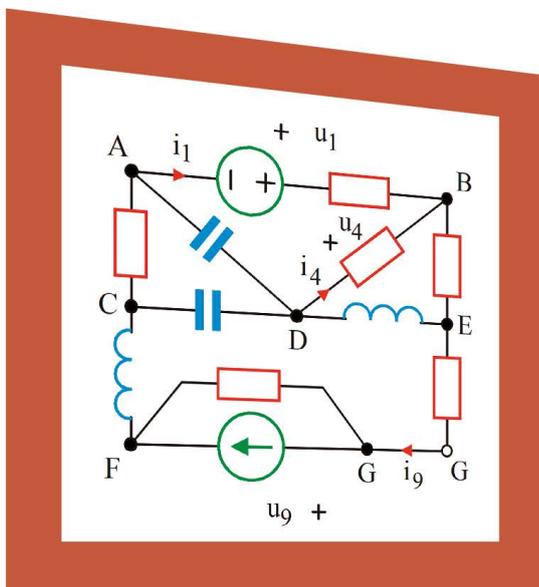


Fundamentos de Ingeniería Eléctrica

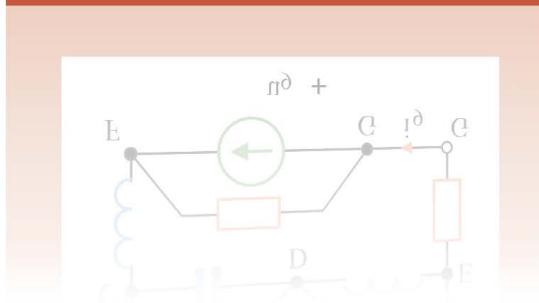
UD 1. Elementos de circuitos lineales



Alberto Arroyo Gutiérrez
José Carlos Lavandero González
Sergio Bustamante Sánchez
Eugenio Sainz Ortiz
Alberto Laso Pérez
Raquel Martínez Torre
Mario Mañana Canteli

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

Este material se publica bajo la siguiente licencia:
Creative Commons BY-NC-SA 4.0





BT1: ELEMENTOS DE CIRCUITOS LINEALES

CONTENIDOS

1.	Introducción	02
2.	Generalidades de los circuitos	06
3.	Formas de onda	15
4.	Aparatos de medida	24
5.	Elementos pasivos dos terminales	29
6.	Asociación de elementos pasivos	37
7.	Elementos activos dos terminales	49
8.	Asociación de elementos activos	59
9.	Elementos y magnitudes duales	70
10.	Referencias bibliográficas	74

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-



1. INTRODUCCIÓN

✓ La Ingeniería Eléctrica

❖ ¿De qué trata?

- Estudia las aplicaciones de la **electricidad, la electrónica y el electromagnetismo**, basadas sobre conocimientos físicos y matemáticos.

❖ Contexto actual

- Sus actividades iniciales, fueron: el **alumbrado eléctrico**, el uso del **telégrafo** y la **generación de energía eléctrica**.
- Dada la entidad propia que van adquiriendo, se va dividiendo en nuevas ingenierías: ingeniería eléctrica, la ingeniería electrónica, la ingeniería de sistemas y automática y la ingeniería de telecomunicaciones.
- Ingeniería eléctrica actual, contempla: **la generación, el transporte, la distribución y la utilización de la energía eléctrica**.



✓ La asignatura

❖ Objetivo

- Comprender el **Análisis de los Circuitos Eléctricos** para poder determinar los niveles de tensión, corriente, potencia y energía en cada punto de un circuito.
- Las bases iniciales de esta rama de la Ingeniería Eléctrica se fundamentan en la **ley de Ohm y las leyes de Kirchhoff**.

✓ Leyes de Maxwell y campos cuasiestacionarios

❖ Introducción

- La **Teoría de Circuitos** constituye una **simplificación** de una teoría más completa: la **Teoría de Campos Electromagnéticos de J.C. Maxwell (Leyes de Maxwell)**.
- Las simplificaciones están basadas en la consideración de **campos electromagnéticos cuasiestacionarios**, lo que implica que **sólo puede aplicarse cuando la longitud de onda de las señales** (tensiones, corrientes, etc.) presentes en el circuito, **son mucho mayores que las dimensiones físicas de éste**.
- Este hecho ocurre en la mayoría de las aplicaciones electrotécnicas, **exceptuando las líneas largas de transporte de energía eléctrica**.



FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Elementos de circuitos lineales

Nombre	Forma diferencial	Forma integral
Conservación de la carga	$\text{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$	$\oint_S \vec{J} d\vec{s} = -\frac{\partial q}{\partial t}$
Ecuaciones de Maxwell		
Ley de Gauss para el campo eléctrico	$\text{div} \vec{D} = \rho$	$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = q$
Ley de Faraday-Henry	$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} ds$
Ley de Gauss para el campo magnético	$\text{div} \vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B} d\vec{s} = 0$
Ley de Ampere-Maxwell	$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{J} d\vec{s} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} ds$
Ecuación de Lorentz	$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$	

v = velocidad de la carga (m/s).

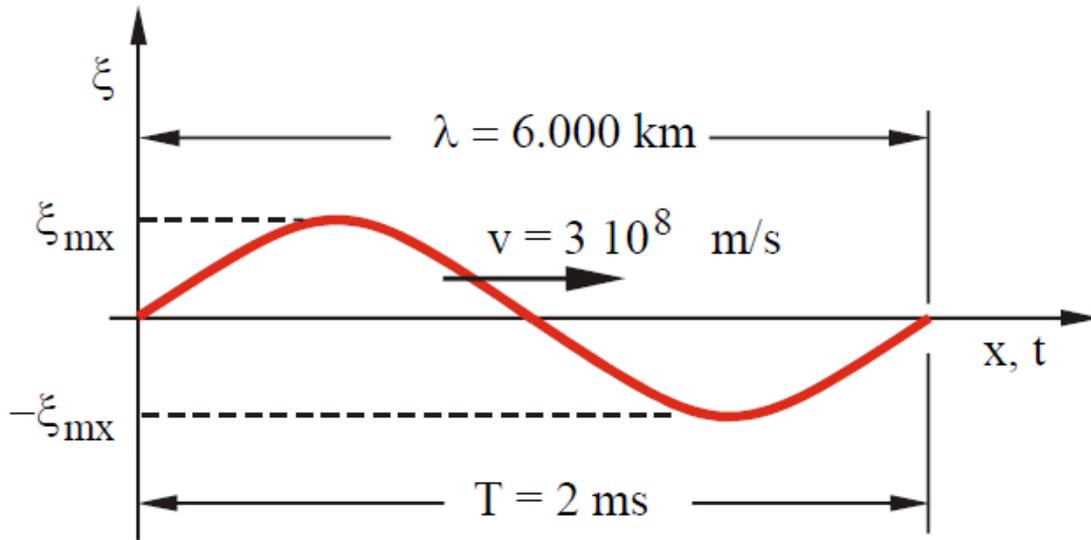
❖ Teoría de circuitos eléctricos

- Constituye una simplificación de las leyes de Maxwell.
- Campos eléctricos industriales: son de variación lenta en el tiempo.
 - + Frecuencia, $f = 50$ Hz (hercio).
 - + Periodo, $T = 1 / f = 20$ ms.
 - + Longitud de onda, $\lambda = c \cdot T = 6.000$ km.



FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Elementos de circuitos lineales



- Consecuencias:

- + Para $\lambda / 20 \leq 300 \text{ km}$:

- La transmisión de señales es **instantánea**.
- Origina circuitos con elementos denominados, de **parámetros concentrados**, que son independientes de la distancia. Es de aplicación la **Teoría de Circuitos Eléctricos**.

- + Para $\lambda / 20 > 300 \text{ km}$:

- La transmisión de señales presenta un cierto **retardo**.
- Origina circuitos con elementos denominados, de **parámetros distribuidos**, que son dependientes de la distancia. Se aplica la **Teoría de Redes Eléctricas**.



2. GENERALIDADES DE LOS CIRCUITOS

✓ Circuito eléctrico

❖ Definición

- “Conjunto de elementos que, interconectados entre si – mediante conductores ideales–, posibilitan el establecimiento de una corriente eléctrica”.

❖ Elementos de los circuitos

- Tipo: elementos de **parámetros concentrados, lineales e invariables con el tiempo**.
- Clasificación general:
 - + Activos o fuentes: generadores y motores.
 - + Pasivos: incluye los disipadores de calor y los almacenadores de energía.

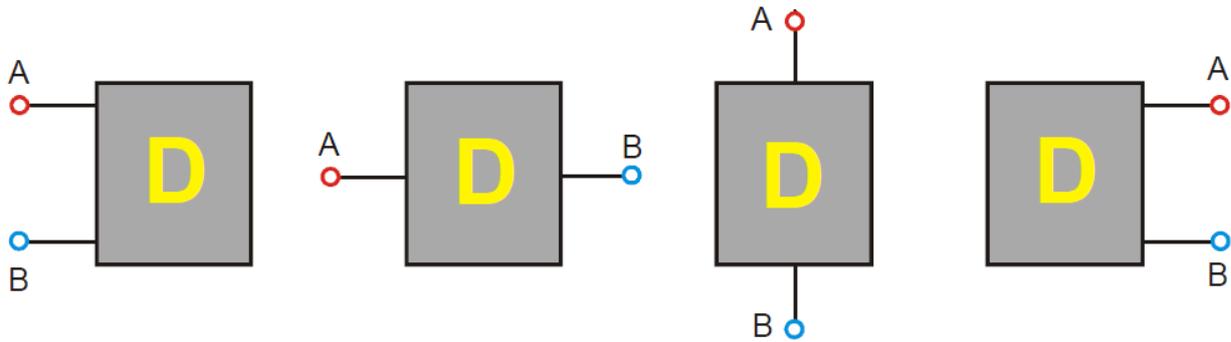
❖ Definiciones de un circuito eléctrico

- En función del **número de terminales**: dipolo, tripolo, cuadripolo, etc.
 - + Desde un circuito complejo, hasta un sólo elemento.
 - + Carácter interno **desconocido**.

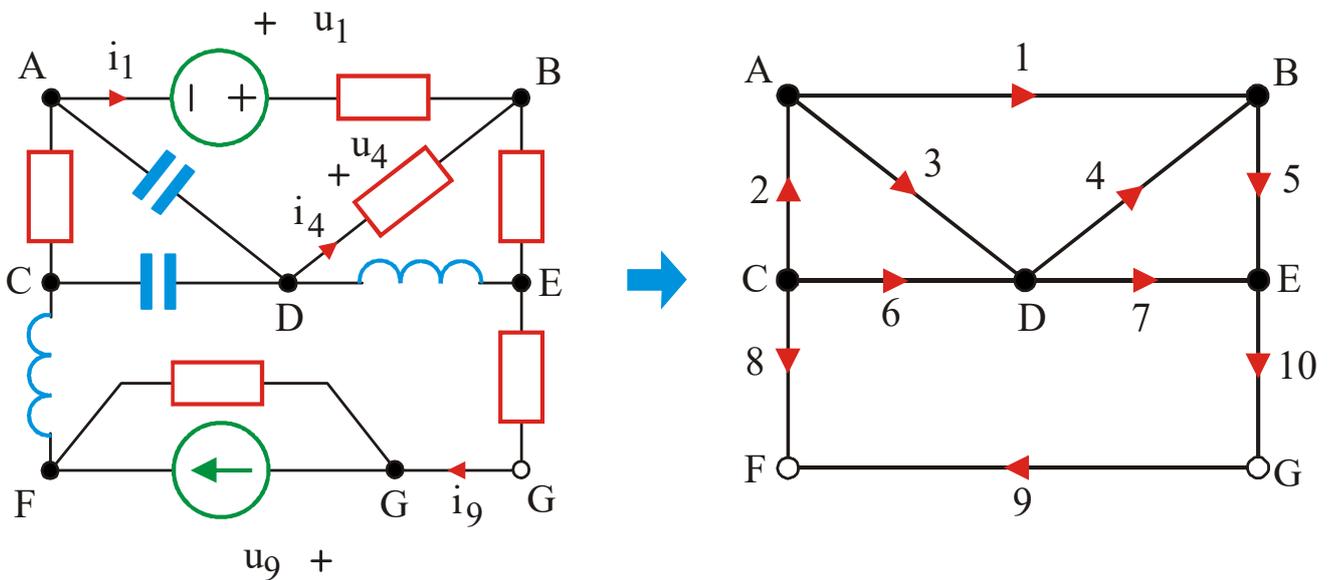


FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Elementos de circuitos lineales



- En función de la **topología** del circuito



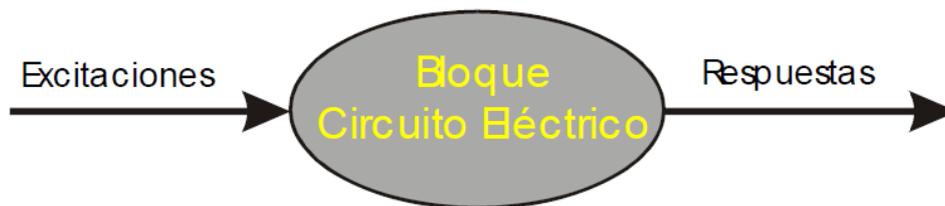
- + **Rama**: segmento o arco, representativo de un elemento o de un conjunto de elementos de red. Necesariamente, sus extremos acaban en nudos (1, 2, 3, ..., 10).
- + **Nudo**: extremo de una rama. En los nudos pueden confluir una, dos, tres, etc. r-ramas (A, B, C, ..., G). Se denomina **nudo principal**, aquél en el que confluyen tres o más ramas y **secundario** en el que confluyen 2 ramas.



FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Elementos de circuitos lineales

- + **Grafo**: estructura gráfica de una red, donde las ramas se representan por segmentos y los nudos por puntos.
- + **Camino**: subconjunto ordenado de ramas. En cada nudo del camino inciden dos ramas, salvo en los nudos extremos (1-5-10, 1-4-7-10, etc.).
- + **Lazo**: camino cerrado (1-5-10-9-8-2, 1-4-3, etc.).
- + **Malla**: lazo que no contiene otro en su interior (2-3-6, 1-3-4, 4-5-7 y 6-7-10-9-8).
- Definiciones generales:



- + **Excitaciones**: las fuentes: corriente continua y corriente alterna sinusoidal.
 - + **Respuestas**: tensiones e intensidades que aparecen en los elementos de la red.
- ❖ Variables utilizadas en los circuitos:
- **Tensión** o diferencia de potencial (d.d.p.). Símbolo: $u = u(t)$.
 - + Unidad de medida: voltio, (V).
 - **Corriente** o intensidad. Símbolo: $i = i(t)$.
 - + Unidad de medida: amperio, (A).



FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

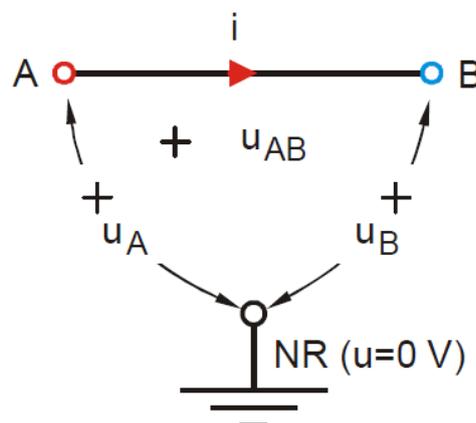
Elementos de circuitos lineales

- **Potencia:** Símbolo: $p = p(t)$.
 - + Unidad de medida: vatio, (W).
- **Energía:** Símbolo: $w = w(t)$.
 - + Unidad de medida: julio, (J).
- **Carga:** Símbolo: $q = q(t)$.
 - + Unidad de medida: culombio, (C).
- **Flujo magnético abrazado, concatenado, ligado o total:** Símbolo: $\psi = \psi(t)$.
 - + Unidad de medida: weber, (Wb)

Nota: los símbolos de las magnitudes, escritas con letras minúsculas, indican que son función del tiempo y, por ello, se las denomina valores instantáneos.

❖ Elementos de un circuito eléctrico y criterio de signos

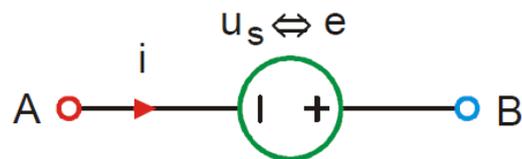
- **Corriente:** desplazamiento de cargas positivas.
 - + NR = nudo de tierra o referencia. Se le asigna tensión o potencial de 0 V.
 - + Consecuencia: si $i > 0 \leftrightarrow u_{AB} = u_A - u_B > 0$.





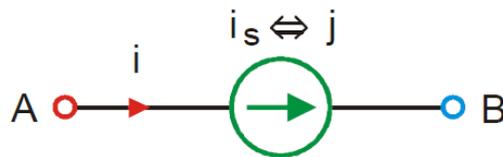
- Fuente ideal de tensión:

- + Donde: e es la tensión de la fuente o f.e.m.
- + Consecuencia: $u_{BA} = e$, para todo i .



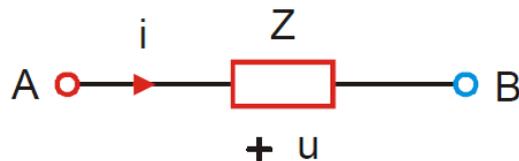
- Fuente ideal de corriente:

- + Donde: j es la corriente de la fuente.
- + Consecuencia: $i = j$, para todo u_{BA} .



- Elemento pasivo:

- + Donde $Z = u / i$ y se denomina “Impedancia”.
- + Consecuencias: si $i > 0 \rightarrow u_A > u_B$ y $u_{AB} = u$.



- ❖ Leyes de los circuitos

- Leyes universales:

- + Relación: corriente–carga:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$



+ Ley de Faraday: tensión inducida

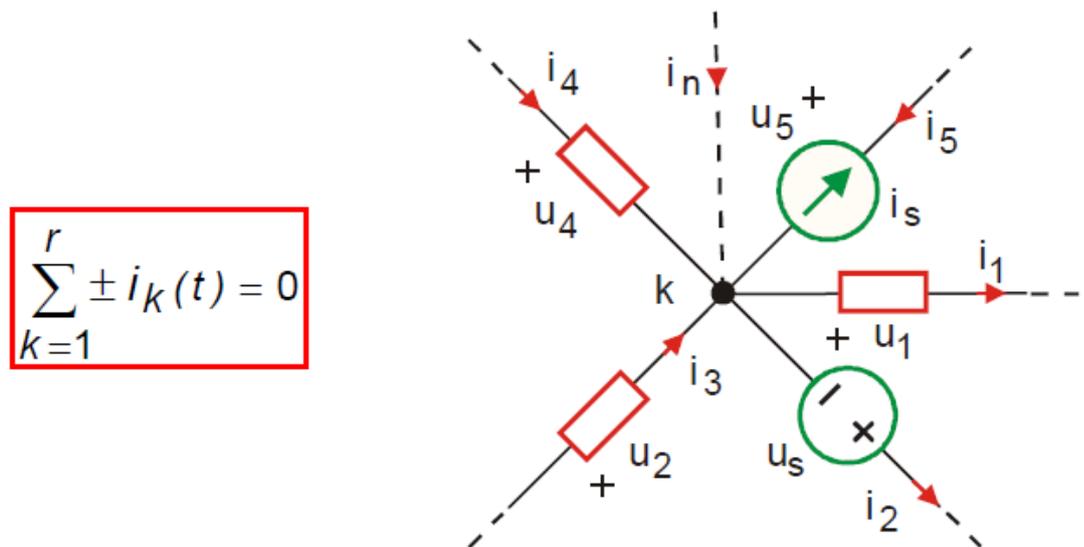
$$u(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}$$

+ Potencia-energía:

$$p(t) = \frac{dw(t)}{dt} = u(t) \cdot i(t)$$

+ Leyes de Gustav R. Kirchhoff (1845)

- Primera ley de Kirchhoff (PLK): “La suma algebraica de las corrientes de rama concurrentes en un nudo es nula”.



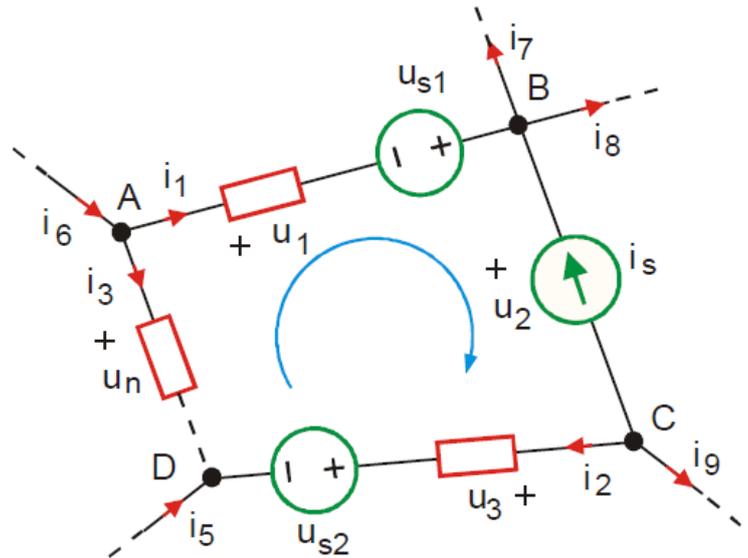
(donde, r = ramas incidentes en el nudo)

Nota: tomar las corrientes entrantes positivas (+) y la salientes negativas (-).



- Segunda ley de Kirchhoff (SLK): “La suma algebraica de tensiones en un lazo cualquiera de una red es igual cero.

$$\sum_{q=1}^r \pm u_q(t) = 0$$



(donde, r = ramas que componen el lazo)

Nota: En el sentido del recorrido, tomar positivas las tensiones - + y negativas las + -.

- + Conservación de la potencia/energía de la red y balance de potencias.

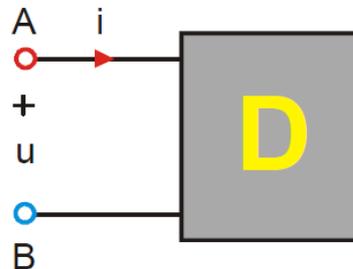
$$\sum_{m=1}^r \pm u_m i_m = 0 \quad \sum_{q-\text{activos}} \pm u_q i_q = \sum_{k-\text{pasivos}} u_k i_k$$

(donde, r = número total de ramas de la red)



❖ Potencia

- **Potencia instantánea:** $p(t) = u(t) \cdot i(t)$



- + La potencia instantánea $p(t)$ es función del tiempo. Puede cambiar de signo a lo largo del tiempo.
- **Potencia media, P:** energía media en un intervalo de tiempo infinito:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{w(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} u(\tau) i(\tau) d\tau$$

- + Define una cantidad que no depende del tiempo
- + Ejemplo: caso de excitaciones/respuestas en c.c.:
 - $u(t) = U = cte.$, $i(t) = I = cte.$

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} U I d\tau = U I = u i = p$$

- Conclusión: **en corriente continua, la potencia media coincide con la potencia instantánea.**
- + Ejemplo: excitaciones/respuestas periódicas:
 - $p(t) = u(t) i(t) = u(t + nT) i(t + nT) = p(t + nT)$
 - Tomando: $\Delta t = nT$, resulta:



FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Elementos de circuitos lineales

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \int_0^{nT} u i d\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{nT} \int_0^T u i d\tau =$$
$$= \frac{1}{T} \int_0^T u i d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T p d\tau$$

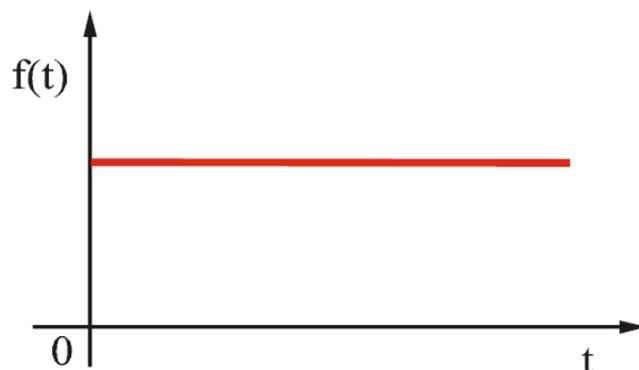
- **Conclusión:** en c.a., la potencia media es la media integral, extendida a un periodo, de la potencia instantánea.



3. FORMAS DE ONDA

✓ Introducción

- Las **excitaciones** y **respuestas** describen distintas formas de onda en función del tiempo.
- Ondas utilizadas en Electrotecnia:
 - + Usuales:
 - Continua (**D.C.**): Tensión e intensidad permanecen constantes a lo largo del tiempo.



- Periódicas (**A.C.**): Alterna sinusoidal
- + Otras:
 - Escalón, pulso, rampa e impulso.

✓ Ondas periódicas. Valores asociados

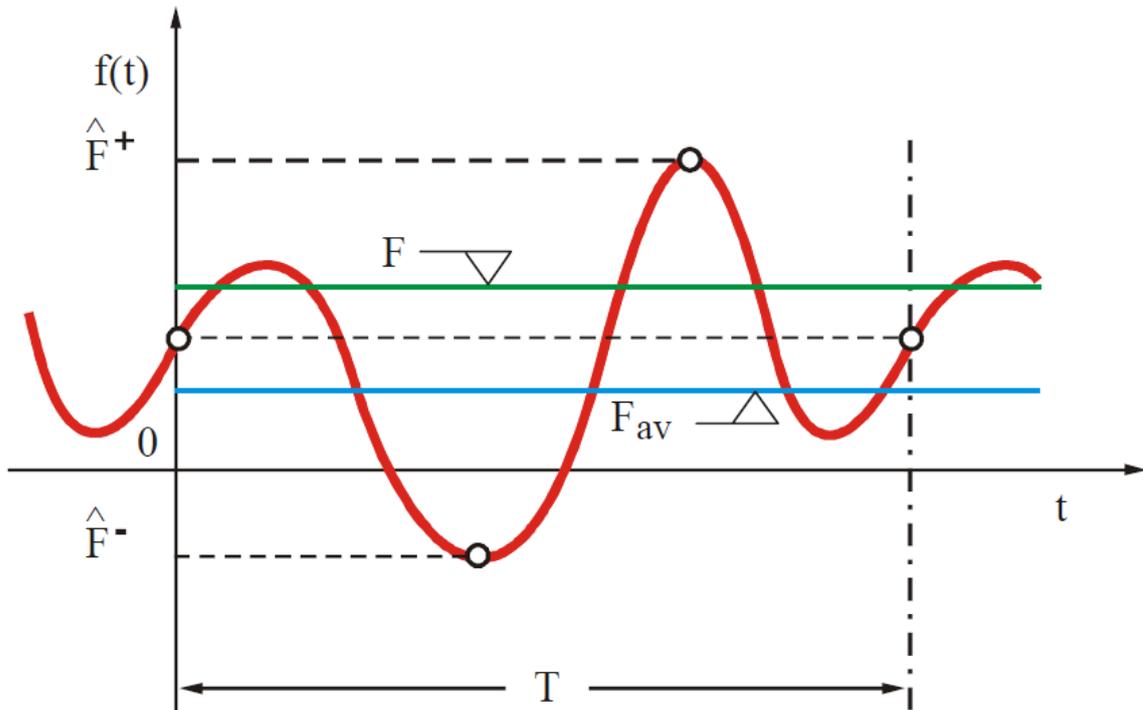
❖ Definición

$$f(t) = f(t \pm hT), h=1, 2, \text{ etc.}$$



$T =$ periodo propio o fundamental.

❖ Ejemplo



❖ Parámetros asociados: identifican más sencilla.

- Valor medio (F_{av}): media integral

$$F_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

- Valor eficaz (F): media cuadrática integral.

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}$$



- Factor de cresta (f_c):

$$f_c = \frac{\hat{F}}{F}$$

- Factor de forma, (f_f):

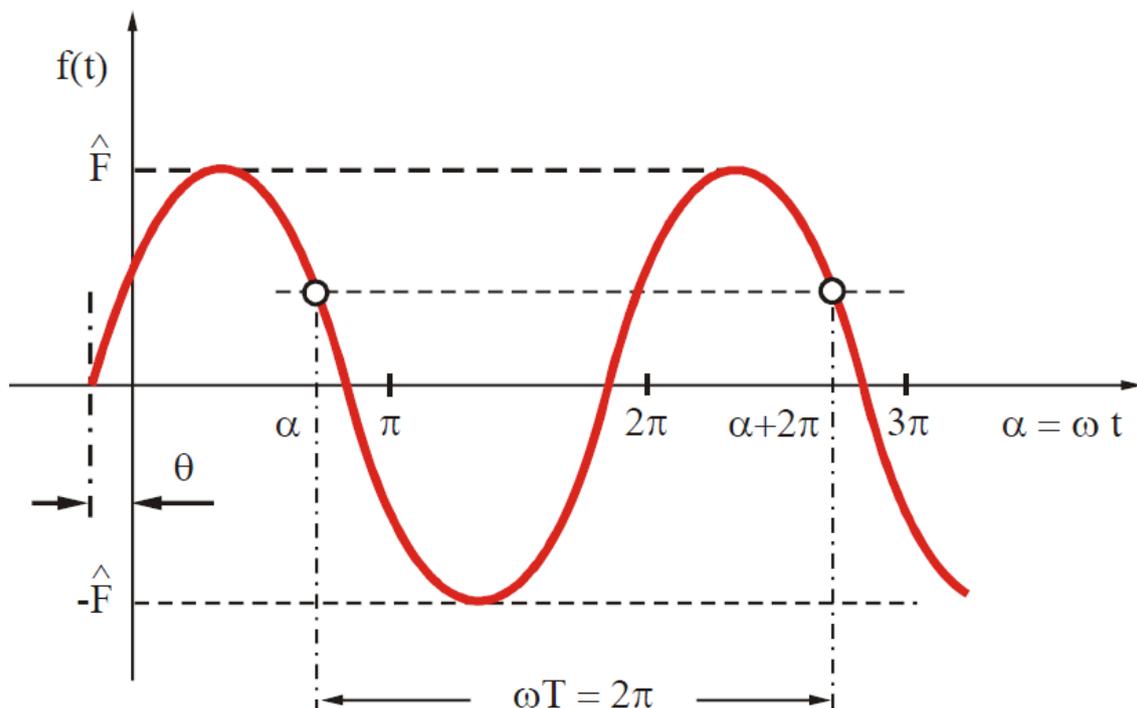
$$f_f = \frac{F}{F_{av}}$$

- Valor de pico a pico (f_{pp}):

$$f_{pp} = \hat{F}^+ - \hat{F}^-$$

✓ Ondas sinusoidales

- Caso particular de funciones periódicas (seno ó coseno).
- Representación gráfica:





FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Elementos de circuitos lineales

- Expresión general: $f(t) = \hat{F} \sin(\omega t + \theta)$
 - + \hat{F} = amplitud, valor máximo o valor de pico.
 - + ω = pulsación o velocidad angular (rad/s).
 - + θ = ángulo de fase inicial ó fase (rad).
- Propiedades
 - + Periodo angular: 2π (rad)
 - + Periodo temporal: T (s), tiempo que tarda la onda en realizar un ciclo completo.
 - + Pulsación: ω (rad/s) $\rightarrow \omega T = 2\pi$.
 - + Frecuencia (Hz = s⁻¹): $f = 1/T$, número de ciclos que realiza la onda 1 segundo.
 - + Pulsación y frecuencia: $\omega = 2\pi f$.
 - + Valor medio (F_{av}): se define para un semiperiodo T/2 s ó π rad.

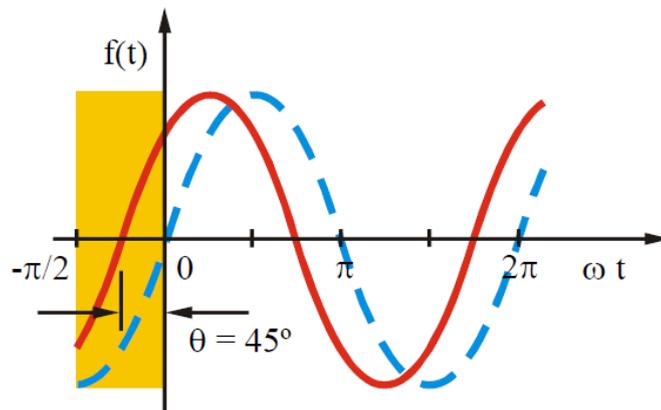
$$F_{av} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \hat{F} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{2}{\pi} \hat{F}$$

- + Valor eficaz (F): se define sobre un periodo T s, ó 2π rad:

$$F = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{F}^2 \sin^2 \alpha \, d\alpha} = \frac{\hat{F}}{\sqrt{2}}$$

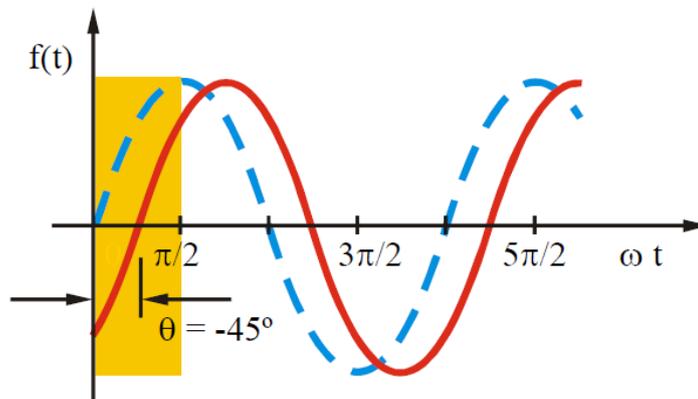


- Sinusoides adelantadas y retrasadas
 - + Respecto de la referencia angular $\omega t = 0$.
 - + Sinusoide adelantada: $0 < \theta \leq \pi/2$



- Máximo adelanto: $f(t) = \hat{F} \sin(\omega t + 90^\circ)$

- + Sinusoide Retrasada: $0 > \theta \geq -\pi/2$



- Máximo retraso: $f(t) = \hat{F} \sin(\omega t - 90^\circ)$

- Función armónica

$$f_h(t) = \hat{F}_h \sin(h \omega t + \theta_h)$$

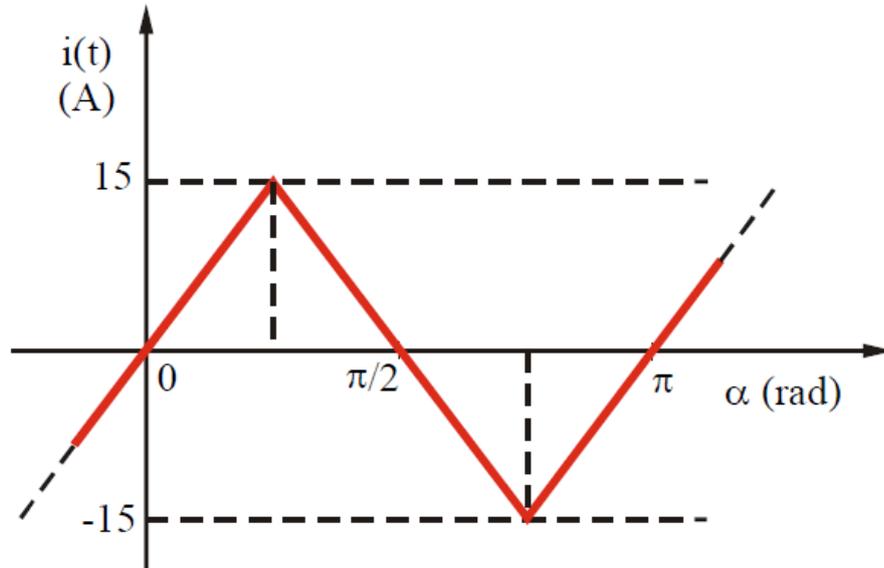
- + $h = 1, 2, \text{ etc.}$
- + $\theta_h = \text{fase del armónico h-ésimo.}$



Ejemplo 1.1.

Calcular los parámetros de las ondas periódicas:

- $u(t) = 380 \sin(120\pi t + \pi/6)$ V.
- Definida gráficamente, según la figura:



❖ Solución:

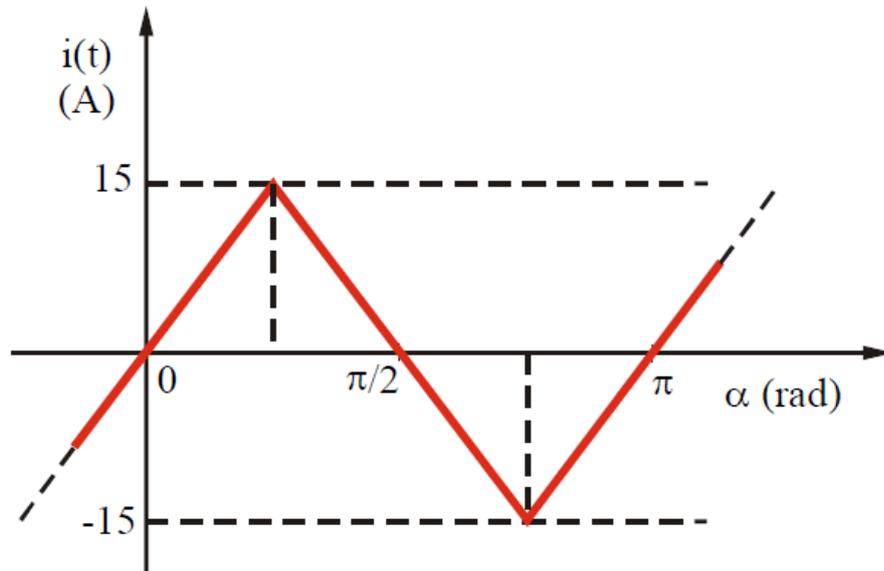
- Apartado a).
 - Pulsación: $\omega = 120\pi$ rad/s.
 - Frecuencia: $f = \omega / 2\pi = 60$ Hz.
 - Periodo: $T = 1 / f = 16,66$ ms.
 - Longitud de onda: $\lambda = c / f = 3 \cdot 10^8 / 60 = 5000$ km.
 - Fase: $\varphi = \pi/6$ rad = 30° .
 - Valor máximo: $\hat{U} = 380$ V.
 - Valor medio: $U_{Av} = 2\hat{U} / \pi = 241,91$ V.
 - Valor eficaz: $U = \hat{U} / \sqrt{2} = 268,70$ V.
 - Factor de cresta: $f_c = \hat{U} / U = \sqrt{2}$.



a.10) Factor de forma: $f_f = U / U_{Av} = 1,11$.

a.11) Valor de pico a pico: $f_{pp} = 2\hat{U} = 760 \text{ V}$.

- Apartado b).



b.1) Pulsación: $\omega T = \pi \rightarrow \omega = \pi/T = \pi \cdot f \text{ rad/s}$.

b.2) Función:

+ Intervalo $(0, \pi/4)$: $i(t) = (60\alpha)/\pi$.

b.3) Valor máximo: $\hat{I} = 15 \text{ A}$.

b.4) Valor medio:

+ En el periodo es nulo.

+ En el semiperiodo:

$$I_{av} = \frac{1}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} i(\alpha) d\alpha$$

+ Dada la simetría de la onda



FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Elementos de circuitos lineales

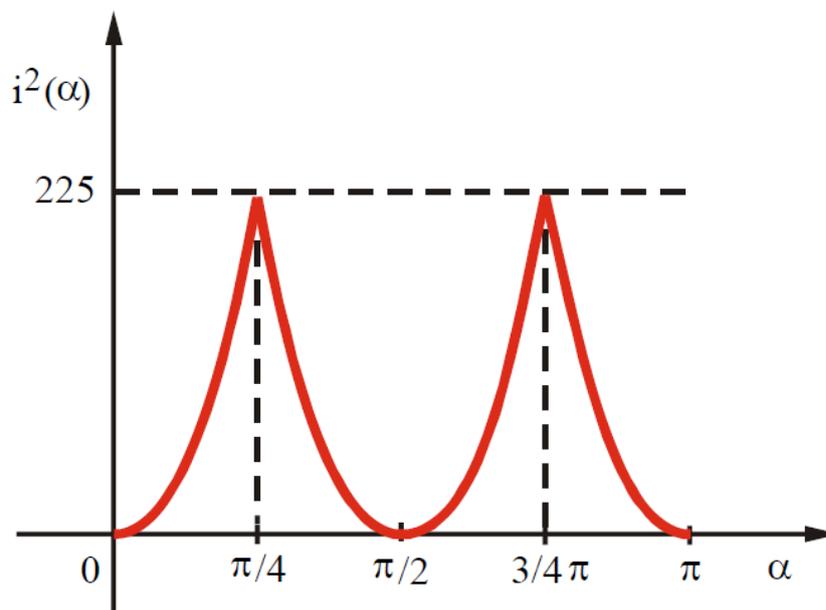
$$I_{av} = \frac{1}{\pi/2} \left(2 \int_0^{\pi/4} \frac{60}{\pi} \alpha d\alpha \right) = \frac{240}{\pi^2} \left(\frac{\alpha^2}{2} \right)_0^{\pi/4} = 7,5 A$$

b.5) Valor eficaz:

$$I^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} i^2(\alpha) d\alpha$$

+ Función intensidad al cuadrado: intervalo $(0, \pi/4)$:

$$i^2(\alpha) = \frac{3.600}{\pi^2} \alpha^2$$



+ Dada la simetría de la onda



$$I^2 = \frac{1}{\pi} 4 \int_0^{\pi/4} \frac{3.600}{\pi^2} \alpha^2 d\alpha = \frac{14.400}{\pi^3} \left(\frac{\alpha^3}{3} \right)_0^{\pi/4} = 75 A^2$$

$$I = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} A.$$

b.6) Factor de cresta: $f_c = \hat{I} / I = 15 / (5\sqrt{3}) = \sqrt{3}$.

b.7) Factor de forma: $f_f = I / I_{Av} = 5\sqrt{3} / (15/2) = 2/\sqrt{3}$.

b.8) Valor de pico a pico: $f_{pp} = 15 - (-15) = 30 A$.

Ejemplo 1.2.

La placa de características de un receptor doméstico, señala: “230 V - 50 Hz”. ¿Qué representan?

❖ Solución:

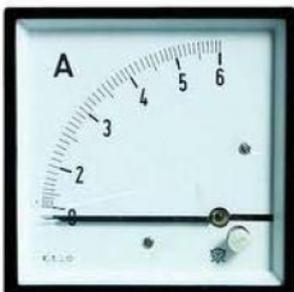
- Deberá conectarse a una red monofásica de A.C. y:
- 50 Hz de frecuencia y,
- 230 V de tensión eficaz.
- De este modo su expresión temporal, o valor instantáneo, es: $u(t) = 230\sqrt{2} \cdot \sin(2\pi 50t) V$.
- Sus valores, máximo y medio, valen:
 - + $\hat{U} = \sqrt{2}U = 230\sqrt{2} V$.
 - + $U_{Av} = 2\hat{U} / \pi = 460\sqrt{2} / \pi V$.



4. APARATOS DE MEDIDA

✓ Introducción

La electricidad no es evaluable por ningún sentido humano, por ello son necesarios aparatos de medida que cuantifiquen las variables eléctricas: **corriente**, **tensión**, y **potencia**.





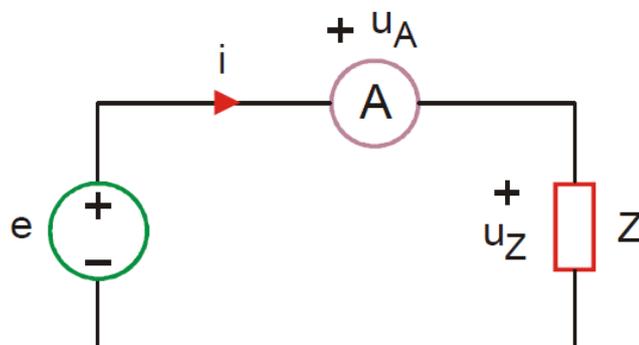
✓ Amperímetro y Voltímetro: símbolo, modelado, conexión y lectura

❖ Amperímetro

- Medidor de la intensidad de la corriente eléctrica.
- Símbolo:



- Modelo eléctrico ideal:
 - + Bobina de hilo de gran sección y pequeña longitud.
 - + Resistencia nula, $R_A \rightarrow 0$ y $u_{AB} = 0$ (cortocircuito).
- Conexión:
 - + En **serie** con la carga o la fuente.

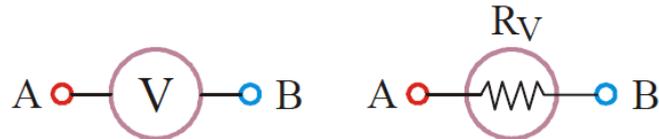


- Lectura de A = valor medio o **eficaz**.

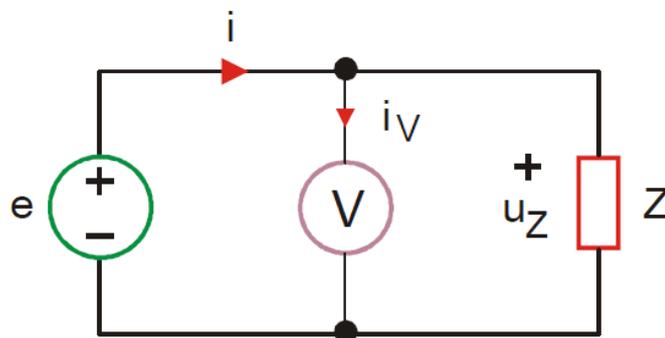


❖ Voltímetro

- Medidor de la tensión o diferencia de potencial.
- Símbolo:



- Modelo eléctrico ideal:
 - + Bobina de hilo de bobina de pequeña sección y gran longitud.
 - + Impedancia infinita, $R_V \rightarrow \infty$ e $i_V = 0$ (circuito abierto).
- Conexión:
 - + En **paralelo** con la carga o la fuente.



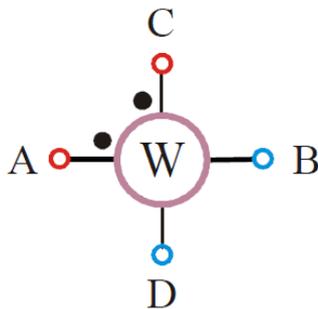
- Lectura de V = valor medio o **eficaz**.



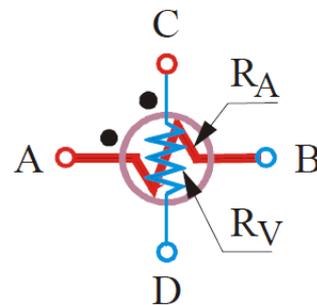
✓ Vatímetro: símbolo, modelado, conexión y lectura

- Medidor de la potencia media, P .

- Símbolo:



- Modelo eléctrico ideal

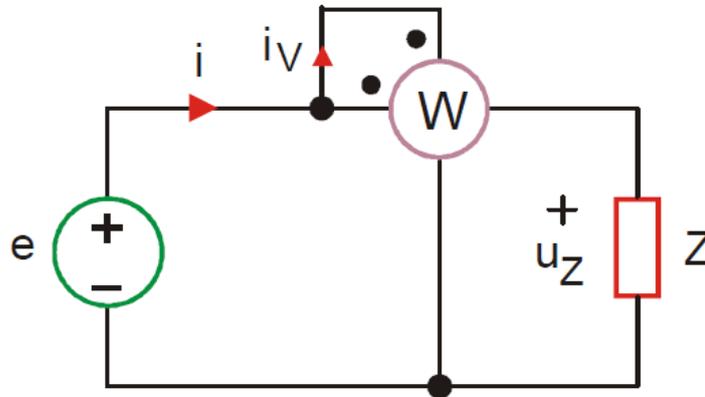


- + Bobina amperimétrica (A-B) de gran sección y pequeña longitud, $R_A \approx 0$ (cortocircuito).
- + Bobina voltimétrica (C-D) de pequeña sección y gran longitud, $R_V \rightarrow \infty$ (circuito abierto).
- + Hipótesis medidor ideal:
 - $R_V \rightarrow \infty$ e $i_V \rightarrow 0$
 - $R_A \rightarrow 0$ y $u_{AB} \rightarrow 0$.
- Conexión para la medida:
 - + Bobina amperimétrica:
 - Conectada en **serie** con la carga o fuente.
 - + Bobina voltimétrica:
 - Conectada en **paralelo** con la carga o fuente.



FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Elementos de circuitos lineales



- Lecturas de W: valor **medio**.

- + Lectura en **corriente continua (D.C.)**:

$$\text{Lectura } W = E I = U_Z I = P_E = P_Z$$

- + Lectura **corriente alterna (A.C.)**:

$$\text{Lectura } W = \frac{1}{T} \int_0^T p_E d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T e i d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T u_Z i d\tau = P_E = P_Z$$

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-



5. ELEMENTOS PASIVOS DE DOS TERMINALES

✓ Elementos pasivos ideales

❖ Introducción

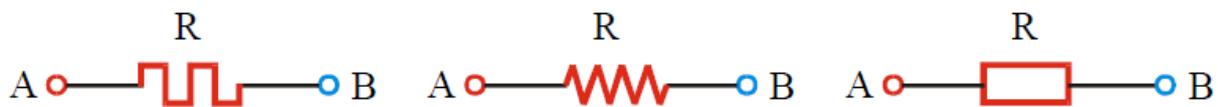
- Características:
 - + **Parámetros concentrados** (independientes de la distancia).
 - + **Lineales** (la forma de la onda de excitación es igual a la forma de la respuesta).
 - + **Invariables con el tiempo** (no son función del tiempo).
 - + **Bilaterales** (idénticas propiedades al intercambiar sus terminales).
- Tipos:
 - + Resistencias.
 - + Bobinas (inductancias).
 - + Condensadores (capacidades).

❖ Resistencia

- Construcción: arrollamiento resistivo de N espiras, o trozos de materiales resistivos.
- Función: transforma la energía eléctrica en calor.



- Parámetros que la definen:
 - + Resistencia, **R** (unidad: ohmio, Ω).
 - Conductancia **G**=1/R, (unidad: siemens, $S = \Omega^{-1}$).
 - + Potencia -media- máxima, **P_{máx.}**
- Símbolos:



- Ecuación de la resistencia (Ley de Ohm, 1827):

$$u(t) = R \cdot i(t) \text{ e } i(t) = G \cdot u(t)$$

- Potencia instantánea

$$p_R(t) = u i = R i^2 = \frac{u^2}{R} = G u^2$$

- Potencia media, **P_R**

$$P_R = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{R}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} i^2(\tau) d\tau$$

- + Corriente continua (D.C.): U e I son los **valores de continua**.

$$P_R = U \cdot I = R \cdot I^2$$

- + Corriente alterna (A.C.): U e I, son los **valores eficaces** de sus respectivas sinusoides.

$$P_R = U \cdot I = R \cdot I^2$$



- Fórmula de resistencia de conductor filiforme:

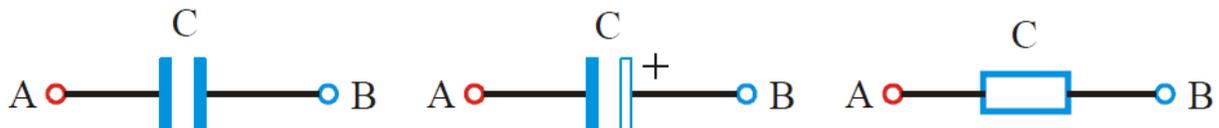
$$R = \rho \frac{l}{A} = \frac{l}{\sigma A}$$

- ρ = resistividad ($\Omega \text{ m}$, práctica $\Omega \text{ mm}^2/\text{m}$).
- σ = conductividad (práctica $\text{m}/\Omega \text{ mm}^2$).
- l = longitud (m).
- A = sección (m^2 , práctica mm^2).

❖ Condensador

- Construcción: placas conductoras separadas por un dieléctrico o aislante.
- Función: almacenar energía en forma de **campo eléctrico**.
- Parámetros que lo definen:
 - + Capacidad, **C** (unidad: faradio, F).
 - + Tensión máxima, **$U_{\text{máx}}$** (unidad: voltio, V).

- Símbolos:



- Ecuaciones:

$$q(t) = C \cdot u(t)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$$



- Consecuencias:

- + Generalmente, la tensión en bornes de un condensador es una **función continua**.
- + En régimen permanente de corriente continua, $u(t) = U = \text{cte.} \rightarrow i = 0$ (**circuito abierto**).

- Potencia instantánea:

$$p_c(t) = ui = \frac{q}{C} \frac{dq}{dt}$$

- Energía de un condensador en un instante t :

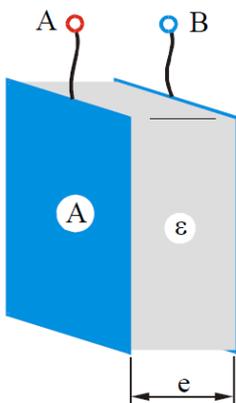
$$W_c(t_0, t) = \int_0^t p_c(t) dt = \int_0^t \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} dt = \frac{1}{2C} q^2 =$$

$$w_c(t) = \frac{1}{2} C u^2(t)$$

- Potencia media, P_C :

$$P_C = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W(0, t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left[\frac{1}{2} C U^2 \right] = 0$$

- Fórmula de condensador plano:



$$C = \frac{\varepsilon A}{e}$$

C = capacidad (F).

ε = permitividad dieléctrica (F/m).

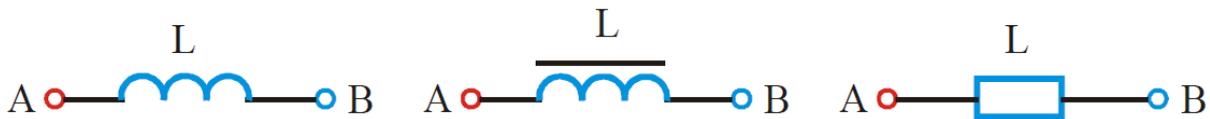
A = superficie (m^2)

e = espesor dieléctrico (m).



❖ Bobina

- Construcción: arrollamiento conductor de N espiras sobre núcleo magnético.
- Función: almacenador de energía en forma de **campo magnético**.
- Parámetros que la definen:
 - + Inductancia o coef. de autoinducción, L (henrio, H).
 - + Corriente máxima, $I_{\text{máx.}}$ (unidad: amperio, A).
- Símbolos:



- Ecuaciones:

$$\Psi(t) = L \cdot i(t)$$

$$u = \frac{d\psi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

- Consecuencias
 - + En una bobina, generalmente, la corriente es una **función continua**.
 - + En régimen permanente de corriente continua, $i = I = \text{cte.} \rightarrow u = 0$ (**cortocircuito**).



- Potencia instantánea

$$p_L(t) = ui = \frac{d\Psi}{dt} \frac{\Psi}{L}$$

- Energía en un intervalo

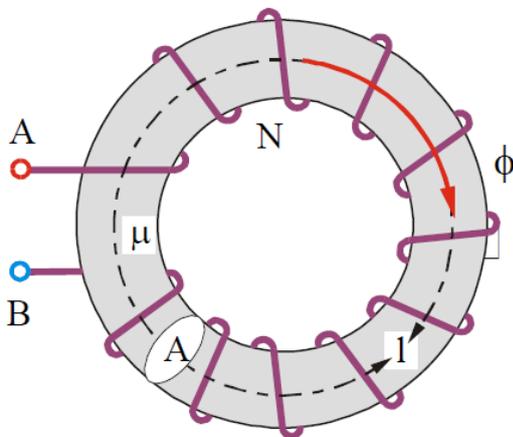
$$W_L(t_0, t) = \int_0^t p_L(t) dt = \int_0^t \frac{\Psi}{L} \frac{d\Psi}{dt} dt = \frac{1}{2L} \Psi^2 =$$

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i(t)^2$$

- Potencia media, P_L :

$$P_L = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W(0, t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left[\frac{1}{2} LI^2 \right] = 0$$

- Fórmula de bobina toroidal o solenoide largo:



$$L = \frac{\mu N^2 A}{l}$$

L = inductancia (H).

M = permeabilidad toro (H/m).

N = número de espiras.

A = sección del toro (m²).

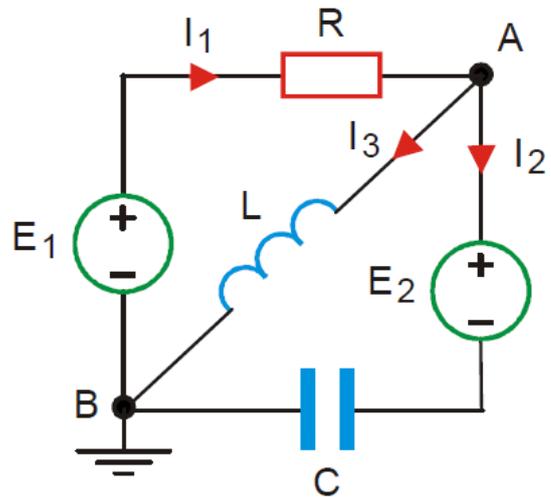
l = longitud media del toro (m).



Ejemplo 1.3.

La red de corriente continua de la figura, se encuentra en régimen permanente. Determinar:

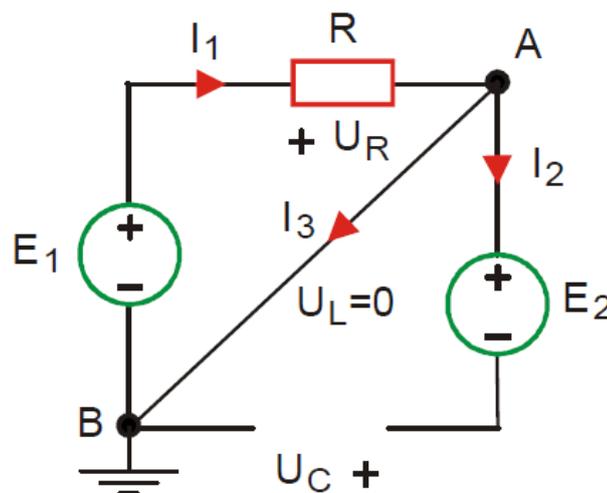
- Las corrientes de rama.
- Las potencias generadas por las fuentes.
- La potencia disipada por la resistencia.
- El flujo y la energía de la bobina.
- La carga y energía del condensador.
- El balance de potencias de la red.



❖ **Solución:**

a) Corrientes de rama.

+ Circuito equivalente en régimen permanente de c.c.



+ Análisis de la red:



FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Elementos de circuitos lineales

$$I_2 = 0 \text{ A} , \quad U_L = 0 \text{ V} , \quad U_A = 0 \text{ V} , \quad U_C = -E_2 \text{ V} , \\ I_1 = I_3 = \frac{E_1}{R} \text{ A} .$$

b) Potencias generadas por las fuentes.

$$P_{E_1} = E_1 I_1 = \frac{E_1^2}{R} \text{ W} , \quad P_{E_2} = E_2 (-I_2) = 0 \text{ W} .$$

c) Potencia disipada por la resistencia.

$$P_R = R I_1^2 = \frac{E_1^2}{R} \text{ W} .$$

d) Flujo y energía de la bobina.

$$\Psi_L = L I_3 = \frac{L E_1}{R} \text{ Wb} , \quad W_L = \frac{1}{2} L I_3^2 = \frac{L E_1^2}{2 R^2} \text{ J} .$$

e) Carga y energía del condensador.

$$q_c = C U_c = -C E_2 \text{ C} , \quad W_C = \frac{1}{2} C U_C^2 = \frac{C E_2^2}{2} \text{ J} .$$

f) Balance de potencias de la red.

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{activos}} &= P_{E_1} + P_{E_2} = \frac{E_1^2}{R} \text{ W} \\ P_{\text{pasivos}} &= R I_1^2 = \frac{E_1^2}{R} \text{ W} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P_{\text{activos}} = P_{\text{pasivos}}$$





6. ASOCIACIÓN DE ELEMENTOS PASIVOS

✓ Introducción

- Sustitución de un conjunto de elementos por uno solo – equivalente–, tal que, presente la misma ecuación u-i que el conjunto.

✓ Immitancia operacional de los elementos pasivos

❖ Introducción

- Contracción de los términos impedancia y admitancia.
- Se necesita una ecuación que nos relacione la $u(t)$ y la $i(t)$ de los tres elementos pasivos: resistencias, bobinas y condensadores. Para ellos se utilizará el **operador de Heaviside**.

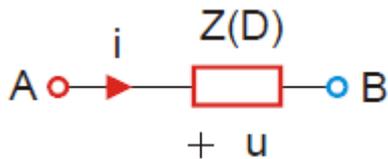
❖ Operador de Heaviside D:

$$D \equiv \frac{d(\bullet)}{dt} \quad ; \quad \frac{1}{D} \equiv \int_{-\infty}^t (\bullet) dt$$



❖ Impedancia $Z(D)$

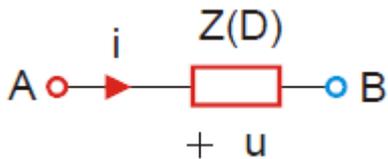
- Definición:



$$u = Z(D) i$$
$$Z(D) = \frac{u}{i}$$

- Aplicación a los elementos pasivos:

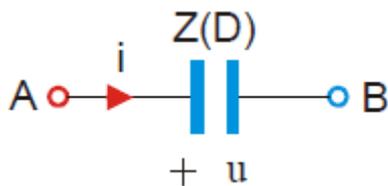
+ Resistencia:



$$u = R i$$

$$Z(D) = R$$

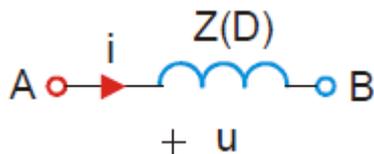
+ Condensador:



$$i_c = C \frac{du}{dt} \rightarrow u_c = \frac{1}{C} \int i_c dt = \frac{i_c}{CD}$$

$$Z(D) = \frac{1}{CD}$$

+ Bobina:



$$U_L = L \frac{di}{dt} = LDi$$

$$Z(D) = LD$$

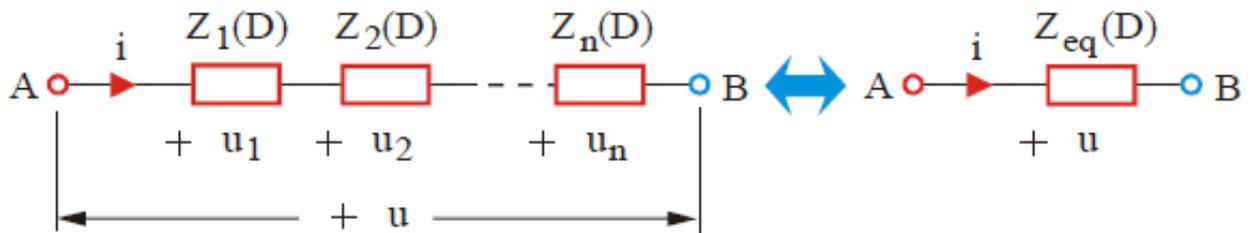
Admitancia $Y(D)$

- Definición: $Y(D) = \frac{1}{Z(D)}$



✓ Asociación serie o divisor de tensión

❖ • Esquemas



❖ Aplicando la SLK y la equivalencia de redes

$$u = \sum_{k=1}^n u_k = Z_1 i + Z_2 i + \dots + Z_n i = \Leftrightarrow u = Z_{eq} i \\ = (Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n) i$$

- Identificando ambos miembros,

$$Z_{eq} = \sum_{k=1}^n Z_k = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

❖ Regla del divisor de tensión

$$i = cte. \Rightarrow \frac{u_k}{Z_k} = \frac{u}{Z_{eq}} = cte. \Rightarrow \frac{u_1}{Z_1} = \frac{u_2}{Z_2} = \dots = \frac{u}{Z_{eq}}$$



❖ Casos particulares:

- Resistencias: $Z(D) = R$

$$R_{eq} = \sum_{k=1}^n R_k = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

- Bobinas: $Z(D) = L D$

$$L_{eq} = \sum_{k=1}^n L_k = L_1 + L_2 + \dots + L_n$$

- Condensador: $Z(D) = 1/CD$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

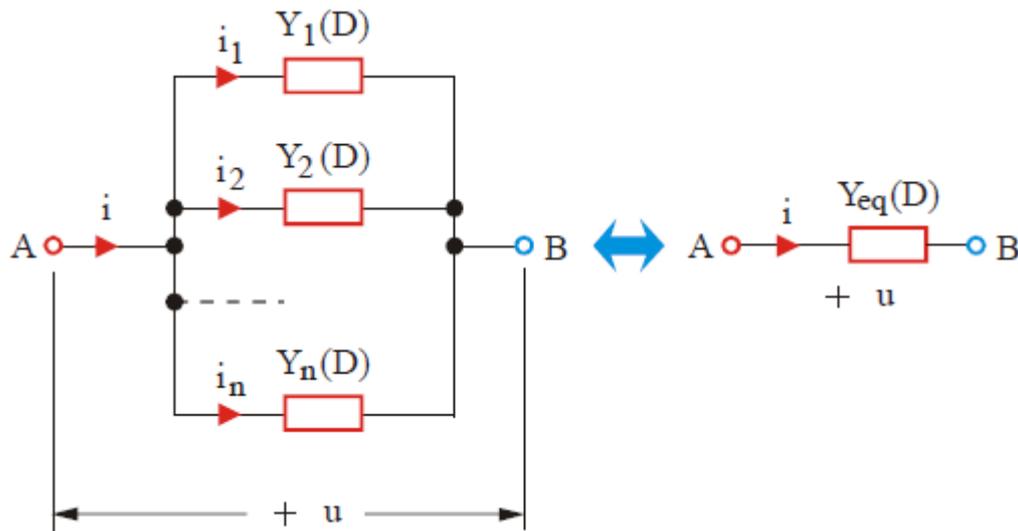
- Dos condensadores (**producto entre la suma**):

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$



✓ Asociación en derivación o divisor de corriente

❖ Esquemas



❖ Aplicando la PLK y la equivalencia de redes.

$$i = \sum_{k=1}^n i_k = \frac{u}{Z_1} + \frac{u}{Z_2} + \dots + \frac{u_n}{Z_n} = \Leftrightarrow i = \frac{u}{Z_{eq}}$$
$$= \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n} \right) u$$

- Identificando ambos miembros,

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{Z_k} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n}$$

❖ Regla del divisor de corriente

$$u = \text{cte.} \rightarrow i_k Z_k = i_{eq} Z_{eq} = \text{cte.} \rightarrow i_1 Z_1 = i_2 Z_2 = \dots = i_{eq} Z_{eq}$$



❖ Casos particulares

- Resistencias:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

- Dos resistencias (**producto entre la suma**):

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

- Bobinas:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}$$

- Dos bobinas (**producto entre la suma**):

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

- Condensadores:

$$C_{eq} = \sum_{k=1}^n C_k = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$



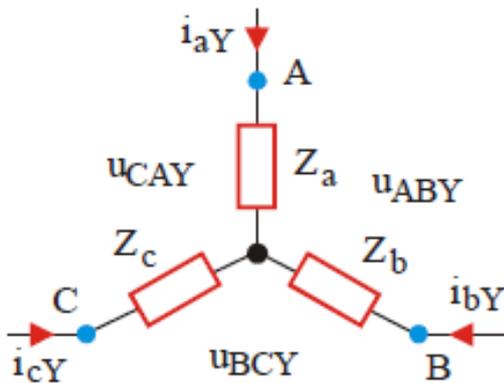
✓ Transformación de triángulo (Δ) a estrella (λ) y viceversa ($\lambda \rightarrow \Delta$)

❖ Introducción

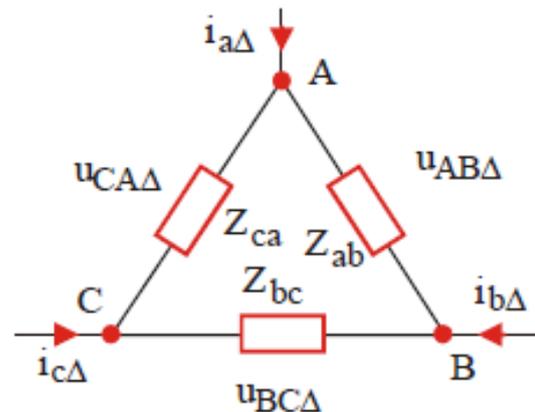
- Útil en ciertas transformaciones de redes pasivas.

❖ Esquemas de las conexiones

- Conexión estrella



- Conexión triángulo



❖ Principio de la transformación de impedancias

- Principio de equivalencia de ambas redes:

$$\begin{cases} i_{aY} = i_{a\Delta} \\ i_{bY} = i_{b\Delta} \\ i_{cY} = i_{c\Delta} \end{cases} ; \begin{cases} u_{ABY} = u_{AB\Delta} \\ u_{BCY} = u_{BC\Delta} \\ u_{CAY} = u_{CA\Delta} \end{cases}$$



- Transformación triángulo a estrella

$$Z_a = \frac{Z_{ab} Z_{ca}}{\sum Z_{\Delta}} , \quad Z_b = \frac{Z_{ab} Z_{bc}}{\sum Z_{\Delta}} , \quad Z_c = \frac{Z_{bc} Z_{ca}}{\sum Z_{\Delta}}$$

donde, $\sum Z_{\Delta} = Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}$.

- Transformación estrella a triángulo

$$Z_{ab} = \frac{\sum Z_i Z_j}{Z_c} , \quad Z_{bc} = \frac{\sum Z_i Z_j}{Z_a} , \quad Z_{ca} = \frac{\sum Z_i Z_j}{Z_b}$$

donde, $\sum Z_i Z_j = Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a$

❖ Casos particulares: impedancias idénticas

- Tres impedancias de idéntico valor:

$$Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ca} = Z_{\Delta}$$

$$Z_Y = \frac{Z_{\Delta} Z_{\Delta}}{Z_{\Delta} + Z_{\Delta} + Z_{\Delta}} = \frac{Z_{\Delta} Z_{\Delta}}{3Z_{\Delta}} = \frac{Z_{\Delta}}{3}$$

$$Z_Y = \frac{Z_{\Delta}}{3} , \quad Z_{\Delta} = 3Z_Y$$

- + Resistencias: $Z(D) = R$

$$R_Y = \frac{R_{\Delta}}{3} , \quad R_{\Delta} = 3R_Y$$



FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Elementos de circuitos lineales

+ Bobinas: $Z(D) = LD$

$$L_Y = \frac{L_\Delta}{3} \quad , \quad L_\Delta = 3L_Y$$

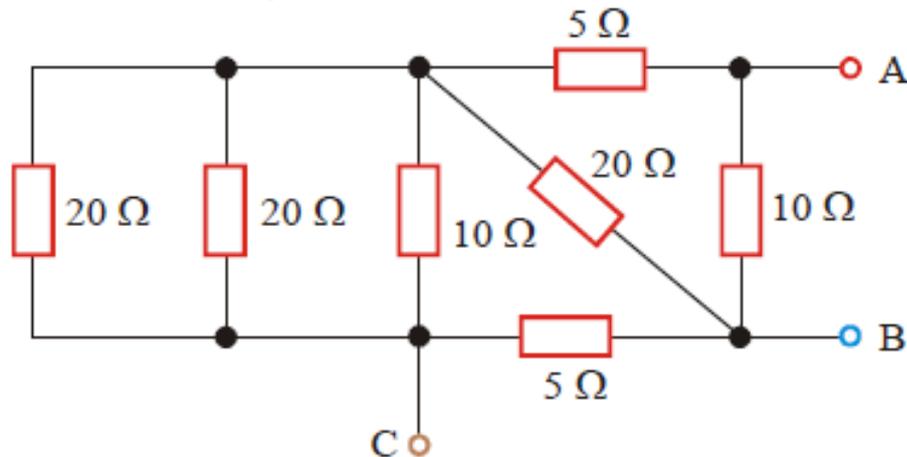
+ Condensadores: $Z(D) = 1/CD$

$$C_Y = 3C_\Delta \quad , \quad C_\Delta = \frac{C_Y}{3}$$



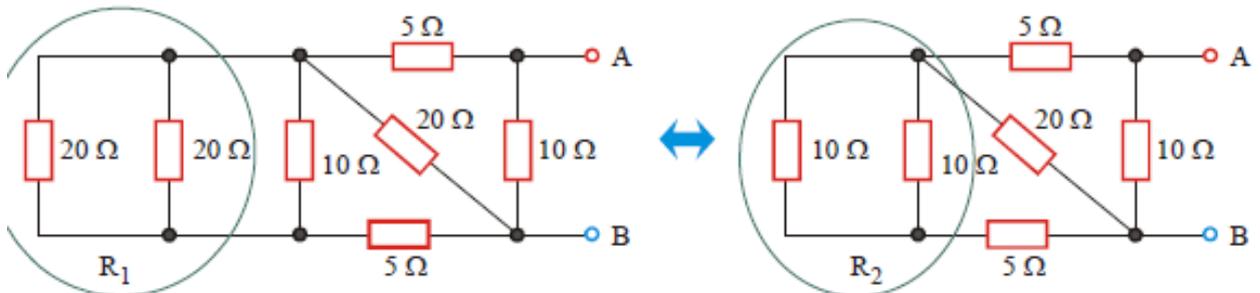
Ejemplo 1.4.

Sobre la red resistiva de la figura determinar, sucesivamente, la resistencia equivalente entre los terminales A-B, B-C y A-C.

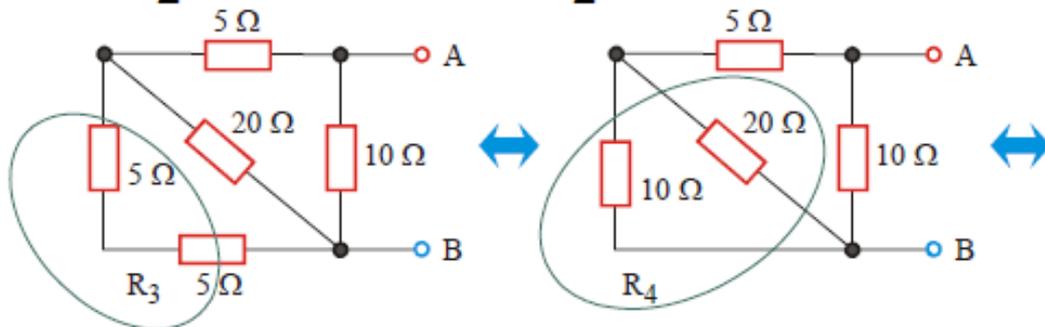


❖ Solución

- Cálculo de $R_{eq,AB}$:



$$+ R_1 = \frac{20}{2} = 10 \Omega \quad , \quad R_2 = \frac{10}{2} = 5 \Omega$$

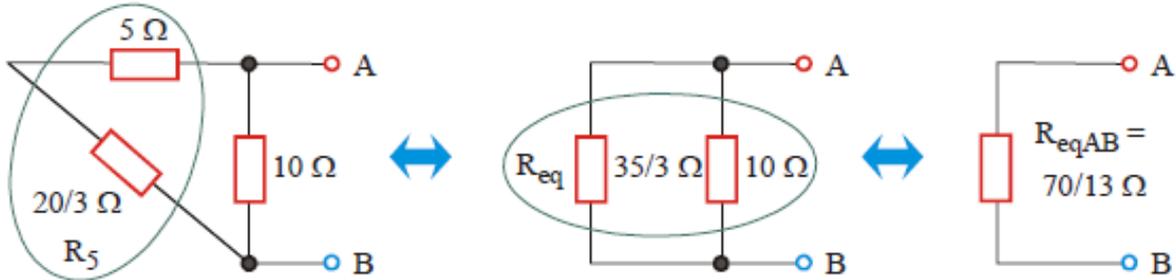




FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Elementos de circuitos lineales

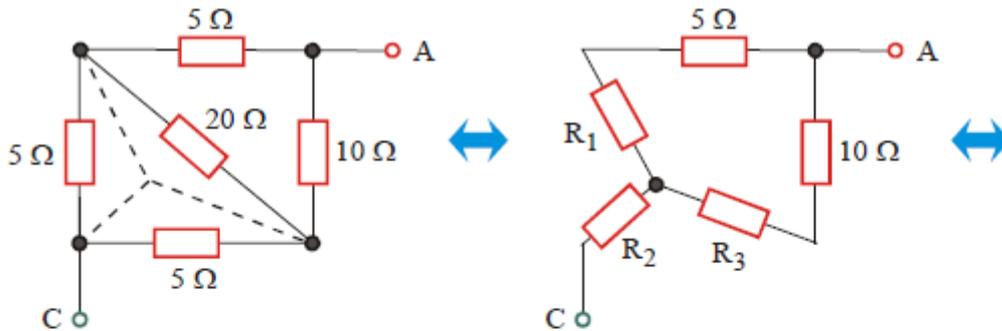
$$+ R_3 = 5 + 5 = 10 \, \Omega \quad , \quad R_4 = \frac{10 \cdot 20}{10 + 20} = \frac{20}{3} \, \Omega$$



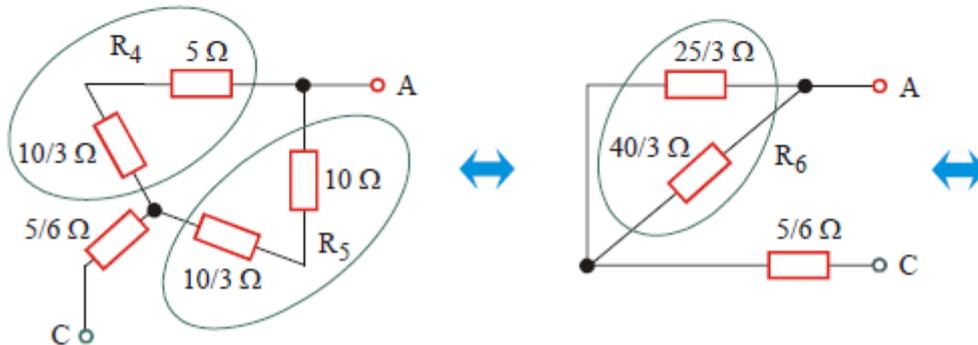
$$+ R_5 = \frac{20}{3} + 5 = \frac{35}{3} \, \Omega \quad ,$$

$$R_{eqAB} = \frac{\frac{35}{3} \cdot 10}{\frac{35}{3} + 10} = \frac{70}{13} \, \Omega$$

- Cálculo de $R_{eq,AC}$:



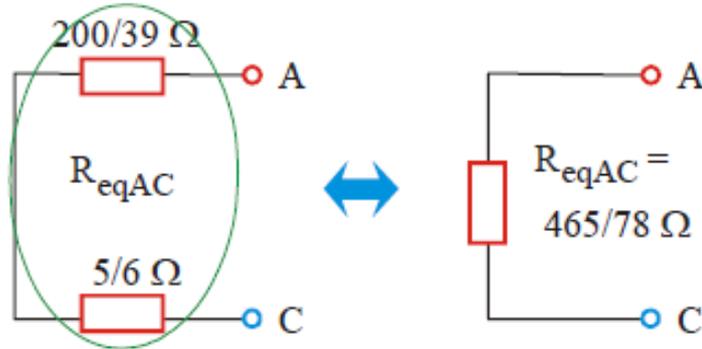
$$+ R_1 = \frac{5 \cdot 20}{30} = \frac{10}{3} \, \Omega, \quad R_2 = \frac{5 \cdot 5}{30} = \frac{5}{6} \, \Omega, \quad R_3 = \frac{5 \cdot 20}{30} = \frac{10}{3} \, \Omega$$





FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
Elementos de circuitos lineales

$$+ R_4 = \frac{10}{3} + 5 = \frac{25}{3} \Omega, \quad R_5 = \frac{10}{3} + 10 = \frac{40}{3} \Omega$$



$$+ R_6 = \frac{\frac{25}{3} \cdot \frac{40}{3}}{\frac{25}{3} + \frac{40}{3}} = \frac{200}{39} \Omega, \quad R_{eqAC} = \frac{200}{39} + \frac{5}{6} = \frac{465}{78} \Omega$$

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-



7. ELEMENTOS ACTIVOS DE DOS TERMINALES

✓ Introducción

❖ Generalidades

- En general, transforman cualquier tipo de energía en energía eléctrica:
 - + Química: pilas y baterías.
 - + Mecánica: dinamos, alternadores.
 - + Solar: células fotovoltaicas.
- Tipos
 - + Fuentes de tensión.
 - + Fuentes de corriente o intensidad.
- Regímenes de funcionamiento
 - + Generador.
 - + Motor.
- Clases
 - + Ideales.
 - + Reales: batería, alternador, motor, etc.

Nota: En lo que sigue, las fuentes serán máquinas rotativas excitadas en D.C. y con sólo pérdidas por efecto Joule.

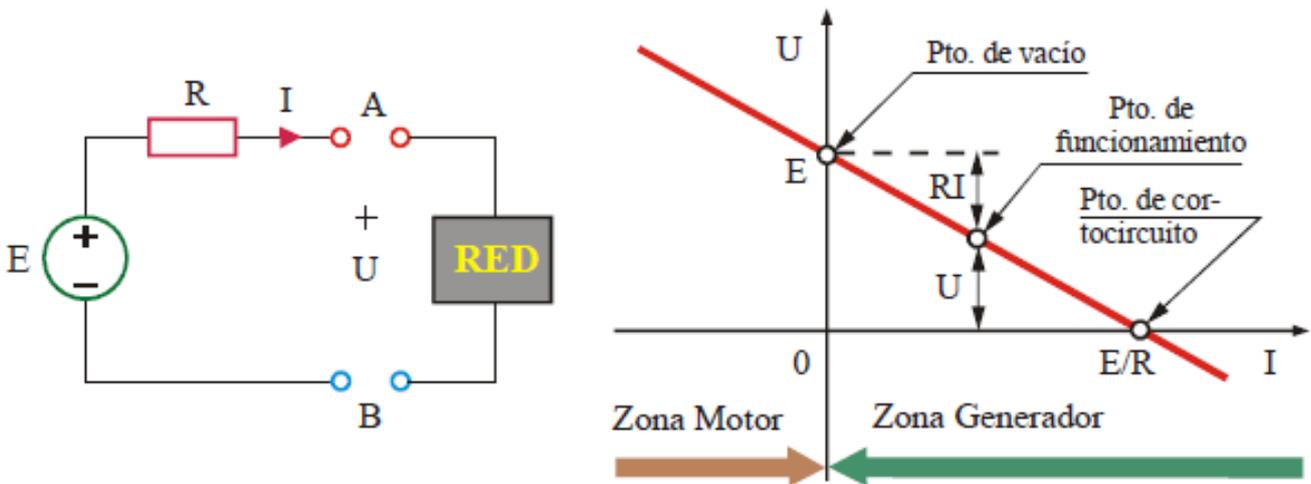


✓ Fuente real de tensión

❖ Parámetros que la definen

- F.e.m. o tensión de fuente, E (V)
- Resistencia interna, R (Ω)
- Potencia útil máxima, $P_{\text{máx.}}$ (W)

❖ Símbolo



❖ Ecuación característica: $U = f(I)$

- Aplicando la SLK: $U = E - R \cdot I$
- Punto de funcionamiento
 - + Par de valores (U, I) que verifican la característica.
 - + Es **función de la red externa**.
- Puntos notables de la característica
 - + **Punto de vacío**: $I = 0$, $U_0 = E$ (tensión de vacío)
 - + **Punto de cortocircuito**: $U = 0$, $I_{\text{cc}} = E / R$ (corriente de cortocircuito).



- Zonas de funcionamiento:
 - + Generador: para todo $U, I > 0$.
 - + Motor: $U > 0, I < 0$.

❖ Potencias

- Generador
 - + Multiplicando por (+I) la ecuación característica:

$$U \cdot I = E \cdot I - R I^2 \Rightarrow P_u = P_g - P_p$$

- + Potencia útil (eléctrica), $P_u = U \cdot I$
- + Potencia generada (mecánica), $P_g = E \cdot I$
- + Potencia perdida (Joule), $P_p = R \cdot I^2$
- + Rendimiento:

$$\eta_G = 100 \frac{P_u}{P_g} = 100 \left(1 - \frac{P_p}{P_g} \right)$$

- Motor
 - + Multiplicando por (-I) la ecuación característica:

$$U \cdot (-I) = E \cdot (-I) + R I^2 \Rightarrow E \cdot (-I) = U \cdot (-I) - R I^2$$

↓

$$P_u = P_a - P_p$$



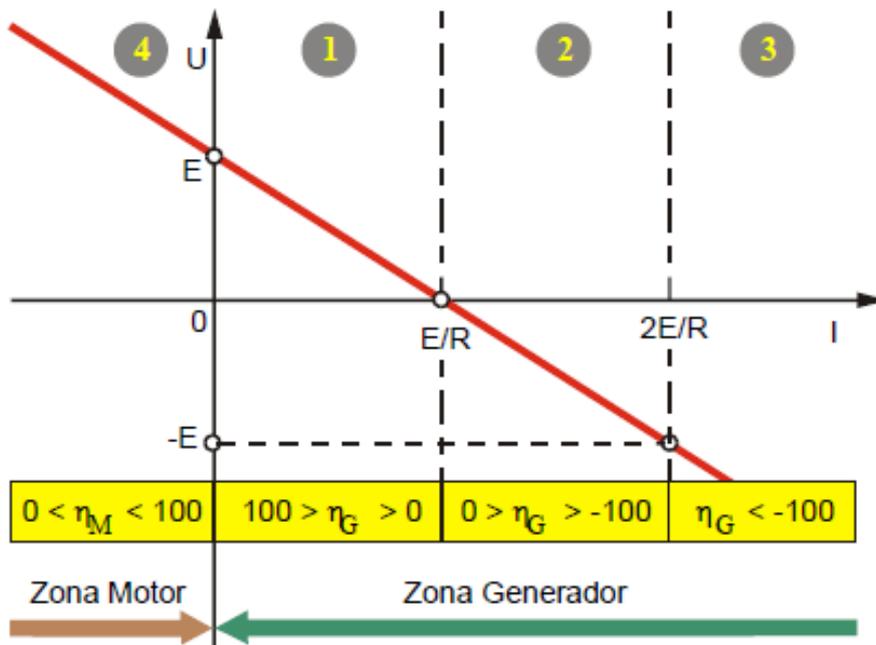
FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Elementos de circuitos lineales

- + Potencia útil (mecánica), $P_u = E \cdot (-I)$
- + Potencia absorbida (eléctrica), $P_a = U \cdot (-I)$
- + Potencia perdida (Joule, calor), $P_p = R \cdot I^2$
- + Rendimiento:

$$\eta_M = 100 \frac{P_u}{P_a} = 100 \left(1 - \frac{P_p}{P_a} \right)$$

❖ Evaluación del rendimiento en función de U e I.

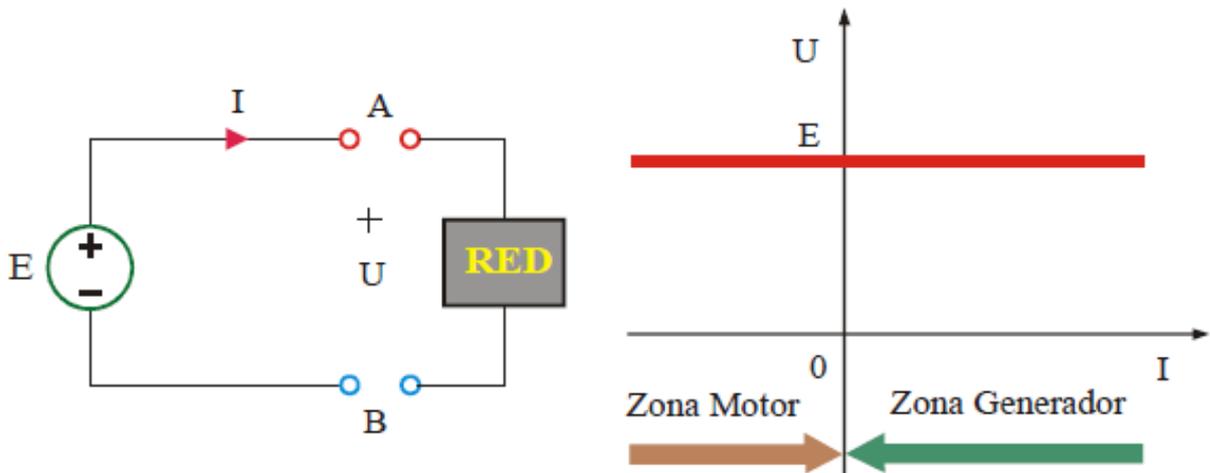


- Zona 1: funcionamiento normal como generador.
- Zonas 2 y 3: funcionamiento anormal como generador.
- Zona 4: funcionamiento normal como motor.



❖ Caso particular: fuente ideal de tensión

- Resulta cuando en la fuente real, $R = 0$.
- Gráficas de símbolo y curva característica.

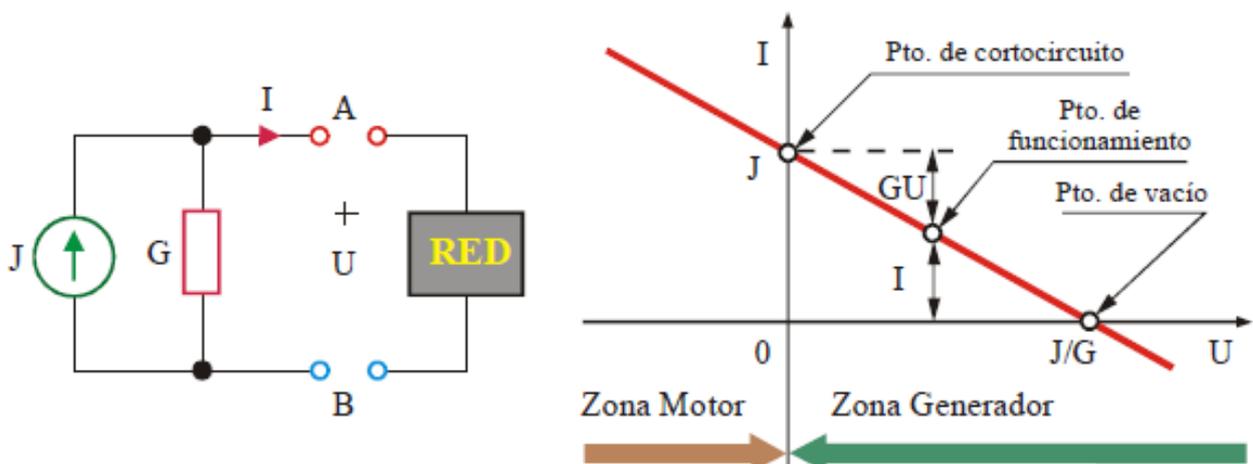


✓ Fuente real de corriente

❖ Parámetros que la definen

- Corriente de fuente, J (A).
- Conductancia interna, G (S).
- Potencia útil máxima, $P_{\text{máx.}}$ (W)

❖ Símbolo





❖ Ecuación característica: $I = g(U)$

- Aplicando la PLK: $I = J - G \cdot U$ para todo U .
- Punto de funcionamiento:
 - + Par de valores (U, I) que verifican la característica.
 - + Es **función de la red externa**.
- Puntos notables de la característica
 - + **Punto de vacío**: $I = 0, U_0 = J / G$.
 - + **Punto de cortocircuito**: $U = 0, I_{cc} = J$.
- Zonas de funcionamiento
 - + Generador: para todo $I, U > 0$.
 - + Motor: $I > 0, U < 0$.

❖ Potencias

- Generador
 - + Multiplicando por $(+U)$ la ecuación característica:

$$U \cdot I = U \cdot J - G U^2 \quad \Rightarrow \quad P_u = P_g - P_p$$

- + Potencia útil (eléctrica), $P_u = U \cdot I$.
- + Potencia generada (mecánica), $P_g = U \cdot J$.
- + Potencia perdida (Joule), $P_p = G U^2$.
- + Rendimiento:

$$\eta_G = 100 \frac{P_u}{P_g} = 100 \left(1 - \frac{P_p}{P_g} \right)$$



- Motor

- + Multiplicando por $(-U)$ la ecuación característica:

$$\boxed{(-U) \cdot J = (-U) \cdot I - G U^2} \Rightarrow \boxed{P_u = P_a - P_p}$$

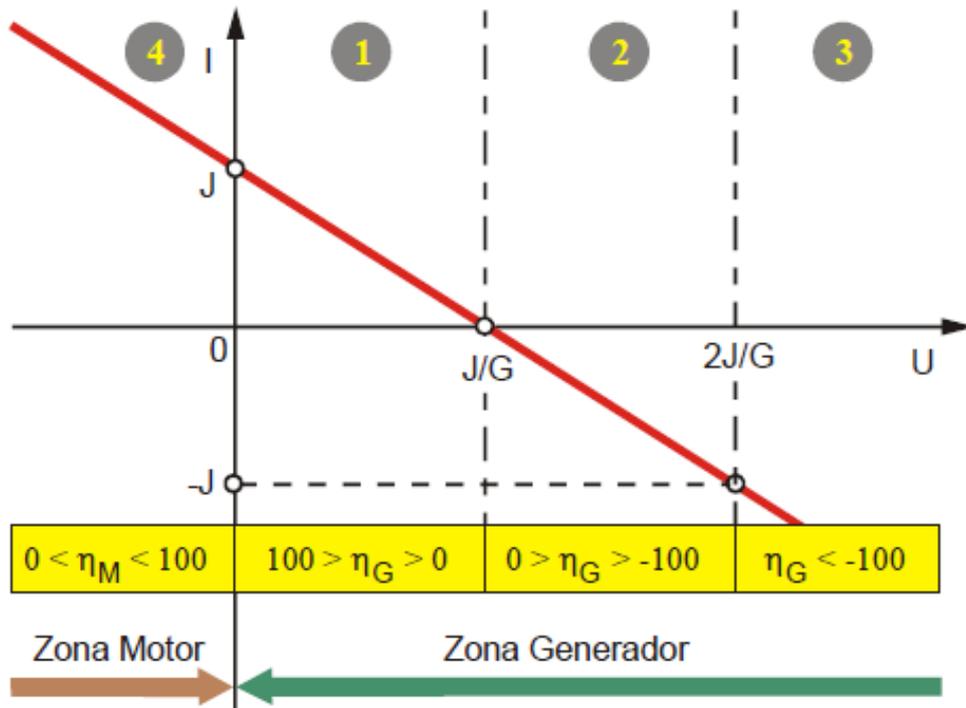
- + Potencia útil (mecánica), $P_u = (-U) \cdot J$.

- + Potencia absorbida (eléctrica), $P_a = (-U) \cdot I$.

- + Potencia perdida (Joule, calor), $P_p = G U^2$.

- + Rendimiento:

$$\boxed{\eta_M = 100 \frac{P_u}{P_a} = 100 \left(1 - \frac{P_p}{P_a} \right)}$$

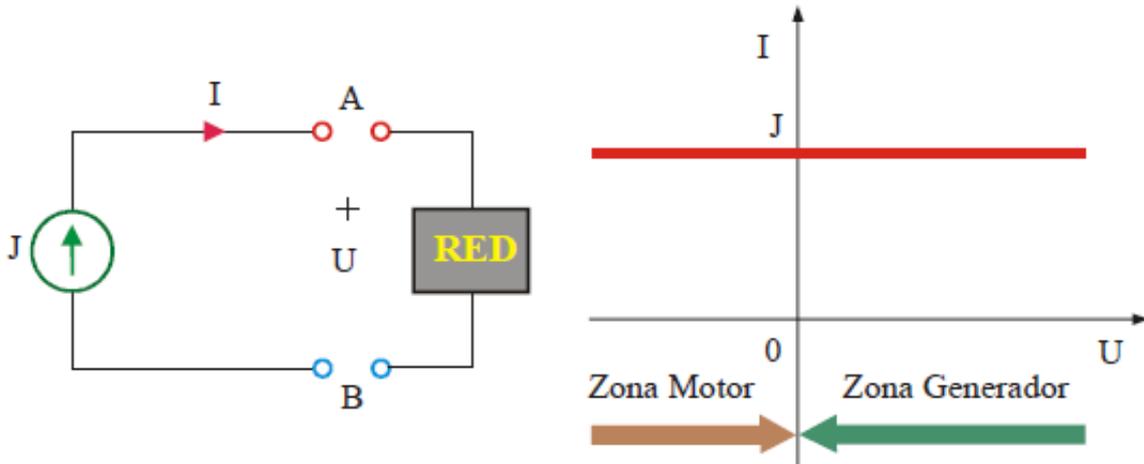


- Zona 1: funcionamiento normal como generador.
- Zonas 2 y 3: funcionamiento anormal como generador.
- Zona 4: funcionamiento normal como motor.



❖ Caso particular: fuente ideal de corriente

- Resulta cuando en la fuente real, $G = 0 \rightarrow R = \infty$.
- Gráficas de símbolo y característica

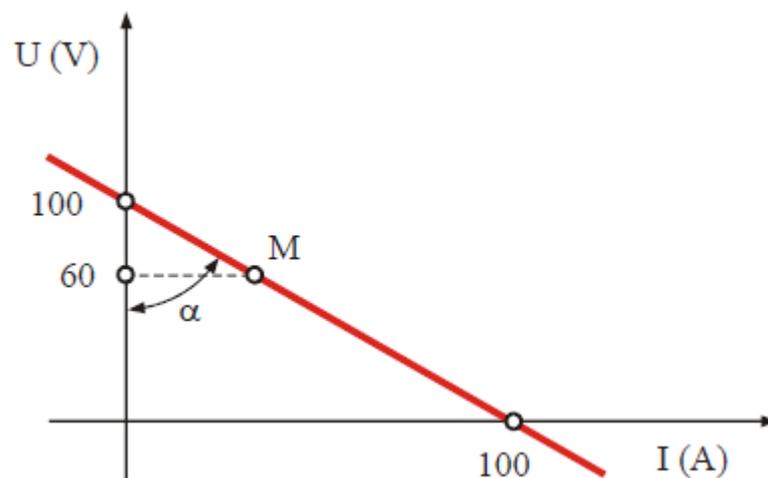




Ejemplo 1.5.

La figura representa la característica de una fuente real de tensión, de corriente continua, $U = f(I)$. En relación con dicha fuente, determinar:

- Sus parámetros f.e.m. y resistencia interna.
- Qué elementos, de los siguientes, conectados de forma sucesiva a la fuente, verifican el punto M.
 - Resistencia de $1,5 \Omega$.
 - Fuente ideal de tensión de 60 V , como receptor.
 - Fuente ideal de corriente de 40 A , como receptor.



❖ Solución

a) Punto de funcionamiento M:

$$\tan \alpha = \frac{100}{100} = \frac{I_M}{40} \Rightarrow I_M = 40 \text{ A} ,$$

Punto de trabajo: $(I_M = 40 \text{ A}, U_M = 60 \text{ V})$

- + Punto de vacío: $I = 0, E = U = 100 \text{ V}$.
- + Punto de cortocircuito: $U = 0, R = E / I_{cc} = 1 \Omega$.

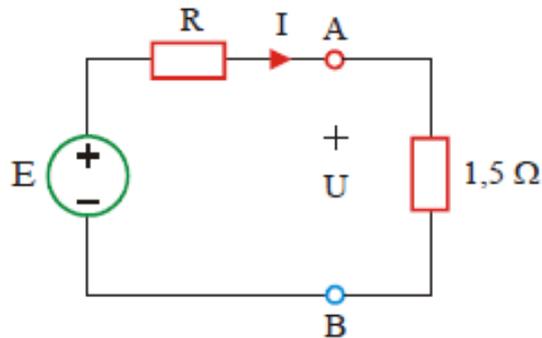
b) Verificando los elementos conectados:



FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

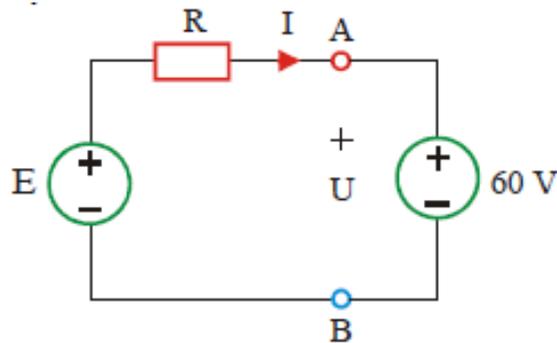
Elementos de circuitos lineales

+ Resistencia de $1,5 \Omega$.



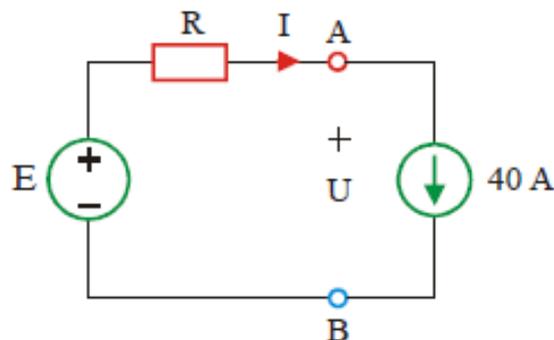
- $I = E / \sum R = 100 / 2,5 = 40 \text{ A}$.
- $U = 1,5 \cdot 40 = 60 \text{ V}$, OK.

+ Fuente ideal de tensión, receptor:



- $U = 60 \text{ V}$.
- $I = (E - U) / R = 40 / 1 = 40 \text{ A}$, OK.

+ Fuente ideal de corriente, como receptor:



- $I = 40 \text{ A}$.
- $U = E - R \cdot I = 100 - 40 = 60 \text{ V}$, OK.



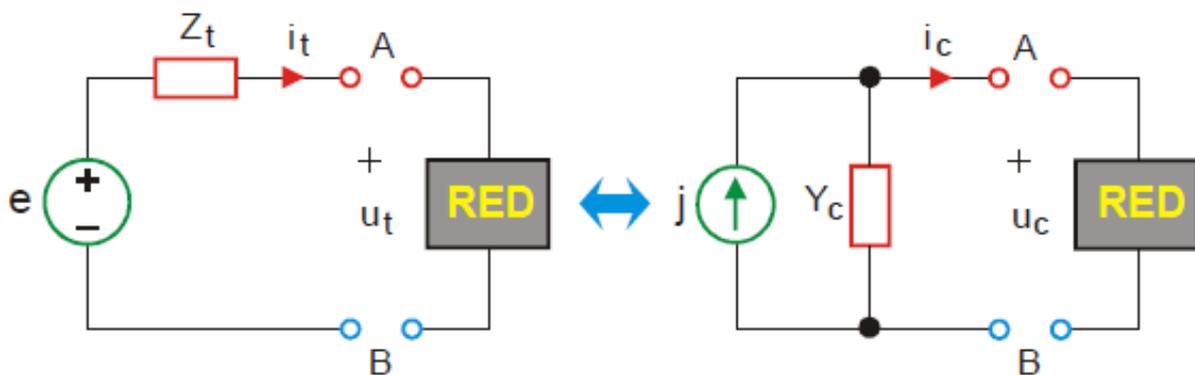
8. ASOCIACIÓN DE ELEMENTOS ACTIVOS

✓ Transformación de fuentes reales

❖ Introducción

- Sustitución de una **fente de tensión** por otra de **corriente** y viceversa.
- La equivalencia se verifica de **terminales hacia fuera** de las fuentes $\rightarrow u_t = u_c$ e $i_t = i_c$.

❖ Demostración



- Aplicando la **2LK** y la **1LK** a las figuras, resulta:

$$\text{SLK: } e - Z_t i_t - u_t = 0$$

$$\text{PLK: } j - Y_c u_c - i_c = 0$$



$$i_t = \frac{e}{Z_t} - \frac{u_t}{Z_t}$$

$$i_c = j - Y_c u_c$$



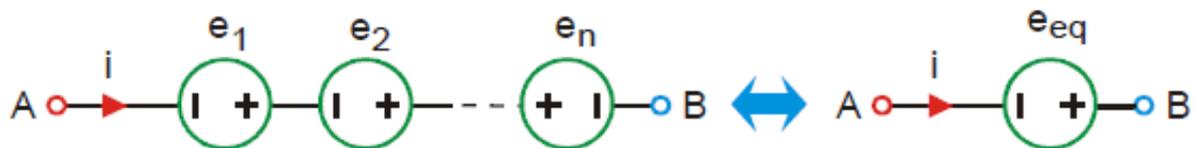
- Identificando términos, resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_c = \frac{1}{Z_t} = Y_t \\ j = \frac{e}{Z_t} = Y_t e \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Z_t = \frac{1}{Y_c} = Z_c \\ e = \frac{j}{Y_c} = j Z_c \end{array} \right.$$

✓ Asociación de fuentes ideales de tensión

❖ Conexión serie

- Esquemas



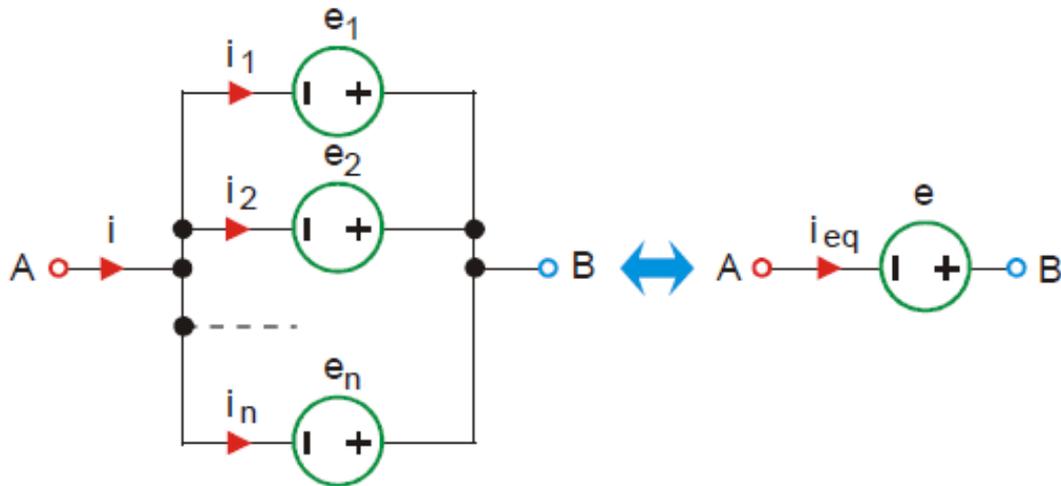
- Condición: la corriente i es la misma para toda e_k ($k = 1, 2, \dots, n$).
- Aplicando la SLK:

$$u_{BA} = e_{eq} = -e_n + \dots + e_2 + e_1 = \sum_{k=1}^n \pm e_k$$



❖ Conexión derivación

- Esquemas



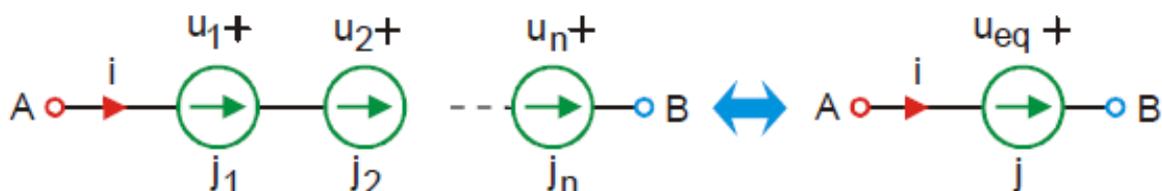
- Condición: la tensión $u_{BA} = e$ y además es la misma para toda e_k ($k = 1, 2, \dots, n$).
- Aplicando la PLK:

$$i = i_{eq} = i_n + \dots + i_2 + i_1 = \sum_{k=1}^n \pm i_k$$

✓ Asociación de fuentes ideales de corriente

❖ Conexión serie

- Esquemas:



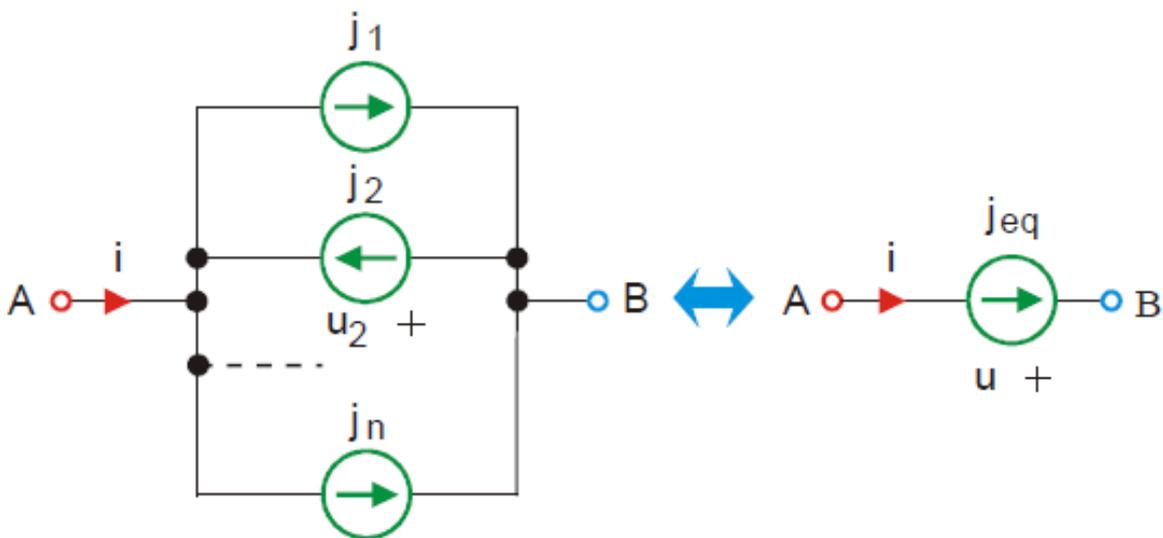


- Condición: $j = j_k = i$ ($k = 1, 2, \dots, n$)
- Aplicando la SLK:

$$U_{BA} = U_{eq} = \sum_{k=1}^n \pm u_k$$

❖ Conexión derivación

- Esquemas



- Condición: $u_{BA} = u_k = u$ ($k = 1, 2, \dots, n$)
- Aplicando la PLK:

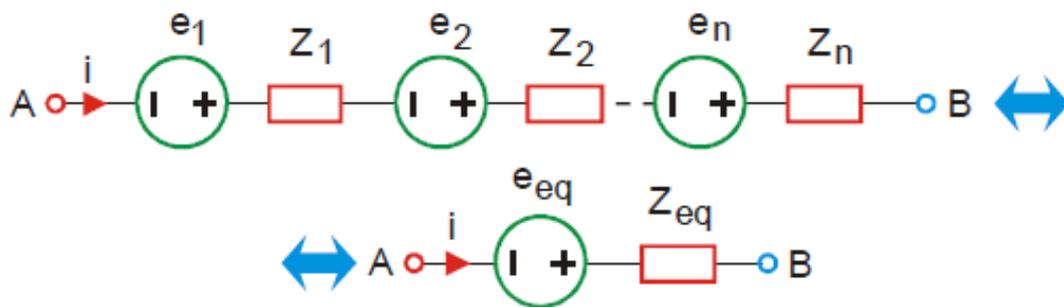
$$i = j_{eq} = j_1 - j_2 + \dots + j_n = \sum_{k=1}^n \pm j_k$$



✓ Asociación de fuentes reales de tensión

❖ Conexión serie

- Esquemas



- Condición: $i = i_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$)
- Fuente equivalente:

$$e_{eq} = e_1 + e_2 + \dots + e_n = \sum_{k=1}^n \pm e_k$$

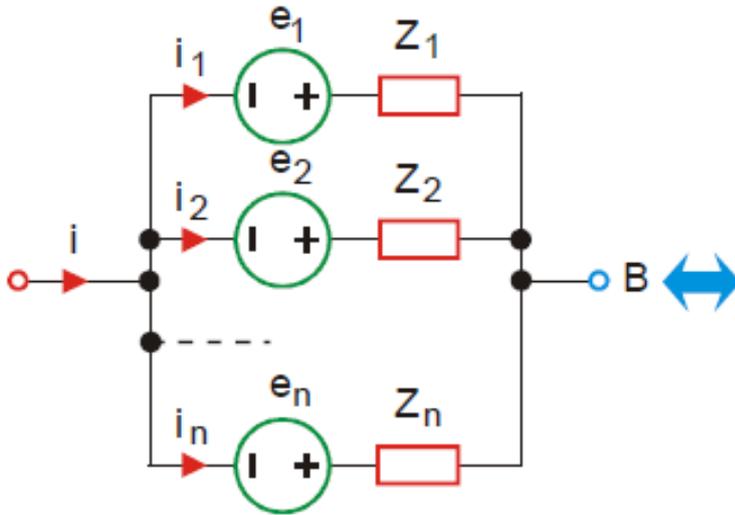
- Impedancia equivalente:

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \sum_{k=1}^n Z_k$$



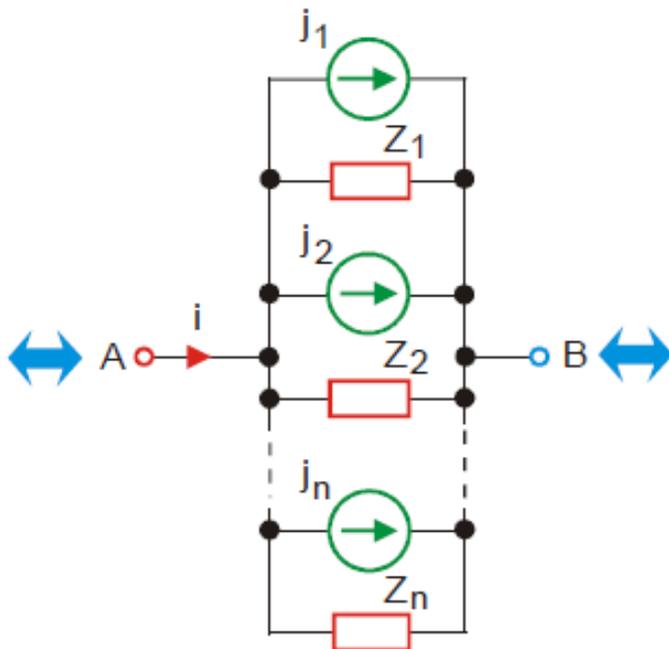
❖ Conexión derivación

- Esquema



- Paso 1, transformación:

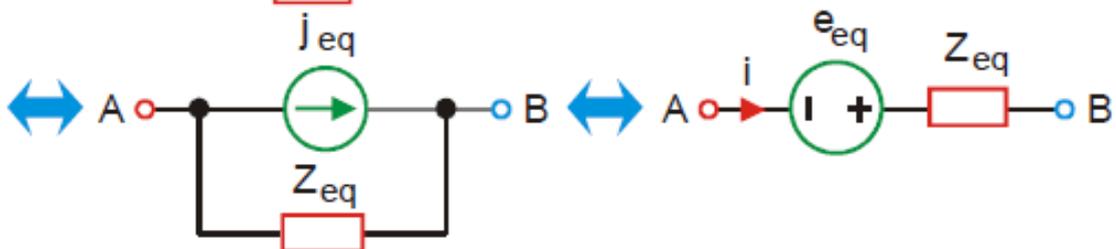
$$Z_k = Z_k ; j_k = \frac{e_k}{Z_k}$$



- Paso 2, asociación:

$$j_{eq} = \sum_{k=1}^n \pm j_k ;$$

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{Z_k}$$



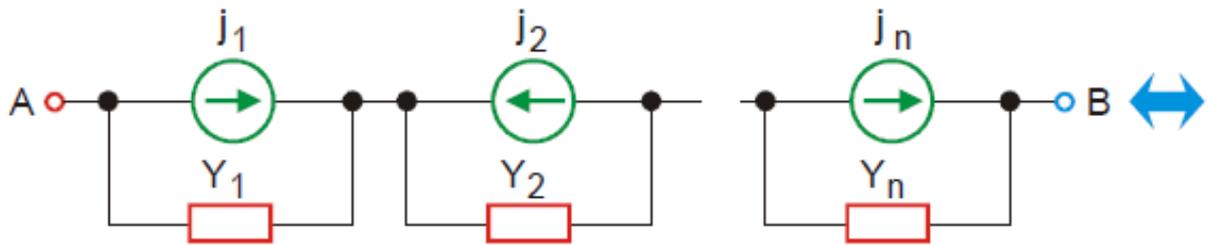
- Paso 3, transformación: $Z_{eq} = Z_{eq}; e_{eq} = Z_{eq} \cdot j_{eq}$



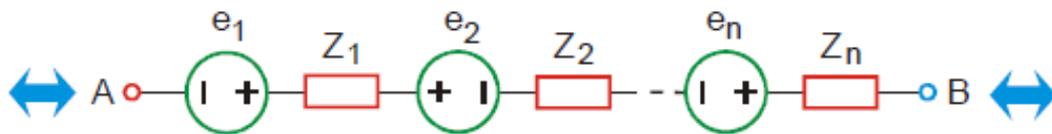
✓ Asociación de fuentes reales de corriente

❖ Conexión serie

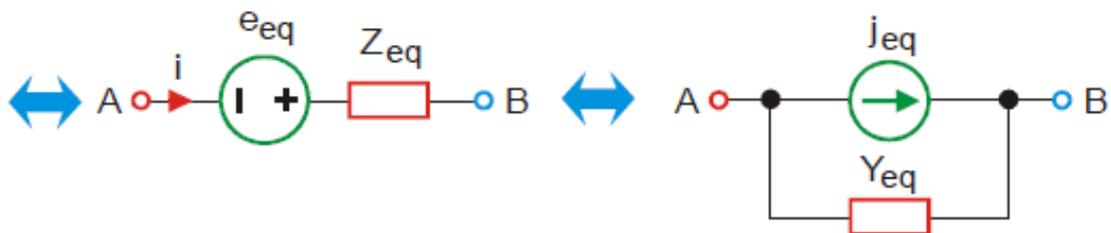
- Esquemas



- Paso 1, transformación: $Z_k = \frac{1}{Y_k}$; $e_k = \frac{j_k}{Y_k} = Z_k e_k$



- Paso 2, asociación: $e_{eq} = \sum_{k=1}^n \pm e_k$; $Z_{eq} = \sum_{k=1}^n Z_k$

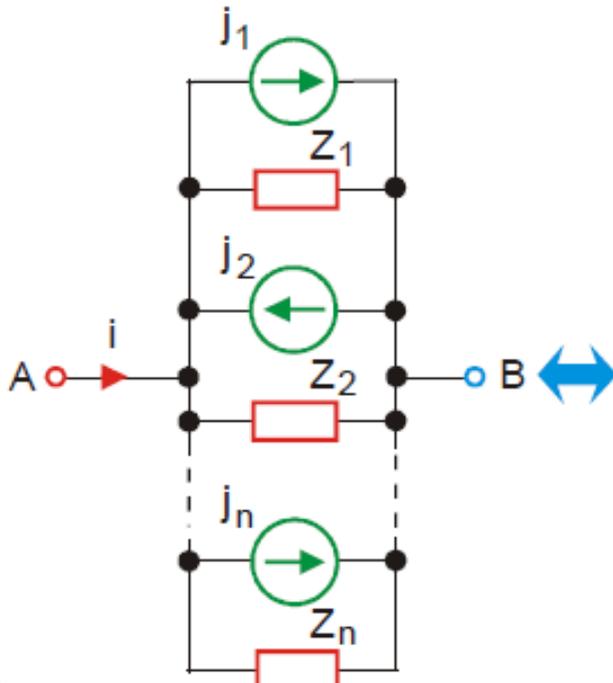


- Paso 3, transformación: $Y_{eq} = \frac{1}{Z_{eq}}$; $j_{eq} = \frac{e_{eq}}{Z_{eq}}$



❖ Conexión derivación

- Esquemas

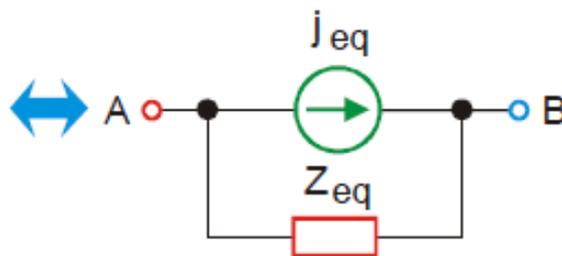


- Fuente equivalente:

$$i = j_{eq} = \sum_{k=1}^n \pm j_k$$

- Admitancia equivalente:

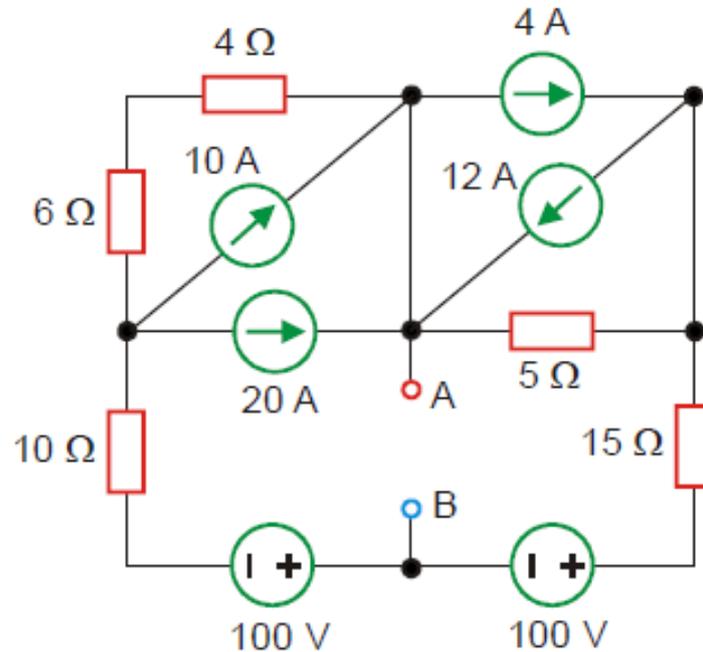
$$Y_{eq} = \sum_{k=1}^n Y_k$$





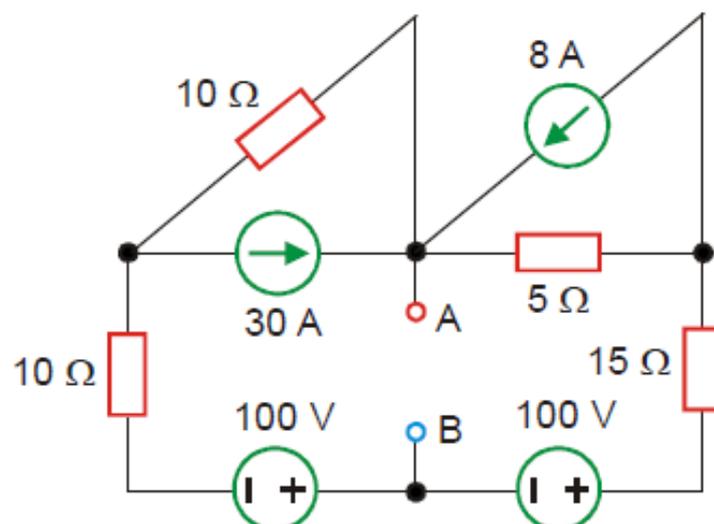
Ejemplo 1.6.

Utilizando, únicamente, la asociación y transformación de elementos, determinar la d.d.p. U_{AB} .



❖ Solución

- Paso a: asociación en paralelo de las fuentes de corriente de 10 y 20 A, por un lado y, las de 4 y 12 A por otro. Asociación en serie de las resistencias de 6 y 4 ohmios.

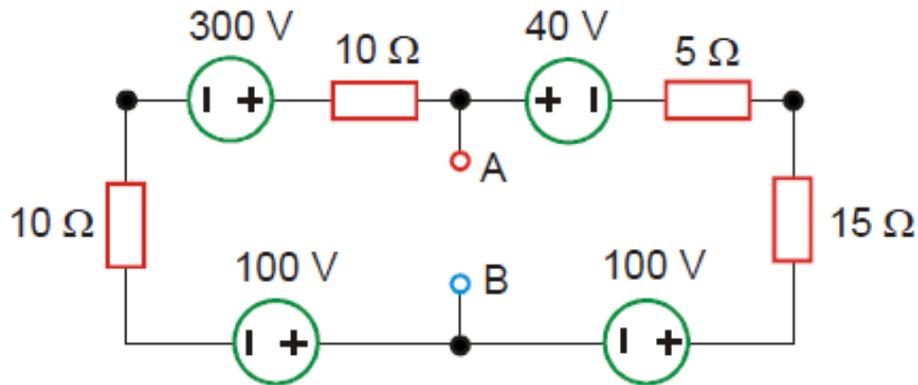




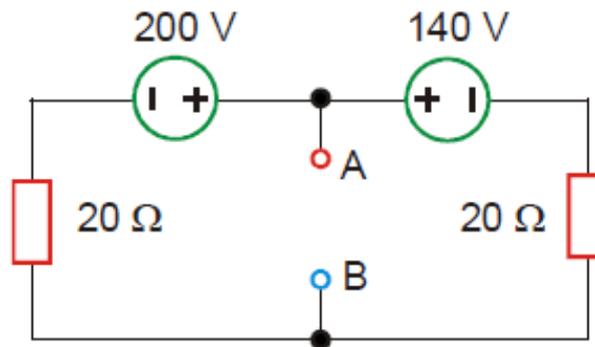
FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Elementos de circuitos lineales

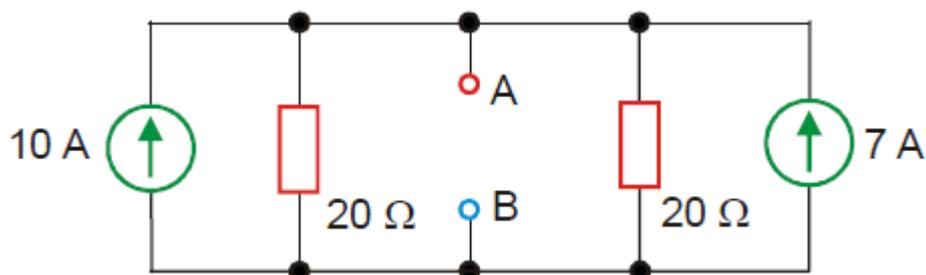
- Paso b: transformación de las dos fuentes reales de corriente de la red anterior.



- Paso c: asociación en serie de las fuentes reales de tensión, a la izquierda y derecha de los terminales A-B.



- Paso d: transformación de las fuentes reales de tensión, en fuentes reales de corriente.

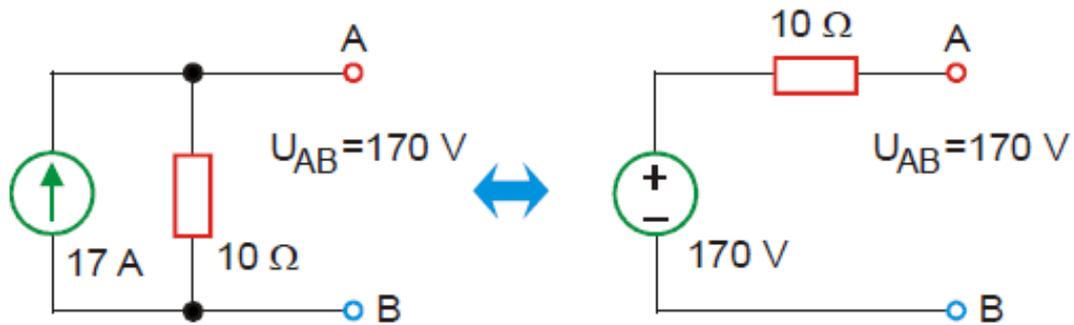




FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Elementos de circuitos lineales

- Paso e: asociación en derivación de las fuentes reales de corriente, a la izquierda y derecha de los terminales A-B.



-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-



9. MAGNITUDES, ELEMENTOS Y CIRCUITOS DUALES

✓ Introducción

❖ Proposiciones duales

“Definiciones, teoremas o expresiones que presentan una semejanza formal”. Por ejemplo:

- “dos puntos determinan una recta”
- “dos rectas determinan un punto”

❖ Aplicación electrotécnica

- Herramienta que ahorra trabajo en la **demonstración de teoremas** y en la **resolución de algunas redes**.

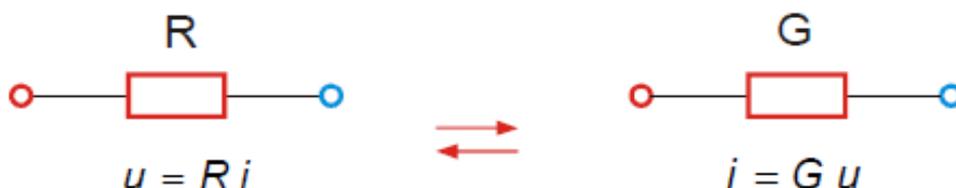
❖ Símbolo de dualidad

- Símbolo utilizado por E. Colin en 1948: \rightleftarrows .

✓ Magnitudes y elementos duales

❖ Algunos ejemplos

- Resistencia:

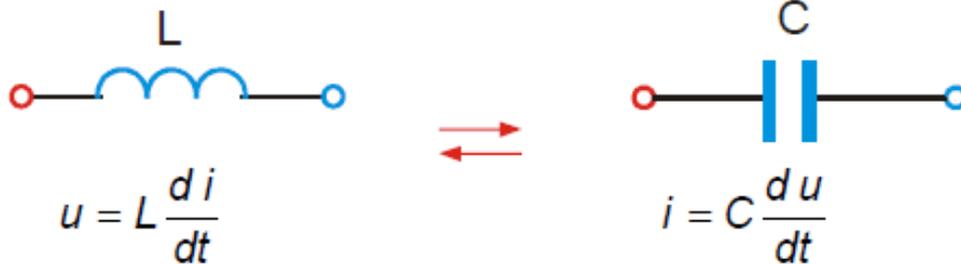




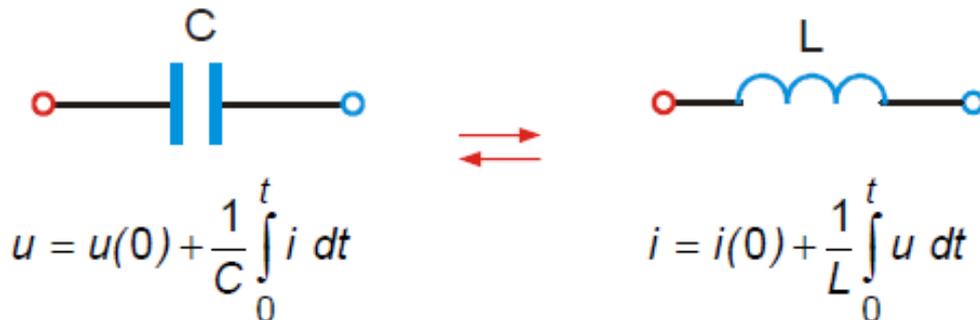
FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Elementos de circuitos lineales

- Bobina:



- Condensador:



❖ Listado de magnitudes y elementos duales

- | | | |
|------------------------------|---|-------------------------------|
| • tensión, (u) | ↔ | intensidad, (i) |
| • carga, (q) | ↔ | flujo abrazado, (ψ) |
| • resistencia, (R) | ↔ | conductancia, (G) |
| • inductancia, (L) | ↔ | capacidad, (C) |
| • impedancia, (Z) | ↔ | admitancia, (Y) |
| • fuente de tensión, (e) | ↔ | fuentes de corriente (j) |
| • P.L. de Kirchhoff | ↔ | S.L. de Kirchhoff |
| • cortocircuito, ($u = 0$) | ↔ | circuito abierto, ($i = 0$) |
| • red serie | ↔ | red derivación |
| • malla | ↔ | nudo |
| • lazo | ↔ | corte |



❖ Magnitudes invariantes

- tiempo (t)
- derivación $\left(\frac{d \bullet}{dt}\right)$
- integración $\left(\int \bullet dt\right)$
- potencia (p)

$$p = u \cdot i = p = i \cdot u$$

$$p = R \cdot i^2 = p = G \cdot u^2$$

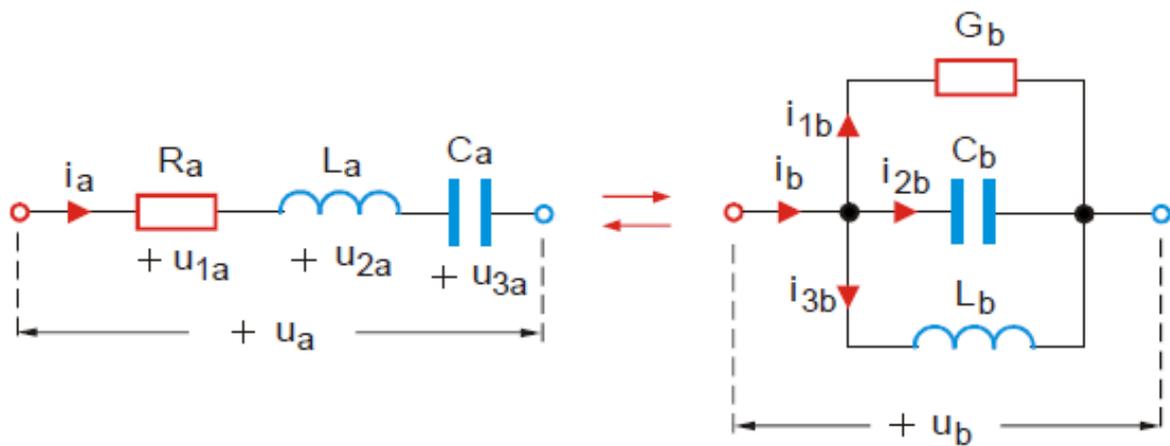
- energía (w)

$$w = u \cdot i \cdot t = w = i \cdot u \cdot t$$

$$w = \frac{1}{2} L \cdot i^2 = w = \frac{1}{2} C \cdot u^2$$

❖ Ejemplo de circuitos y magnitudes duales

- Redes duales



$$R_a \leftrightarrow G_b, \quad L_a \leftrightarrow C_b, \quad C_a \leftrightarrow L_b$$

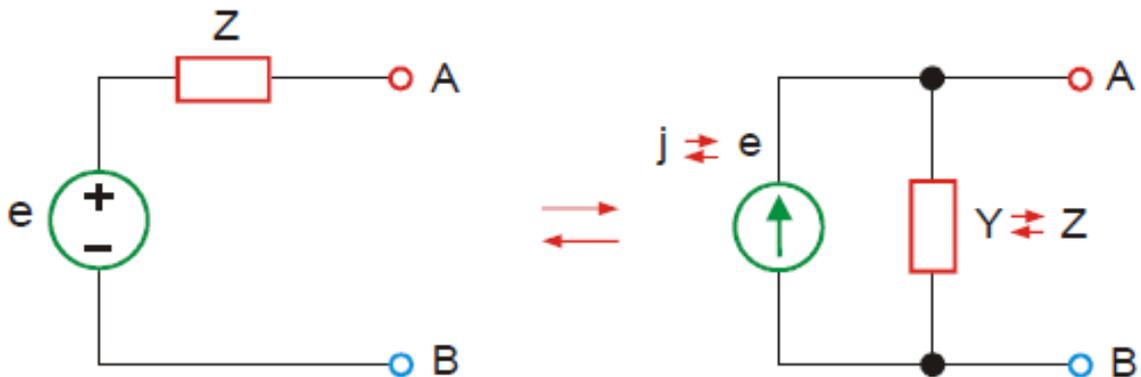
$$u_{1a} \leftrightarrow i_{1b}, \quad u_{2a} \leftrightarrow i_{2b}, \quad u_{3a} \leftrightarrow i_{3b}$$

$$u_a \leftrightarrow i_b, \quad i_a \leftrightarrow u_b.$$



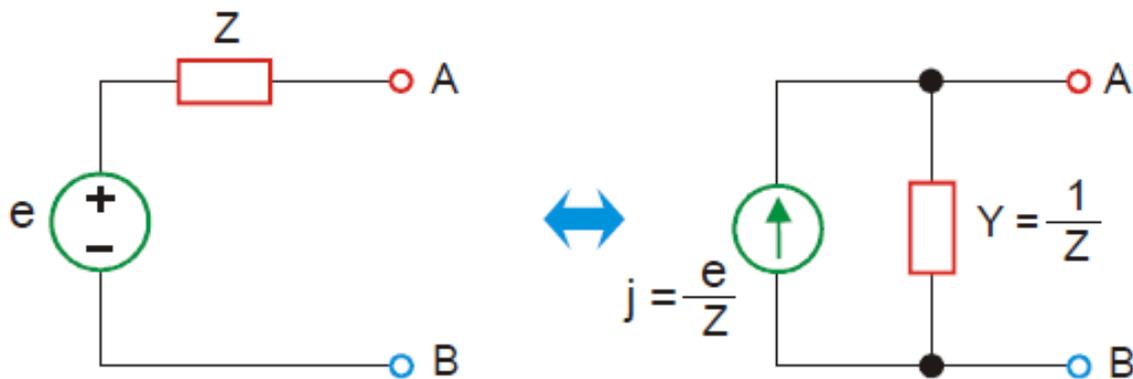
✓ Error usual: fuentes reales duales y equivalentes

❖ Fuentes reales duales



BOBINA: $Z = LD \rightleftharpoons CD = Y$: CONDENSADOR

❖ Obtención de la fuente equivalente



BOBINA: $Z = LD \leftrightarrow LD = 1/Y$: BOBINA



10. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Chua, L. et al. LINEAR AND NON LINEAR CIRCUITS. McGraw-Hill Book Company. New York. 1987.
- Eguíluz, L. I. et al. PRUEBAS OBJETIVAS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS. Eunsa. Pamplona. 2001.
- Madrigal, R.I. Teoría moderna de CIRCUITOS ELÉCTRICOS. Ed. Pirámide, S.A. Madrid. 1977.
- Nilsson, J. W. – Riedel, S. A. CIRCUITOS ELÉCTRICOS. Prentice Hall. México. 2001.
- Pastor, A. et al. CIRCUITOS ELECTRICOS. Volumen I. U.N.E.D. Madrid. 2005.
- Ras, E. TEORÍA DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS. FUNDAMENTOS. Marcombo Boixareu Editores. Barcelona. 1988.
- Ras, E. REDES ELÉCTRICAS Y MULTIPOLOS. Marcombo Boixareu Editores. Barcelona. 1980.
- Sánchez, P. et al. TEORÍA DE CIRCUITOS. Problemas y pruebas objetivas orientadas al aprendizaje. Pearson. Prentice Hall. Madrid. 2007.

