Estimación Paramétrica

Ejercicio 1

Se realizan N medidas independientes de una magnitud A en ruido blanco Gaussiano de media nula y varianza σ^2 conocida. Se desea estimar A a partir del vector de medidas $\mathbf{x}$. Para ello se considera la siguiente familia de estimadores:

$$\hat{A}(\mathbf{x}) = \frac{a}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n],$$

donde a es un parámetro a elegir. Obtener el valor de a que minimiza el error cuadrático medio (MSE).

Ejercicio 2

Se dispone de N observaciones de la señal

$$x[n] = s[n] + r[n], \qquad 0 \leq n < N,$$

donde $s[n]$ es una señal conocida y $r[n]$ es AWGN con varianza σ^2 desconocida.

1. Obtenga el estimados de máxima verosimilitud (ML) para σ^2.
2. Calcule el sesgo, la varianza y el MSE del estimador anterior en función de σ^2. Suponga que $N = 20,\ s[n] = 1, \forall n$. (p)

Ejercicio 3

Se recibe una señal $s[n]$, con forma conocida, en ruido WGN con varianza σ^2 desconocida. La señal se recibe atenuada con atenuación A desconocida. Se desea estimar ambos parámetros, A y σ^2, a partir de la señal recibida

$$x[n] = A\ s[n] + r[n], \qquad n = 0, \ldots, N-1,$$

donde $x[n]$ es la señal recibida y $r[n]$ denota el WGN.

a) Obtenga los estimadores ML para A y σ^2.

b) Calcule el sesgo, la varianza y el MSE de los estimadores anteriores. (p)

c) Una alternativa al estimador de σ^2 es el siguiente

$$\hat{\sigma}^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}(x[n] - \hat{A}_{ML}(\mathbf{x})\ s(n))^2,$$

donde $\hat{A}_{ML}(\mathbf{x})$ es el estimador ML de A, obtenido en el apartado 1. Determine el sesgo del nuevo estimador para σ^2. (p)

Jesús Pérez Arriaga

Ejercicio 4

Se dispone de N observaciones independientes de la señal

$$x[n] = A + r[n], \quad 0 \leq n < N,$$

donde $r[n]$ es AWGN con varianza σ^2. Tanto A como σ^2 son desconocidas. Obtenga el estimador ML de la relación señal a ruido $SNR = A^2/\sigma^2$.

Ejercicio 5

Le desea estimar la atenuación A de una señal $s[n]$ conocida. Las observaciones responden al siguiente modelo

$$x[n] = A\ s[n] + r[n], \quad n = 0, \ldots, N-1,$$

donde $r[n]$ es ruido blanco Gaussiano de media cero y varianza σ^2 conocida.

a) Obtenga el estimador LS para A.

b) Obtenga el estimador ML para A.

c) Calcule el sesgo, la varianza y el MSE de los estimadores anteriores. (p)

Ejercicio 6

Se desea calibrar un aparato de medida cuya medida está sesgada una cantidad s desconocida y tiene un ruido de medida con distribución Gaussiana y varianza σ^2 también desconocida. Para ello se realizan N medidas independientes, $z[n]$, $n = 0, 1, ..., N-1$, en un entorno controlado donde se sabe que la magnitud a medir vale A.

1. Obtenga los estimadores ML para s y σ^2.
2. Determine el sesgo de los estimadores. (p)

Ejercicio 7

Durante un experimento una magnitud s crece de acuerdo a la expresión $s(t) = vt$, donde t representa tiempo y v es la velocidad de crecimiento. Se dispone de un aparato que permite medir valores de s en diferentes instantes del proceso. El aparato tiene ruido de medida por lo que proporciona valores aproximados de s.

Se pretende estimar v a partir de medidas realizadas durante el proceso en los siguientes instantes de tiempo: $t = nT$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$. El periodo de medida T es conocido.

a) Obtenga el estimador de mínimos cuadrados para estimar v a partir de las medidas.

b) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud para estimar v a partir de las medidas. Suponga que el ruido de medida es blanco, Gaussiano y con varianza σ^2 conocida.

c) Calcule la media, la varianza y la MSE de los estimadores anteriores. (p)

d) Suponga ahora que v y σ^2 son desconocidas. Obtenga el estimador de máxima verosimilitud para estimar simultáneamente v y σ^2 a partir de las medidas.

e) Suponga que se han medido los siguientes valores

$$x[0] = 1, x[1] = 6, x[2] = 8, x[3] = 16,$$

con un periodo de medida de $1s$. Obtenga las estimas de los estimadores de los apartados a), b) y d). Para el estimador del apartado b) suponga que $\sigma^2 = 1$.

Ejercicio 8

En un sistema de radiocomunicaciones digitales, se transmite una secuencia de N símbolos piloto (conocida) para que el receptor estime la respuesta del canal. El ruido en el receptor es WGN con varianza conocida. Obtenga el estimador de mínimos cuadrados para la respuesta del canal.

Ejercicio 9

Se dispone de N sensores distintos para medir una magnitud física A. La medida de los sensores está contaminada con ruido Gaussiano independiente. Se desea estimar A a partir de una medida de cada sensor. Por tanto, la ecuación de medida es

$$x[n] = A + r[n], \quad n = 0, 1, 2, ...N - 1,$$

donde n representa el índice a los sensores, $x[n]$ es la medida del sensor n-ésimo y $r[n]$ es el ruido de su medida con varianza σ_n^2. Las varianzas de ruido de los sensores son diferentes y se suponen conocidos.

1. Obtenga el estimador de mínimos cuadrados (LS) para A.
2. Obtenga el estimador de máxima verosimilitud (ML) para A.
3. Considere el caso particular de $N = 3$ sensores con las siguientes varianzas de ruido:

   $$\sigma_0 = 1, \sigma_1 = 1/2, \sigma_2 = 1/3.$$

   Calcule las estimas LS y ML para la siguiente observación: $x[0] = 10, x[1] = 10, x[2] = 11$.
4. Calcule el sesgo, la media y la varianza de los estimadores anteriores. (p)

Ejercicio 10

Considere el siguiente modelo de señal

$$x[n] = A + r[n], \quad n = 0, 1, 2, ...N - 1,$$

donde A es conocida y $r[n]$ son muestras de WGN con varianza

$$\sigma^2 = \begin{cases} \sigma_0^2, & n = 0, \dots, M - 1, \\ \sigma_1^2, & n = M, \dots, N - 1, \end{cases}$$

Es decir, el modelo representa señales Gaussianas i.i.d con un cambio en la varianza en la muestra M. La varianza antes del cambio es σ_0^2, y la varianza después del cambio es σ_1^2. La media de las señales, A, y la varianza antes del cambio, σ_0^2, son conocidas.

a) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud para σ_1^2 suponiendo que M es conocida.

b) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud para M y σ_1^2.