clasificación

$$H_m : \quad x[n] = s_m[n] + r_m[n], \qquad n = 0, \ldots, N-1, \quad m = 0, \ldots, M-1,$$

donde $s_m[n]$ son formas de onda conocidas y $r_m[n]$ es ruido Gaussiano coloreado con matriz de covarianza C_m.

1. Derive el clasificador de mínima probabilidad de error.
2. Particularice el clasificador al caso de ruido blanco Gaussiano con distinta varianza para cada hipótesis
3. Compruebe que se obtiene el clasificador del ejercicio 8 cuando el ruido es blanco, Gaussiano y con la misma varianza para todas las hipótesis.

Ejercicio 10

Considere el receptor de un sistema de comunicaciones digitales con modulación M-PAM y símbolos equiprobables. Dado un observable x, el decisor del receptor debe que decidir de qué símbolo de la constelación proviene, con la mínima probabilidad de error.

1. Plantee el problema del decisor como un problema de clasificación M-ario.
2. Obtenga el clasificador(decisor) de mínima probabilidad de error cuando el ruido es blanco y Gaussiano.
3. Obtenga el clasificador(decisor) de mínima probabilidad de error cuando el ruido es i.i.d Laplaciano (para la distribución Laplaciana vea el ejercicio 7).
4. (p) Obtenga la probabilidad de error en cada distribución de ruido en el caso de modulación 4-PAM con símbolos $s_0 = -3, s_1 = -1, s_2 = 1, s_3 = 3$. Considere que la varianza de ruido es $\sigma^2 = 1/4$ en ambos casos.

Ejercicio 11

Considere el receptor de un sistema de comunicaciones digitales con modulación QPSK. Dado un observable $\mathbf{x}$, el decisor del receptor debe decidir de qué símbolo de la constelación proviene.

1. Plantee el problema del decisor como un problema de clasificación M-ario. Suponga que a la entrada del decisor se tiene ruido blanco Gaussiano.
2. Obtenga el clasificador(decisor) de mínima probabilidad de error.
3. Suponiendo que los símbolos son equiprobables, determine las regiones de decisión del clasificador.
4. Suponga que uno de los símbolos tiene probabilidad a priori $1/2$ y que el resto tiene probabilidad a priori $1/6$. Determine en este caso las regiones de decisión.