Estimación paramétrica Bayesiana

1. Planteamiento del problema

- **Vector de observaciones**

$$\mathbf{x} = [\ x[0]\ x[1]\ \cdots\ x[N-1]\ ]^T$$

  Un vector de observaciones es una realización de un vector aleatorio $\mathbf{X}$ que depende del parámetro a estimar θ.

- **Parámetro a estimar**
  En estimación clásica θ se considera determinista, y no se dispone de un conocimiento previo sobre su valor. En el planteamiento Bayesiano θ se considera una variable aleatoria con una determinada distribución a priori. Esta distribución a priori permite incorporar al estimador cierto conocimiento previo sobre θ

- **Modelo**
  - f.d.p. a priori: $f(\theta)$
  - f.d.p. de las observaciones: $f(\mathbf{x}|\theta)$

- **f.d.p. a posteriori**

$$f(\theta|\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}|\theta)f(\theta)}{f(\mathbf{x})}$$

- **Error cuadrático medio (MSE)**
  - En estimación clásica: $MSE(\theta) = E_{\mathbf{X}}[(\hat{\theta}(\mathbf{x}) - \theta)^2]$
  - En estimación Bayesiana: $MSE = E_{\mathbf{X},\theta}[(\hat{\theta}(\mathbf{x}) - \theta)^2] = E_\theta[MSE(\theta)]$

2. Estimadores MAP y MMSE

A partir de la f.d.p. a posteriori se plantean los siguientes estimadores

- Estimador MAP: $\hat{\theta}_{MAP}(\mathbf{x}) = \text{argmax}_\theta f(\theta|\mathbf{x})$
- Estimador MMSE: $\hat{\theta}_{MMSE}(\mathbf{x}) = E[\theta|\mathbf{x}] = \int \theta f(\theta|\mathbf{x}) d\theta$

Jesús Pérez Arriaga