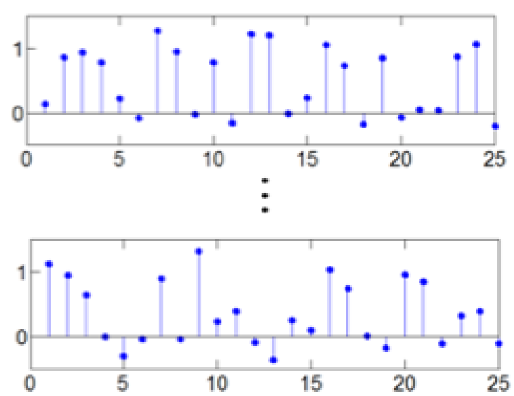
Procesos estocásticos en tiempo discreto

- **Definición**:
  - Una variable aleatoria asocia un número a cada realización de un experimento aleatorio
  - Un vector aleatorio asocia un vector a cada realización de un experimento aleatorio
  - Un proceso estocástico asocia una señal a cada realización de un experimento aleatorio



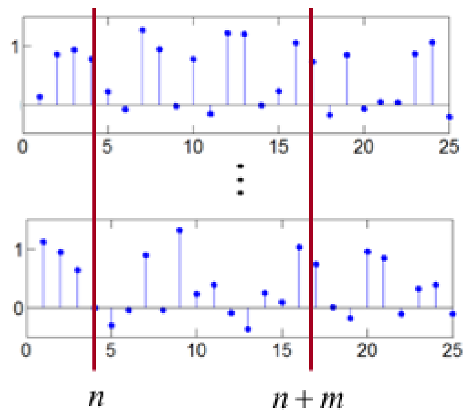
  - Un proceso aleatorio se puede interpretar como un conjunto de variables aleatorias ordenadas: $\{X[n]\}$. Una realización de cada variable aleatoria genera una señal.
  - Un proceso aleatorio se puede interpretar como un vector aleatorio con muchas componentes (formalmente infinitas).

Jesús Pérez Arriaga

- **Caracterización**:

  La caracterización de proceso estocástico se basa en la caracterización (individual y conjunta) de sus variables aleatorias:

  - Función de medias: $\mu_X[n] = E[X[n]]$
  - Función de correlación (autocorrelación): $r_X[n+m, n] = E[X[n+m]X[n]]$



- **Procesos estacionarios en sentido amplio (WSS)**:
  - Media: $\mu_X[n] = \mu_X, \quad \forall n$
  - Función de correlación (autocorrelación): $r_X[n+m, n] = r_X[m], \quad \forall n$

- **Densidad espectral de potencia de procesos WSS**:
  - . $r_X[m] \quad \overset{F}{\longleftrightarrow} \quad S_X(\omega)$
  - . Interpretación

- **Propiedades de procesos WSS**:
  - . $\sigma_X^2 = r_X[0] - \mu_X^2$
  - . $r_X[m] = r_X[-m]$
  - . $r_X[m] \leq r_X[0]$
  - . $S_X(\omega) \in \mathbb{R}^+$
  - . $S_X(\omega) = S_X(-\omega)$

- **Ejemplos de procesos WSS**:
  - Procesos i.i.d: Sus variables aleatorias son i.i.d.
  - Procesos blancos: Sus variables aleatorias son incorreladas.
  - Ruido blanco: $\mu_X = 0, \quad r_X[m] = \sigma_X^2 \; \delta[m] \quad \Rightarrow \quad S_X(\omega) = \sigma_X^2$.
  - Ruido blanco Gaussiano: $X[n] \sim \mathcal{N}(0, \sigma_X^2)$

- **Vectores aleatorios en procesos estocásticos WSS**:

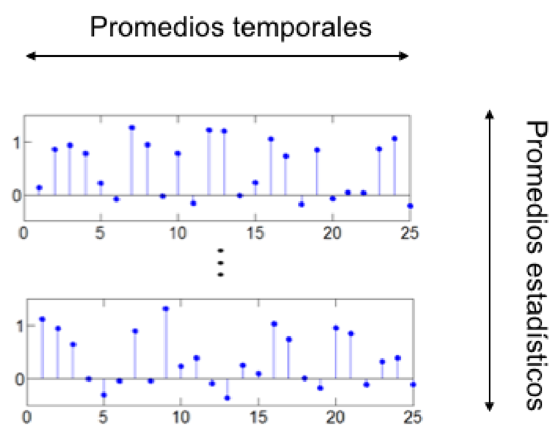
$$\mathbf{X} = [X[n]\ X[n-1]\ \cdots\ X[n-M+1]]^T.$$

  - Los momentos del vector aleatorio $\mathbf{X}$,

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}} = \mu_X\ \mathbf{1}_M, \qquad \mathbf{R}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} r_X[0] & r_X[1] & \dots & r_X[M-1] \\ r_X[1] & r_X[0] & \dots & r_X[M-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_X[M-1] & r_X[M-2] & \dots & r_X[0] \end{bmatrix},$$

- **Procesos ergódicos**:

  Son procesos WSS que se pueden caracterizar a partir de una sola realización (de longitud infinita) mediante promedios temporales.



$$\mu_X = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n].$$

$$r_X[m] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]\ x[n+|m|],$$

Aproximación a partir de una realización de longitud finita: $\quad x[n],\ n = 0, 1, \ldots, N-1$

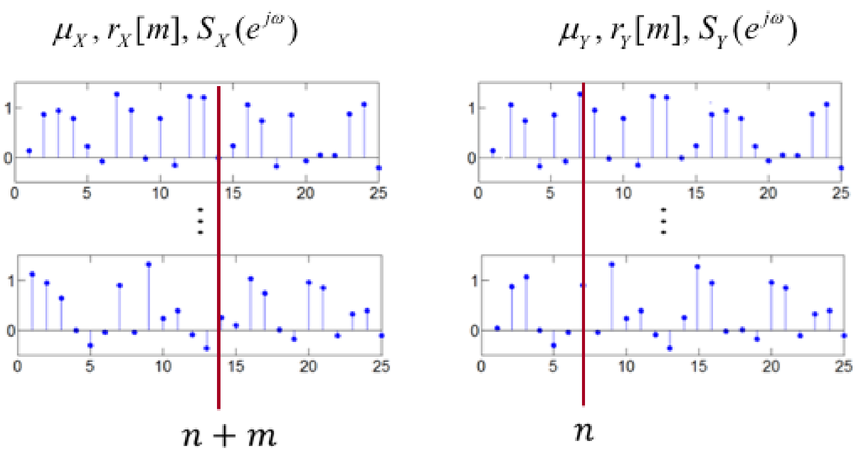
$$\mu_X \simeq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n],$$

$$r_X[m] \simeq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]\ x[n+|m|], \qquad -N+1 \le m \le N-1.$$

- **Procesos conjuntamente WSS**:

  - Sean $X[n]$ e $Y[n]$ dos procesos WSS asociados al mismo experimento aleatorio: $\mu_X,\ r_X[m],\quad \mu_Y,\ r_Y[m]$.

  - Función de correlación cruzada: $\quad r_{X,Y}[n+m,n] = E[X[n+m]\ Y[n]]$.



  - Son conjuntamente WSS si,

$$r_{X,Y}[n+m,n] = r_{X,Y}[m],\ \forall n.$$

  - Propiedad: $\quad r_{X,Y}[m] = r_{Y,X}[-m]$

  - Son conjuntamente ergódicos si,

$$r_{X,Y}[m] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n+|m|]\ y[n].$$

    Aproximación a partir de realizaciones de longitud finita:

    $x[n],\ y[n],\ n = 0, 1, \ldots, N-1$

$$r_{X,Y}[m] \simeq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n+|m|]\ y[n], \qquad -N+1 \le m \le N-1.$$

- **Filtrado de procesos WSS**:

$$\boxed{X[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow Y[n]}$$

$$\begin{array}{ccccc} x[n] & \longrightarrow & \boxed{h[n]} & \longrightarrow & y[n] = x[n] * h[n] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x[n] & \longrightarrow & \boxed{h[n]} & \longrightarrow & y[n] = x[n] * h[n] \end{array}$$

La respuesta de un sistema LTI a un proceso WSS es otro proceso WSS

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \mu_X \sum_n h[n] \\ r_Y[m] &= r_X[m] * h[m] * h[-m] \\ S_Y(\omega) &= S_X(\omega) \;\; |H(\omega)|^2 \end{aligned}$$

Además los procesos de entrada y salida son conjuntamente WSS

$$\begin{aligned} r_{X,Y}[m] &= r_X[m] * h[-m] \\ r_{Y,X}[m] &= r_X[m] * h[m] \end{aligned}$$

- **Procesos ARMA**:

  Son los procesos a la salida de filtros digitales causales cuando a la entrada de tiene ruido blanco Gaussiano (WGN).

$$X[n] \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y[n]$$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots b_q z^{-q}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots a_p z^{-p}}$$

  Si $X[n]$ es WGN, entonces $Y[n]$ es un proceso ARMA(q,p).

  Casos particulares:

  - Procesos MA(q): $H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots b_q z^{-q}$
  - Procesos AR(p): $H(z) = \dfrac{1}{1 + a_1 z^{-1} + \dots a_p z^{-p}}$