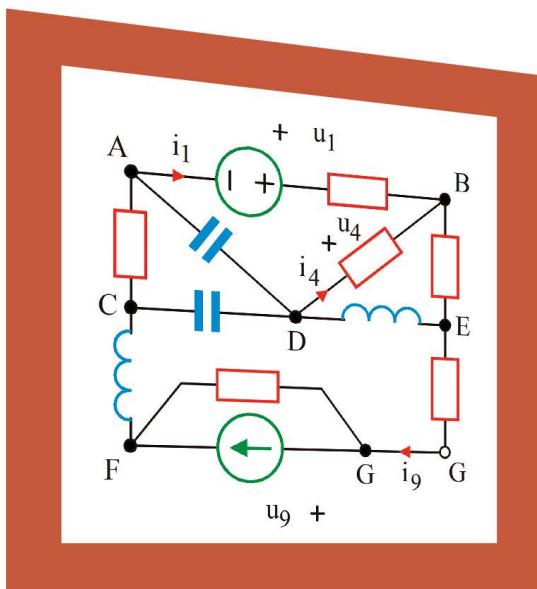


# Fundamentos de Ingeniería Eléctrica

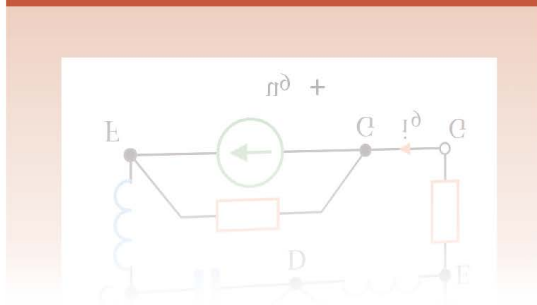
## UD 1. Elementos de circuitos lineales



Alberto Arroyo Gutiérrez  
José Carlos Lavandero González  
Sergio Bustamante Sánchez  
Eugenio Sainz Ortiz  
Alberto Laso Pérez  
Raquel Martínez Torre  
Mario Mañana Canteli

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

Este material se publica bajo la siguiente licencia:  
Creative Commons BY-NC-SA 4.0





# BT1: ELEMENTOS DE CIRCUITOS LINEALES

## CONTENIDOS

1.	<a href="#">Introducción</a> .....	02
2.	<a href="#">Generalidades de los circuitos</a> .....	06
3.	<a href="#">Formas de onda</a> .....	15
4.	<a href="#">Aparatos de medida</a> .....	24
5.	<a href="#">Elementos pasivos dos terminales</a> .....	29
6.	<a href="#">Asociación de elementos pasivos</a> .....	37
7.	<a href="#">Elementos activos dos terminales</a> .....	49
8.	<a href="#">Asociación de elementos activos</a> .....	59
9.	<a href="#">Elementos y magnitudes duales</a> .....	70
10.	<a href="#">Referencias bibliográficas</a> .....	74

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-



# 1. INTRODUCCIÓN

## ✓ La Ingeniería Eléctrica

### ❖ ¿De qué trata?

- Estudia las aplicaciones de la **electricidad, la electrónica y el electromagnetismo**, basadas sobre conocimientos físicos y matemáticos.

### ❖ Contexto actual

- Sus actividades iniciales, fueron: el **alumbrado eléctrico**, el uso del **telégrafo** y la **generación de energía eléctrica**.
- Dada la entidad propia que van adquiriendo, se va dividiendo en nuevas ingenierías: ingeniería eléctrica, la ingeniería electrónica, la ingeniería de sistemas y automática y la ingeniería de telecomunicaciones.
- Ingeniería eléctrica actual, contempla: **la generación, el transporte, la distribución y la utilización de la energía eléctrica**.



## ✓ La asignatura

### ❖ Objetivo

- Comprender el **Análisis de los Circuitos Eléctricos** para poder determinar los niveles de tensión, corriente, potencia y energía en cada punto de un circuito.
- Las bases iniciales de esta rama de la Ingeniería Eléctrica se fundamentan en la **ley de Ohm y las leyes de Kirchhoff**.

## ✓ Leyes de Maxwell y campos cuasiestacionarios

### ❖ Introducción

- La **Teoría de Circuitos** constituye una **simplificación** de una teoría más completa: la **Teoría de Campos Electromagnéticos de J.C. Maxwell (Leyes de Maxwell)**.
- Las simplificaciones están basadas en la consideración de **campos electromagnéticos cuasiestacionarios**, lo que implica que **sólo puede aplicarse cuando la longitud de onda de las señales** (tensiones, corrientes, etc.) presentes en el circuito, **son mucho mayores que las dimensiones físicas de éste**.
- Este hecho ocurre en la mayoría de las aplicaciones electrotécnicas, **exceptuando las líneas largas de transporte de energía eléctrica**.



# FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

## Elementos de circuitos lineales

Nombre	Forma diferencial	Forma integral
Conservación de la carga	$\text{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$	$\oint_S \vec{J} d\vec{s} = -\frac{\partial q}{\partial t}$
<b>Ecuaciones de Maxwell</b>		
Ley de Gauss para el campo eléctrico	$\text{div} \vec{D} = \rho$	$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = q$
Ley de Faraday-Henry	$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} ds$
Ley de Gauss para el campo magnético	$\text{div} \vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B} d\vec{s} = 0$
Ley de Ampere-Maxwell	$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{J} d\vec{s} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} ds$
Ecuación de Lorentz	$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$	

$v$  = velocidad de la carga (m/s).

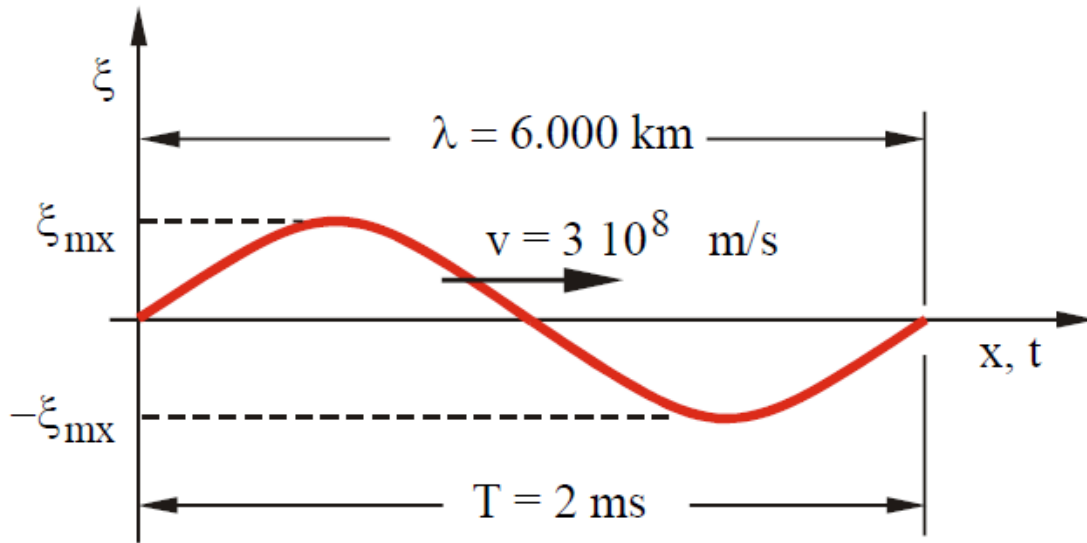
### ❖ Teoría de circuitos eléctricos

- Constituye una simplificación de las leyes de Maxwell.
- Campos eléctricos industriales: son de variación lenta en el tiempo.
  - + Frecuencia,  $f = 50$  Hz (hercio).
  - + Periodo,  $T = 1 / f = 20$  ms.
  - + Longitud de onda,  $\lambda = c \cdot T = 6.000$  km.



## FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

### Elementos de circuitos lineales



- Consecuencias:

- + Para  $\lambda / 20 \leq 300 \text{ km}$ :

- La transmisión de señales es **instantánea**.
- Origina circuitos con elementos denominados, de **parámetros concentrados**, que son independientes de la distancia. Es de aplicación la **Teoría de Circuitos Eléctricos**.

- + Para  $\lambda / 20 > 300 \text{ km}$ :

- La transmisión de señales presenta un cierto **retardo**.
- Origina circuitos con elementos denominados, de **parámetros distribuidos**, que son dependientes de la distancia. Se aplica la **Teoría de Redes Eléctricas**.



## 2. GENERALIDADES DE LOS CIRCUITOS

### ✓ Circuito eléctrico

#### ❖ Definición

- “Conjunto de elementos que, interconectados entre si – mediante conductores ideales–, posibilitan el establecimiento de una corriente eléctrica”.

#### ❖ Elementos de los circuitos

- Tipo: elementos de **parámetros concentrados, lineales e invariables con el tiempo**.
- Clasificación general:
  - + Activos o fuentes: generadores y motores.
  - + Pasivos: incluye los disipadores de calor y los almacenadores de energía.

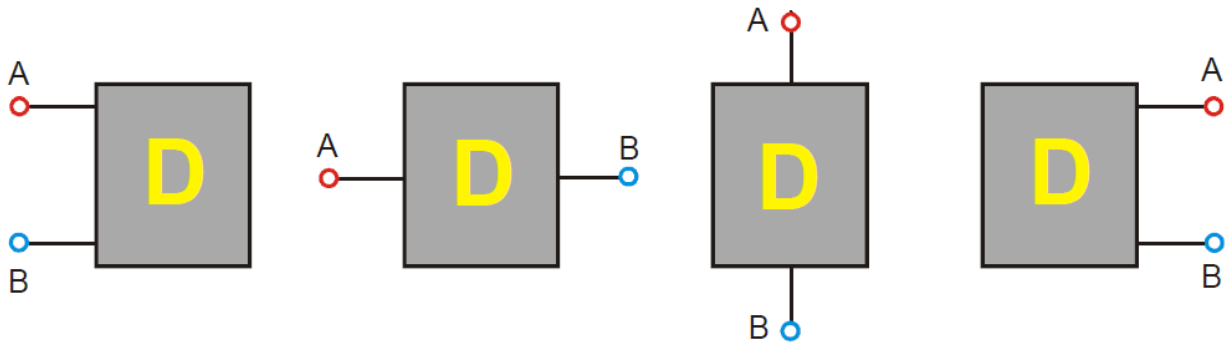
#### ❖ Definiciones de un circuito eléctrico

- En función del **número de terminales**: dipolo, tripolo, cuadripolo, etc.
  - + Desde un circuito complejo, hasta un sólo elemento.
  - + Carácter interno **desconocido**.

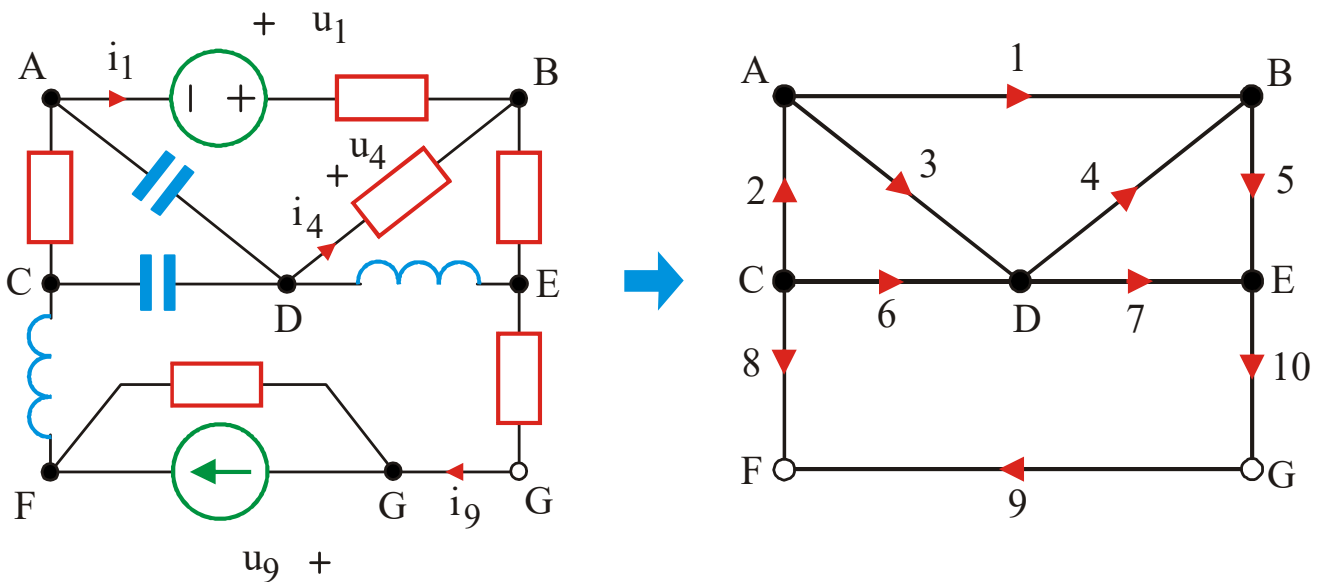


# FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

## Elementos de circuitos lineales



- En función de la **topología** del circuito



- + **Rama**: segmento o arco, representativo de un elemento o de un conjunto de elementos de red. Necesariamente, sus extremos acaban en nudos (1, 2, 3, ..., 10).
- + **Nudo**: extremo de una rama. En los nudos pueden confluir una, dos, tres, etc. r-ramas (A, B, C, ..., G). Se denomina **nudo principal**, aquél en el que confluyen tres o más ramas y **secundario** en el que confluyen 2 ramas.

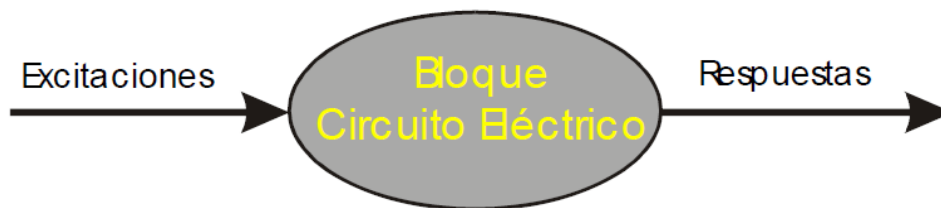




## FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

### Elementos de circuitos lineales

- + **Grafo**: estructura gráfica de una red, donde las ramas se representan por segmentos y los nudos por puntos.
- + **Camino**: subconjunto ordenado de ramas. En cada nudo del camino inciden dos ramas, salvo en los nudos extremos (1-5-10, 1-4-7-10, etc.).
- + **Lazo**: camino cerrado (1-5-10-9-8-2, 1-4-3, etc.).
- + **Malla**: lazo que no contiene otro en su interior (2-3-6, 1-3-4, 4-5-7 y 6-7-10-9-8).
- Definiciones generales:



- + **Excitaciones**: las fuentes: corriente continua y corriente alterna sinusoidal.
  - + **Respuestas**: tensiones e intensidades que aparecen en los elementos de la red.
- ❖ Variables utilizadas en los circuitos:
- **Tensión** o diferencia de potencial (d.d.p.). Símbolo:  $u = u(t)$ .
    - + Unidad de medida: voltio, (V).
  - **Corriente** o intensidad. Símbolo:  $i = i(t)$ .
    - + Unidad de medida: amperio, (A).

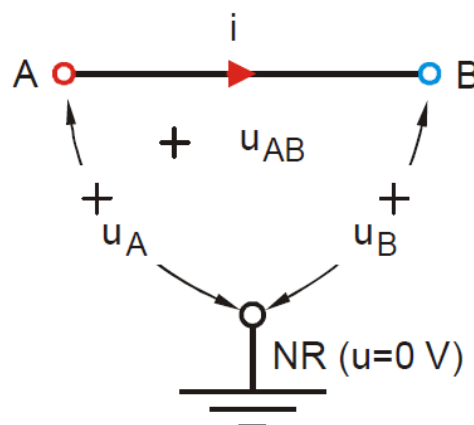


- **Potencia:** Símbolo:  $p = p(t)$ .
  - + Unidad de medida: vatio, (W).
- **Energía:** Símbolo:  $w = w(t)$ .
  - + Unidad de medida: julio, (J).
- **Carga:** Símbolo:  $q = q(t)$ .
  - + Unidad de medida: culombio, (C).
- **Flujo magnético abrazado, concatenado, ligado o total:** Símbolo:  $\psi = \psi(t)$ .
  - + Unidad de medida: weber, (Wb)

**Nota:** los símbolos de las magnitudes, escritas con letras minúsculas, indican que son función del tiempo y, por ello, se las denomina valores instantáneos.

#### ❖ Elementos de un circuito eléctrico y criterio de signos

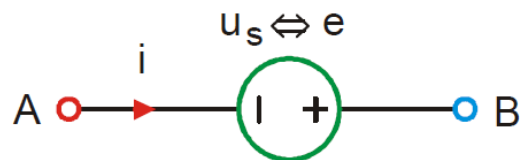
- **Corriente:** desplazamiento de cargas positivas.
  - + NR = nudo de tierra o referencia. Se le asigna tensión o potencial de 0 V.
  - + Consecuencia: si  $i > 0 \leftrightarrow u_{AB} = u_A - u_B > 0$ .





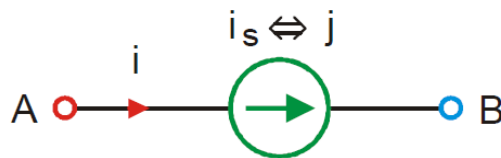
- Fuente ideal de tensión:

- + Donde:  $e$  es la tensión de la fuente o f.e.m.
- + Consecuencia:  $U_{BA} = e$ , para todo  $i$ .



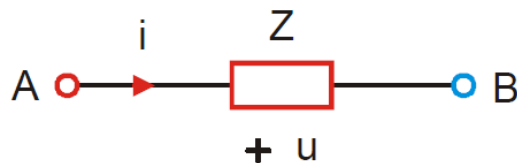
- Fuente ideal de corriente:

- + Donde:  $j$  es la corriente de la fuente.
- + Consecuencia:  $i = j$ , para todo  $U_{BA}$ .



- Elemento pasivo:

- + Donde  $Z = u / i$  y se denomina “Impedancia”.
- + Consecuencias: si  $i > 0 \rightarrow U_A > U_B$  y  $U_{AB} = u$ .



- ❖ Leyes de los circuitos

- Leyes universales:

- + Relación: corriente–carga:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$



+ Ley de Faraday: tensión inducida

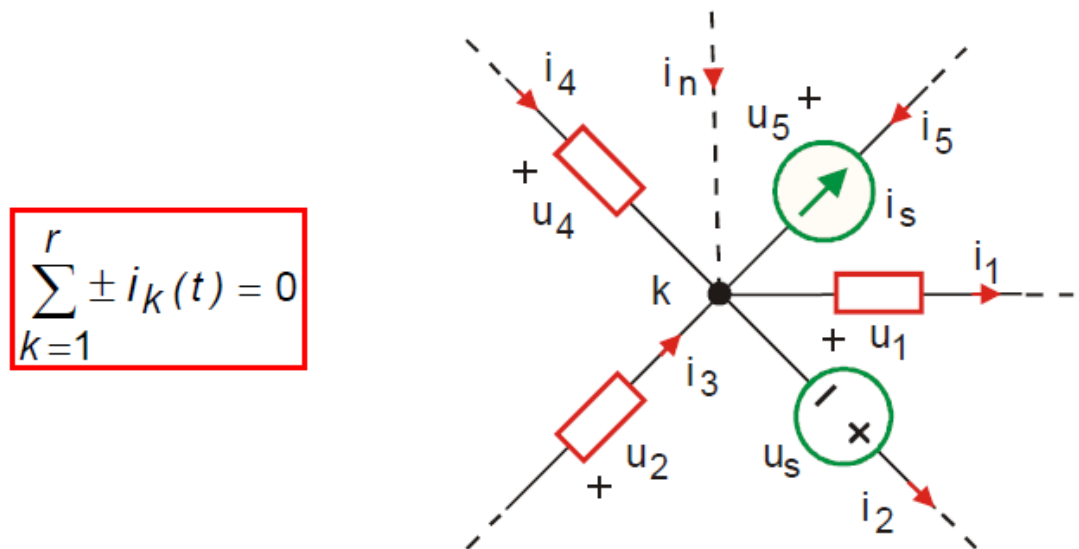
$$u(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}$$

+ Potencia-energía:

$$p(t) = \frac{dw(t)}{dt} = u(t) \cdot i(t)$$

+ Leyes de Gustav R. Kirchhoff (1845)

- Primera ley de Kirchhoff (PLK): “La suma algebraica de las corrientes de rama concurrentes en un nudo es nula”.



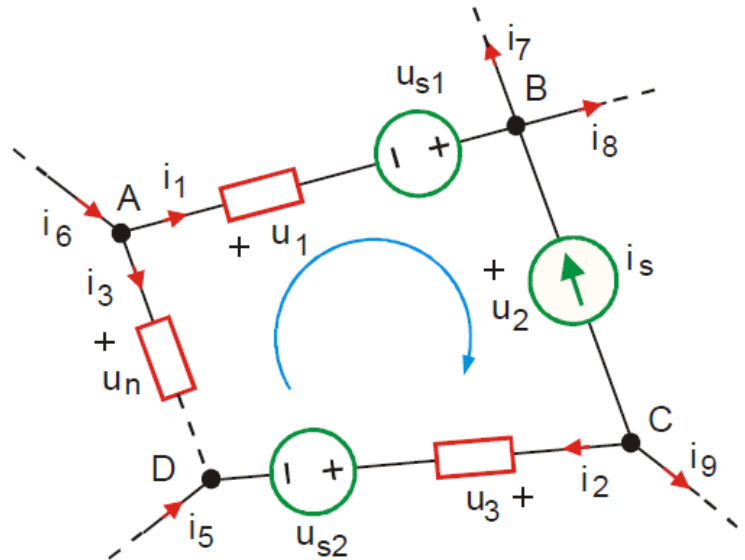
(donde, r = ramas incidentes en el nudo)

**Nota:** tomar las corrientes entrantes positivas (+) y la salientes negativas (-).



- Segunda ley de Kirchhoff (SLK): “La suma algebraica de tensiones en un lazo cualquiera de una red es igual cero.

$$\sum_{q=1}^r \pm u_q(t) = 0$$



(donde,  $r$  = ramas que componen el lazo)

**Nota:** En el sentido del recorrido, tomar positivas las tensiones - + y negativas las + -.

- + Conservación de la potencia/energía de la red y balance de potencias.

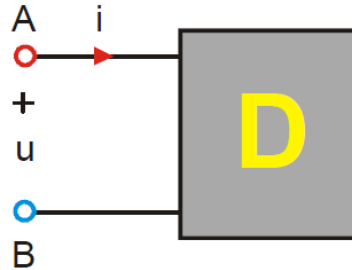
$$\sum_{m=1}^r \pm u_m i_m = 0 \quad \sum_{q-\text{activos}} \pm u_q i_q = \sum_{k-\text{pasivos}} u_k i_k$$

(donde,  $r$  = número total de ramas de la red)



## ❖ Potencia

- **Potencia instantánea:**  $p(t) = u(t) \cdot i(t)$



- + La potencia instantánea  $p(t)$  es función del tiempo. Puede cambiar de signo a lo largo del tiempo.
- **Potencia media, P:** energía media en un intervalo de tiempo infinito:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{w(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} u(\tau) i(\tau) d\tau$$

- + Define una cantidad que no depende del tiempo
- + Ejemplo: caso de excitaciones/respuestas en c.c.:
  - $u(t) = U = cte.$ ,  $i(t) = I = cte.$

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} U I d\tau = U I = u i = p$$

- Conclusión: **en corriente continua, la potencia media coincide con la potencia instantánea.**
- + Ejemplo: excitaciones/respuestas periódicas:
  - $p(t) = u(t) i(t) = u(t + nT) i(t + nT) = p(t + nT)$
  - Tomando:  $\Delta t = nT$ , resulta:



## FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

### Elementos de circuitos lineales

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \int_0^{nT} u i d\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{nT} \int_0^T u i d\tau =$$
$$= \frac{1}{T} \int_0^T u i d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T p d\tau$$

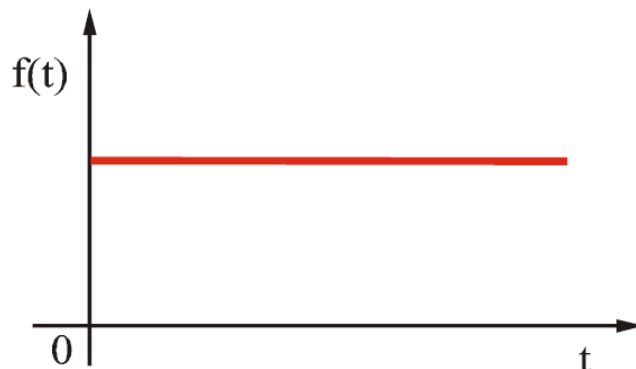
- **Conclusión:** en c.a., la potencia media es la media integral, extendida a un periodo, de la potencia instantánea.



### 3. FORMAS DE ONDA

#### ✓ Introducción

- Las **excitaciones** y **respuestas** describen distintas formas de onda en función del tiempo.
- Ondas utilizadas en Electrotecnia:
  - + Usuales:
    - Continua (**D.C.**): Tensión e intensidad permanecen constantes a lo largo del tiempo.



- Periódicas (**A.C.**): Alterna sinusoidal
- + Otras:
  - Escalón, pulso, rampa e impulso.

#### ✓ Ondas periódicas. Valores asociados

##### ❖ Definición

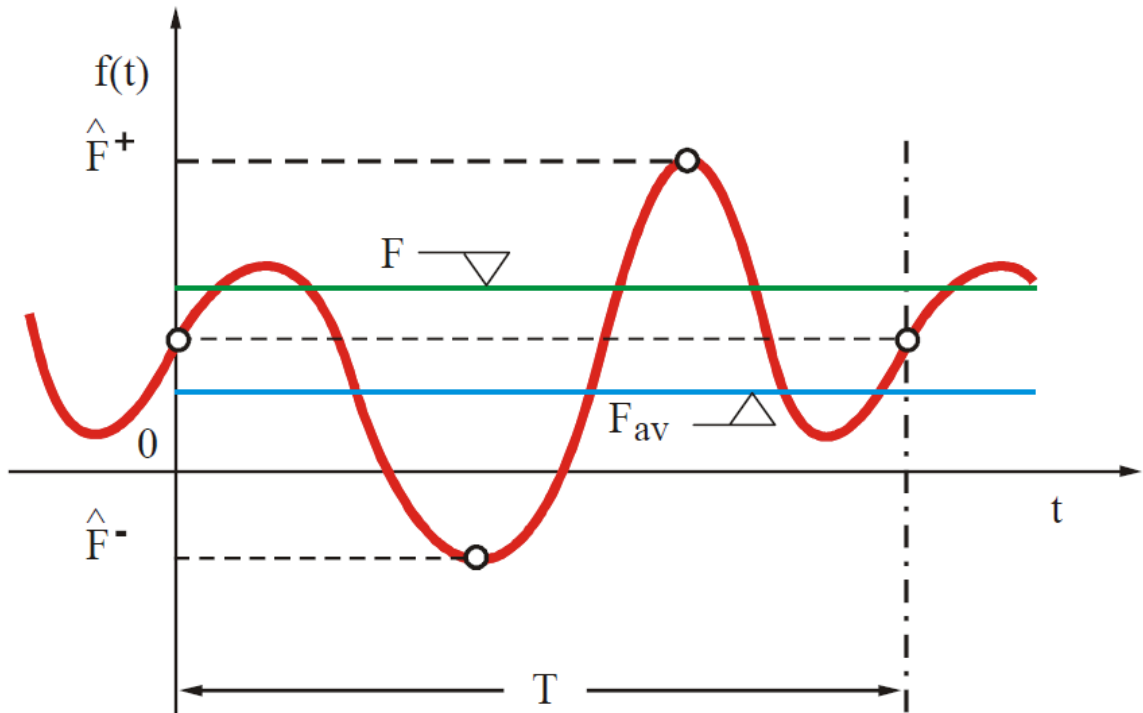
$$f(t) = f(t \pm hT), h=1, 2, \text{ etc.}$$





$T =$  periodo propio o fundamental.

❖ Ejemplo



❖ Parámetros asociados: identifican más sencilla.

- Valor medio ( $F_{av}$ ): media integral

$$F_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

- Valor eficaz ( $F$ ): media cuadrática integral.

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}$$



- Factor de cresta ( $f_c$ ):

$$f_c = \frac{\hat{F}}{F}$$

- Factor de forma, ( $f_f$ ):

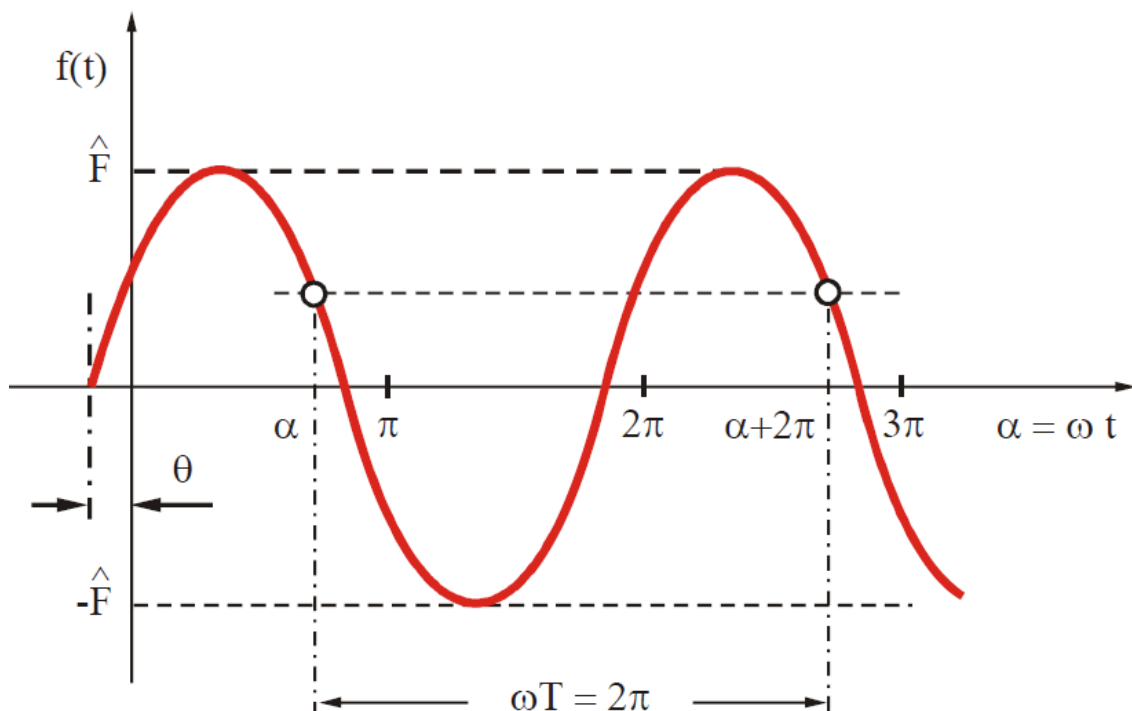
$$f_f = \frac{F}{F_{av}}$$

- Valor de pico a pico ( $f_{pp}$ ):

$$f_{pp} = \hat{F}^+ - \hat{F}^-$$

## ✓ Ondas sinusoidales

- Caso particular de funciones periódicas (seno ó coseno).
- Representación gráfica:





## FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

### Elementos de circuitos lineales

- Expresión general:  $f(t) = \hat{F} \sin(\omega t + \theta)$ 
  - +  $\hat{F}$  = amplitud, valor máximo o valor de pico.
  - +  $\omega$  = pulsación o velocidad angular (rad/s).
  - +  $\theta$  = ángulo de fase inicial ó fase (rad).
- Propiedades
  - + Periodo angular:  $2\pi$  (rad)
  - + Periodo temporal: T (s), tiempo que tarda la onda en realizar un ciclo completo.
  - + Pulsación:  $\omega$  (rad/s)  $\rightarrow \omega T = 2\pi$ .
  - + Frecuencia (Hz = s<sup>-1</sup>):  $f = 1/T$ , número de ciclos que realiza la onda 1 segundo.
  - + Pulsación y frecuencia:  $\omega = 2\pi f$ .
  - + Valor medio ( $F_{av}$ ): se define para un semiperiodo T/2 s ó  $\pi$  rad.

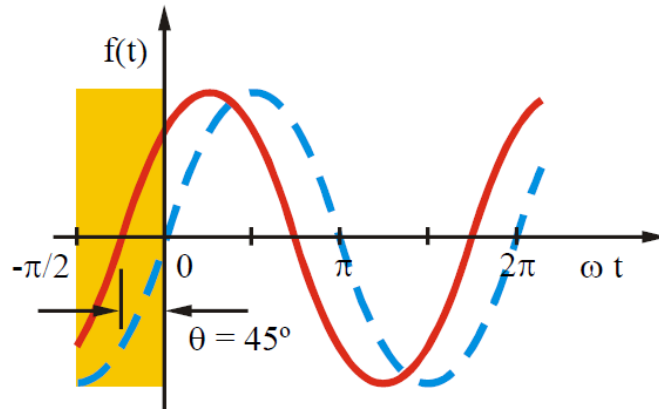
$$F_{av} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \hat{F} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{2}{\pi} \hat{F}$$

- + Valor eficaz (F): se define sobre un periodo T s, ó  $2\pi$  rad:

$$F = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{F}^2 \sin^2 \alpha \, d\alpha} = \frac{\hat{F}}{\sqrt{2}}$$

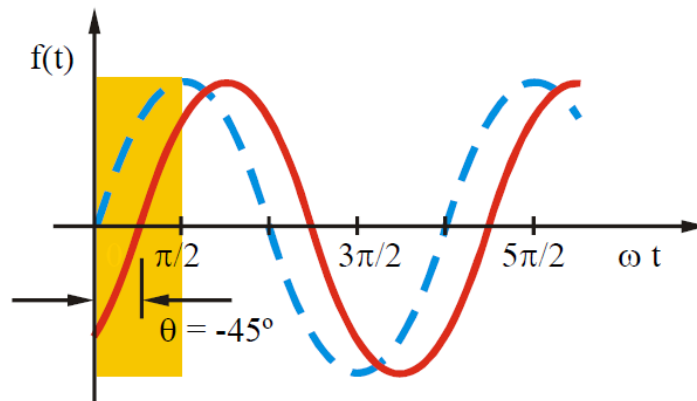


- Sinusoides adelantadas y retrasadas
  - + Respecto de la referencia angular  $\omega t = 0$ .
  - + Sinusoide adelantada:  $0 < \theta \leq \pi/2$



- Máximo adelanto:  $f(t) = \hat{F} \sin(\omega t + 90^\circ)$

- + Sinusoide Retrasada:  $0 > \theta \geq -\pi/2$



- Máximo retraso:  $f(t) = \hat{F} \sin(\omega t - 90^\circ)$

- Función armónica

$$f_h(t) = \hat{F}_h \sin(h \omega t + \theta_h)$$

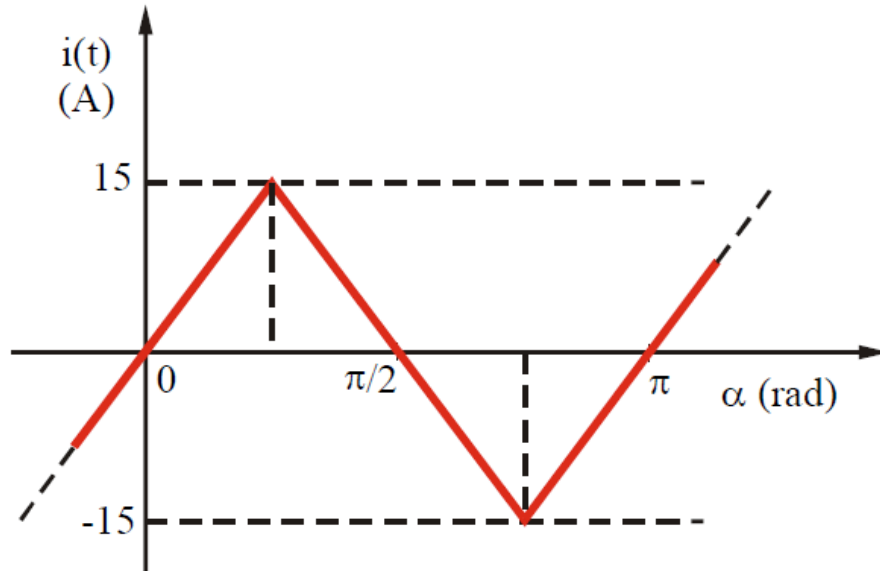
- +  $h = 1, 2, \text{ etc.}$
- +  $\theta_h = \text{fase del armónico } h\text{-ésimo.}$



### Ejemplo 1.1.

Calcular los parámetros de las ondas periódicas:

- $u(t) = 380 \sin(120\pi t + \pi/6)$  V.
- Definida gráficamente, según la figura:



#### ❖ Solución:

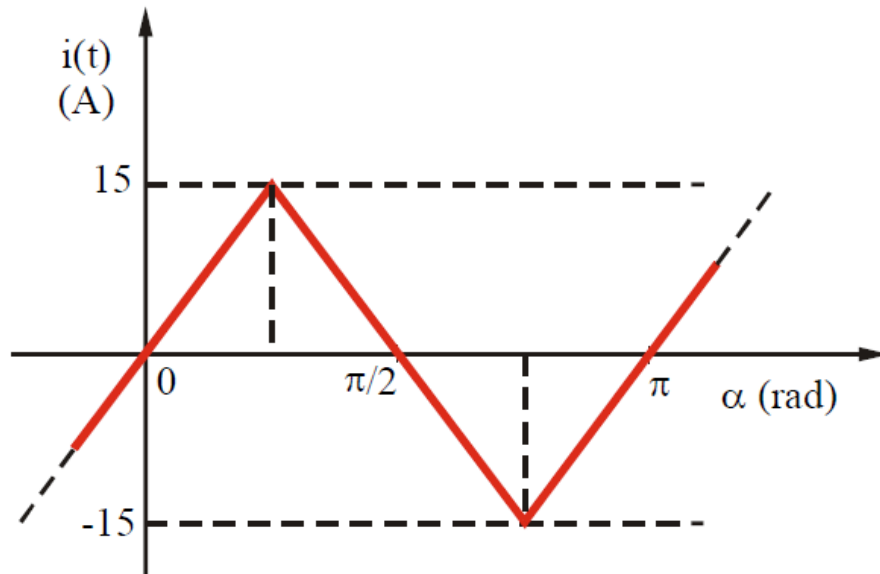
- Apartado a).
  - 1) Pulsación:  $\omega = 120\pi$  rad/s.
  - 2) Frecuencia:  $f = \omega / 2\pi = 60$  Hz.
  - 3) Periodo:  $T = 1 / f = 16,66$  ms.
  - 4) Longitud de onda:  $\lambda = c / f = 3 \cdot 10^8 / 60 = 5000$  km.
  - 5) Fase:  $\varphi = \pi/6$  rad =  $30^\circ$ .
  - 6) Valor máximo:  $\hat{U} = 380$  V.
  - 7) Valor medio:  $U_{Av} = 2\hat{U} / \pi = 241,91$  V.
  - 8) Valor eficaz:  $U = \hat{U} / \sqrt{2} = 268,70$  V.
  - 9) Factor de cresta:  $f_c = \hat{U} / U = \sqrt{2}$ .



a.10) Factor de forma:  $f_f = U / U_{Av} = 1,11$ .

a.11) Valor de pico a pico:  $f_{pp} = 2\hat{U} = 760 \text{ V}$ .

- Apartado b).



b.1) Pulsación:  $\omega T = \pi \rightarrow \omega = \pi/T = \pi \cdot f \text{ rad/s}$ .

b.2) Función:

+ Intervalo  $(0, \pi/4)$ :  $i(t) = (60\alpha)/\pi$ .

b.3) Valor máximo:  $\hat{I} = 15 \text{ A}$ .

b.4) Valor medio:

+ En el periodo es nulo.

+ En el semiperiodo:

$$I_{av} = \frac{1}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} i(\alpha) d\alpha$$

+ Dada la simetría de la onda



## FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

### Elementos de circuitos lineales

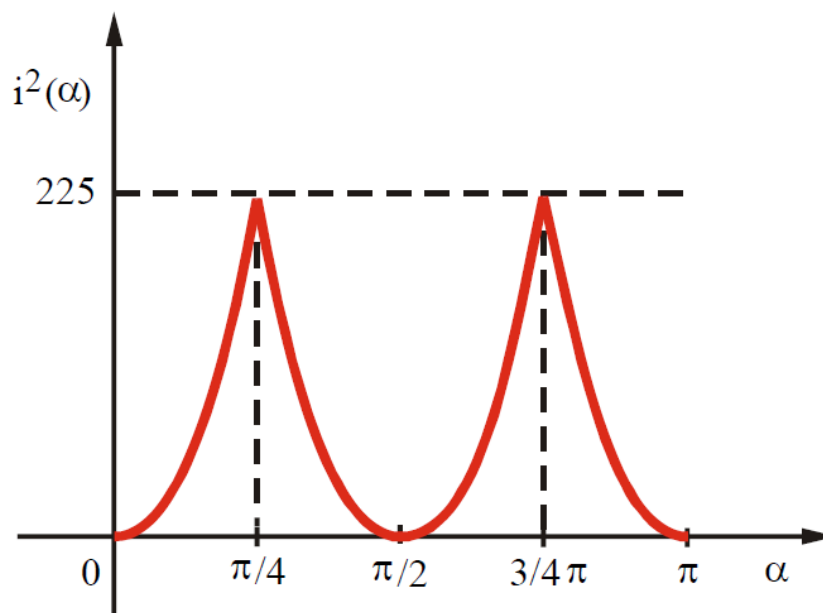
$$I_{av} = \frac{1}{\pi/2} \left( 2 \int_0^{\pi/4} \frac{60}{\pi} \alpha d\alpha \right) = \frac{240}{\pi^2} \left( \frac{\alpha^2}{2} \right)_0^{\pi/4} = 7,5 A$$

b.5) Valor eficaz:

$$I^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} i^2(\alpha) d\alpha$$

+ Función intensidad al cuadrado: intervalo  $(0, \pi/4)$ :

$$i^2(\alpha) = \frac{3.600}{\pi^2} \alpha^2$$



+ Dada la simetría de la onda



$$I^2 = \frac{1}{\pi} 4 \int_0^{\pi/4} \frac{3.600}{\pi^2} \alpha^2 d\alpha = \frac{14.400}{\pi^3} \left( \frac{\alpha^3}{3} \right)_0^{\pi/4} = 75 A^2$$

$$I = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} A.$$

b.6) Factor de cresta:  $f_c = \hat{I} / I = 15 / (5\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ .

b.7) Factor de forma:  $f_f = I / I_{Av} = 5\sqrt{3} / (15/2) = 2/\sqrt{3}$ .

b.8) Valor de pico a pico:  $f_{pp} = 15 - (-15) = 30 A$ .

### Ejemplo 1.2.

La placa de características de un receptor doméstico, señala: “230 V - 50 Hz”. ¿Qué representan?

#### ❖ Solución:

- Deberá conectarse a una red monofásica de A.C. y:
- 50 Hz de frecuencia y,
- 230 V de tensión eficaz.
- De este modo su expresión temporal, o valor instantáneo, es:  $u(t) = 230\sqrt{2} \cdot \sin(2\pi 50t) V$ .
- Sus valores, máximo y medio, valen:
  - +  $\hat{U} = \sqrt{2}U = 230\sqrt{2} V$ .
  - +  $U_{Av} = 2\hat{U} / \pi = 460\sqrt{2} / \pi V$ .





## 4. APARATOS DE MEDIDA

### ✓ Introducción

La electricidad no es evaluable por ningún sentido humano, por ello son necesarios aparatos de medida que cuantifiquen las variables eléctricas: **corriente**, **tensión**, y **potencia**.

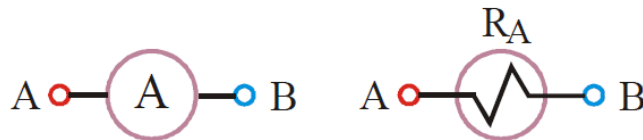




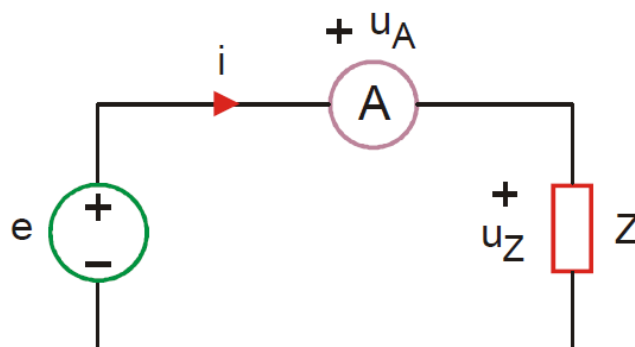
## ✓ Amperímetro y Voltímetro: símbolo, modelado, conexión y lectura

### ❖ Amperímetro

- Medidor de la intensidad de la corriente eléctrica.
- Símbolo:



- Modelo eléctrico ideal:
  - + Bobina de hilo de gran sección y pequeña longitud.
  - + Resistencia nula,  $R_A \rightarrow 0$  y  $u_{AB} = 0$  (cortocircuito).
- Conexión:
  - + En **serie** con la carga o la fuente.

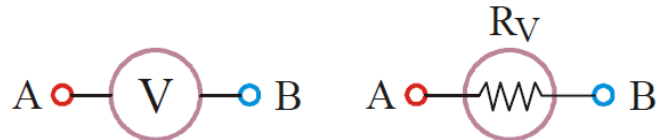


- Lectura de  $A =$  valor medio o **eficaz**.

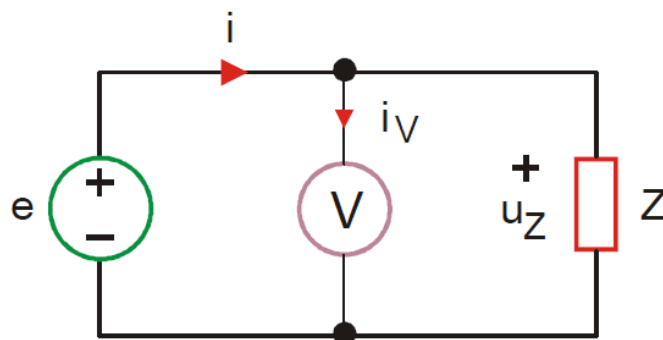


### ❖ Voltímetro

- Medidor de la tensión o diferencia de potencial.
- Símbolo:



- Modelo eléctrico ideal:
  - + Bobina de hilo de bobina de pequeña sección y gran longitud.
  - + Impedancia infinita,  $R_V \rightarrow \infty$  e  $i_V = 0$  (circuito abierto).
- Conexión:
  - + En **paralelo** con la carga o la fuente.



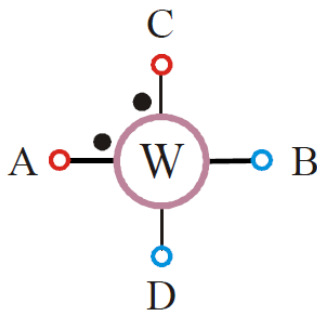
- Lectura de  $V =$  valor medio o **eficaz**.



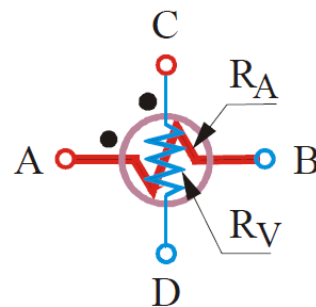
## ✓ Vatímetro: símbolo, modelado, conexión y lectura

- Medidor de la potencia media,  $P$ .

- Símbolo:



- Modelo eléctrico ideal

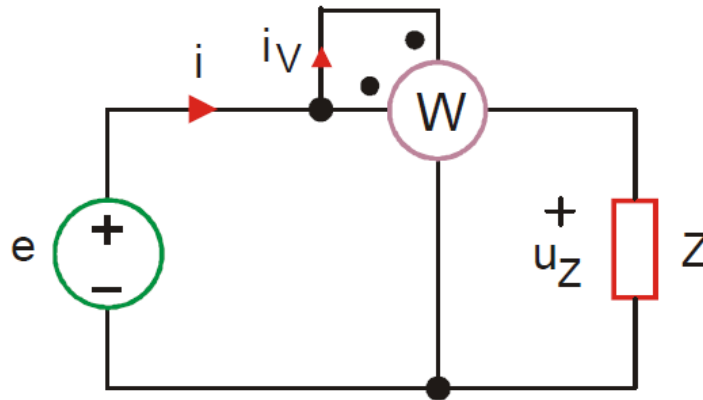


- + Bobina amperimétrica (A-B) de gran sección y pequeña longitud,  $R_A \approx 0$  (cortocircuito).
- + Bobina voltimétrica (C-D) de pequeña sección y gran longitud,  $R_V \rightarrow \infty$  (circuito abierto).
- + Hipótesis medidor ideal:
  - $R_V \rightarrow \infty$  e  $i_V \rightarrow 0$
  - $R_A \rightarrow 0$  y  $u_{AB} \rightarrow 0$ .
- Conexión para la medida:
  - + Bobina amperimétrica:
    - Conectada en **serie** con la carga o fuente.
  - + Bobina voltimétrica:
    - Conectada en **paralelo** con la carga o fuente.



# FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

## Elementos de circuitos lineales



- Lecturas de W: valor **medio**.
  - + Lectura en **corriente continua (D.C.)**:

$$\text{Lectura } W = E I = U_Z I = P_E = P_Z$$

- + Lectura **corriente alterna (A.C.)**:

$$\text{Lectura } W = \frac{1}{T} \int_0^T p_E d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T e i d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T u_Z i d\tau = P_E = P_Z$$

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-



## 5. ELEMENTOS PASIVOS DE DOS TERMINALES

### ✓ Elementos pasivos ideales

#### ❖ Introducción

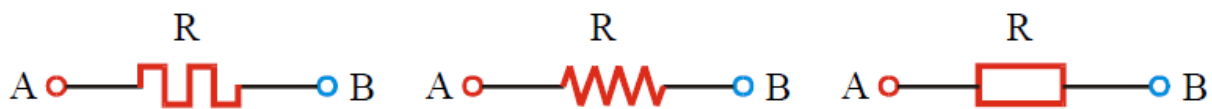
- Características:
  - + **Parámetros concentrados** (independientes de la distancia).
  - + **Lineales** (la forma de la onda de excitación es igual a la forma de la respuesta).
  - + **Invariables con el tiempo** (no son función del tiempo).
  - + **Bilaterales** (idénticas propiedades al intercambiar sus terminales).
- Tipos:
  - + Resistencias.
  - + Bobinas (inductancias).
  - + Condensadores (capacidades).

#### ❖ Resistencia

- Construcción: arrollamiento resistivo de  $N$  espiras, o trozos de materiales resistivos.
- Función: transforma la energía eléctrica en calor.



- Parámetros que la definen:
  - + Resistencia,  $R$  (unidad: ohmio,  $\Omega$ ).
    - Conductancia  $G=1/R$ , (unidad: siemens,  $S = \Omega^{-1}$ ).
  - + Potencia -media- máxima,  $P_{\text{máx.}}$
- Símbolos:



- Ecuación de la resistencia (Ley de Ohm, 1827):

$$u(t) = R \cdot i(t) \text{ e } i(t) = G \cdot u(t)$$

- Potencia instantánea

$$p_R(t) = u i = R i^2 = \frac{u^2}{R} = G u^2$$

- Potencia media,  $P_R$

$$P_R = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{R}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} i^2(\tau) d\tau$$

- + Corriente continua (D.C.):  $U$  e  $I$  son los **valores de continua**.

$$P_R = U \cdot I = R \cdot I^2$$

- + Corriente alterna (A.C.):  $U$  e  $I$ , son los **valores eficaces** de sus respectivas sinusoides.

$$P_R = U \cdot I = R \cdot I^2$$



- Fórmula de resistencia de conductor filiforme:

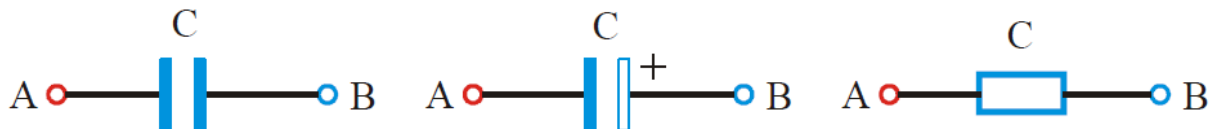
$$R = \rho \frac{l}{A} = \frac{l}{\sigma A}$$

- $\rho$  = resistividad ( $\Omega \text{ m}$ , práctica  $\Omega \text{ mm}^2/\text{m}$ ).
- $\sigma$  = conductividad (práctica  $\text{m}/\Omega \text{ mm}^2$ ).
- $l$  = longitud (m).
- $A$  = sección ( $\text{m}^2$ , práctica  $\text{mm}^2$ ).

### ❖ Condensador

- Construcción: placas conductoras separadas por un dieléctrico o aislante.
- Función: almacenar energía en forma de **campo eléctrico**.
- Parámetros que lo definen:
  - + Capacidad, **C** (unidad: faradio, F).
  - + Tensión máxima,  **$U_{\text{máx}}$**  (unidad: voltio, V).

- Símbolos:



- Ecuaciones:

$$q(t) = C \cdot u(t)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$$





- Consecuencias:

- + Generalmente, la tensión en bornes de un condensador es una **función continua**.
- + En régimen permanente de corriente continua,  $u(t) = U = \text{cte.} \rightarrow i = 0$  (**circuito abierto**).

- Potencia instantánea:

$$p_c(t) = ui = \frac{q}{C} \frac{dq}{dt}$$

- Energía de un condensador en un instante  $t$ :

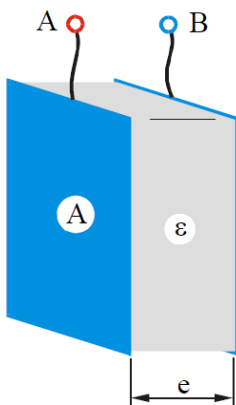
$$W_c(t_0, t) = \int_0^t p_c(t) dt = \int_0^t \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} dt = \frac{1}{2C} q^2 =$$

$$w_c(t) = \frac{1}{2} C u^2(t)$$

- Potencia media,  $P_C$ :

$$P_C = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W(0, t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left[ \frac{1}{2} C U^2 \right] = 0$$

- Fórmula de condensador plano:



$$C = \frac{\epsilon A}{e}$$

$C$  = capacidad (F).

$\epsilon$  = permitividad dieléctrica (F/m).

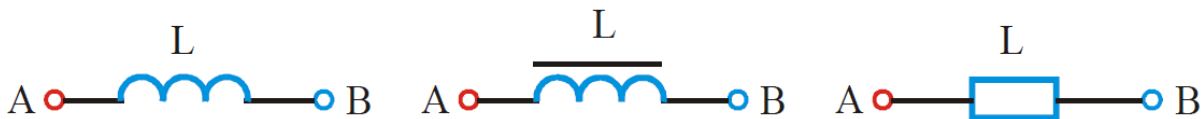
$A$  = superficie ( $\text{m}^2$ )

$e$  = espesor dieléctrico (m).



## ❖ Bobina

- Construcción: arrollamiento conductor de  $N$  espiras sobre núcleo magnético.
- Función: almacenador de energía en forma de **campo magnético**.
- Parámetros que la definen:
  - + Inductancia o coef. de autoinducción,  $L$  (henrio, H).
  - + Corriente máxima,  $I_{\text{máx.}}$  (unidad: amperio, A).
- Símbolos:



- Ecuaciones:

$$\Psi(t) = L \cdot i(t)$$

$$u = \frac{d\psi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

- Consecuencias
  - + En una bobina, generalmente, la corriente es una **función continua**.
  - + En régimen permanente de corriente continua,  $i = I = \text{cte.} \rightarrow u = 0$  (**cortocircuito**).



- Potencia instantánea

$$p_L(t) = ui = \frac{d\Psi}{dt} \frac{\Psi}{L}$$

- Energía en un intervalo

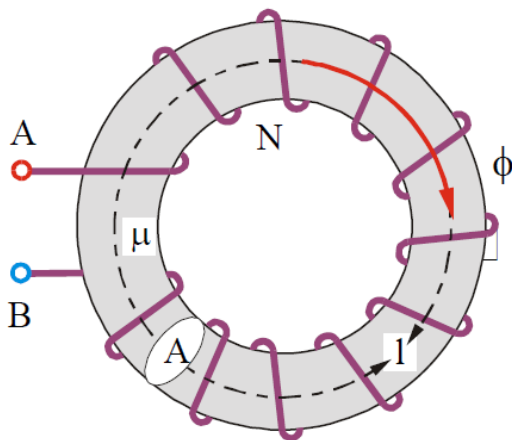
$$W_L(t_0, t) = \int_0^t p_L(t) dt = \int_0^t \frac{\Psi}{L} \frac{d\Psi}{dt} dt = \frac{1}{2L} \Psi^2 =$$

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i(t)^2$$

- Potencia media,  $P_L$ :

$$P_L = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W(0, t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left[ \frac{1}{2} LI^2 \right] = 0$$

- Fórmula de bobina toroidal o solenoide largo:



$$L = \frac{\mu N^2 A}{l}$$

L = inductancia (H).

M = permeabilidad toro (H/m).

N = número de espiras.

A = sección del toro (m<sup>2</sup>).

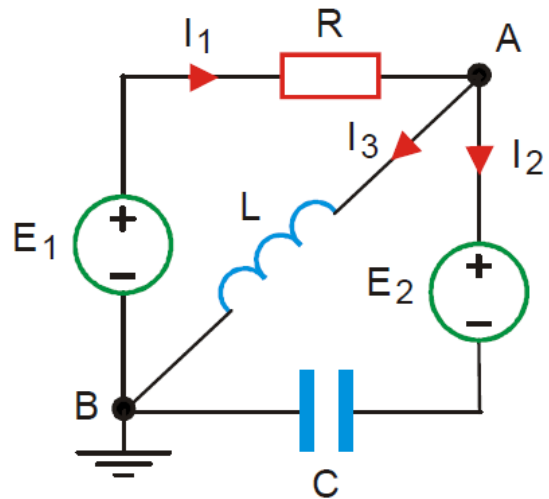
l = longitud media del toro (m).



Ejemplo 1.3.

La red de corriente continua de la figura, se encuentra en régimen permanente. Determinar:

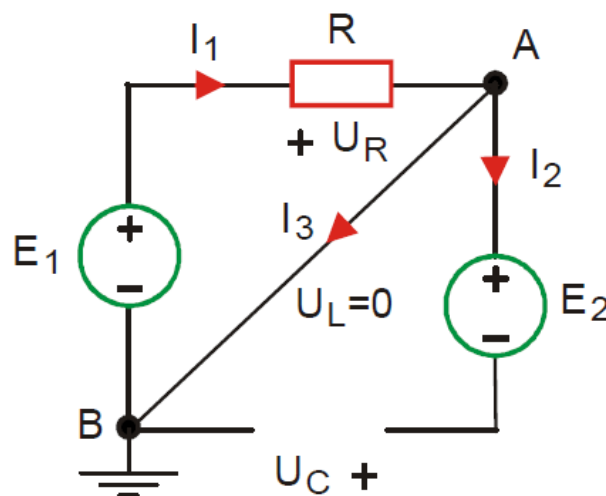
- Las corrientes de rama.
- Las potencias generadas por las fuentes.
- La potencia disipada por la resistencia.
- El flujo y la energía de la bobina.
- La carga y energía del condensador.
- El balance de potencias de la red.



❖ **Solución:**

a) Corrientes de rama.

+ Circuito equivalente en régimen permanente de c.c.



+ Análisis de la red:



## FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

### Elementos de circuitos lineales

$$I_2 = 0 \text{ A} , \quad U_L = 0 \text{ V} , \quad U_A = 0 \text{ V} , \quad U_C = -E_2 \text{ V} , \\ I_1 = I_3 = \frac{E_1}{R} \text{ A} .$$

b) Potencias generadas por las fuentes.

$$P_{E_1} = E_1 I_1 = \frac{E_1^2}{R} \text{ W} , \quad P_{E_2} = E_2 (-I_2) = 0 \text{ W} .$$

c) Potencia disipada por la resistencia.

$$P_R = R I_1^2 = \frac{E_1^2}{R} \text{ W} .$$

d) Flujo y energía de la bobina.

$$\Psi_L = L I_3 = \frac{L E_1}{R} \text{ Wb} , \quad W_L = \frac{1}{2} L I_3^2 = \frac{L E_1^2}{2 R^2} \text{ J} .$$

e) Carga y energía del condensador.

$$q_c = C U_c = -C E_2 \text{ C} , \quad W_C = \frac{1}{2} C U_C^2 = \frac{C E_2^2}{2} \text{ J} .$$

f) Balance de potencias de la red.

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{activos}} &= P_{E_1} + P_{E_2} = \frac{E_1^2}{R} \text{ W} \\ P_{\text{pasivos}} &= R I_1^2 = \frac{E_1^2}{R} \text{ W} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P_{\text{activos}} = P_{\text{pasivos}}$$





## 6. ASOCIACIÓN DE ELEMENTOS PASIVOS

### ✓ Introducción

- Sustitución de un conjunto de elementos por uno solo – equivalente–, tal que, presente la misma ecuación u-i que el conjunto.

### ✓ Immitancia operacional de los elementos pasivos

#### ❖ Introducción

- Contracción de los términos impedancia y admitancia.
- Se necesita una ecuación que nos relacione la  $u(t)$  y la  $i(t)$  de los tres elementos pasivos: resistencias, bobinas y condensadores. Para ellos se utilizará el **operador de Heaviside**.

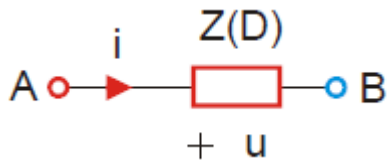
#### ❖ Operador de Heaviside D:

$$D \equiv \frac{d(\bullet)}{dt} \quad ; \quad \frac{1}{D} \equiv \int_{-\infty}^t (\bullet) dt$$



### ❖ Impedancia $Z(D)$

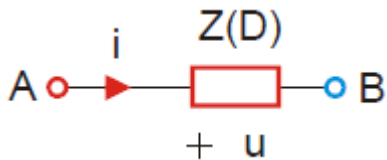
- Definición:



$$u = Z(D) i$$
$$Z(D) = \frac{u}{i}$$

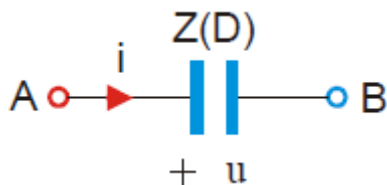
- Aplicación a los elementos pasivos:

+ Resistencia:



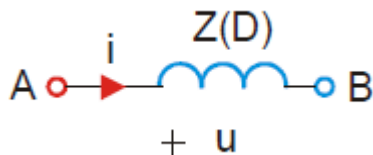
$$u = R i$$
$$Z(D) = R$$

+ Condensador:



$$i_c = C \frac{du}{dt} \rightarrow u_c = \frac{1}{C} \int i_c dt = \frac{i_c}{CD}$$
$$Z(D) = \frac{1}{CD}$$

+ Bobina:



$$U_L = L \frac{di}{dt} = LDi$$
$$Z(D) = LD$$

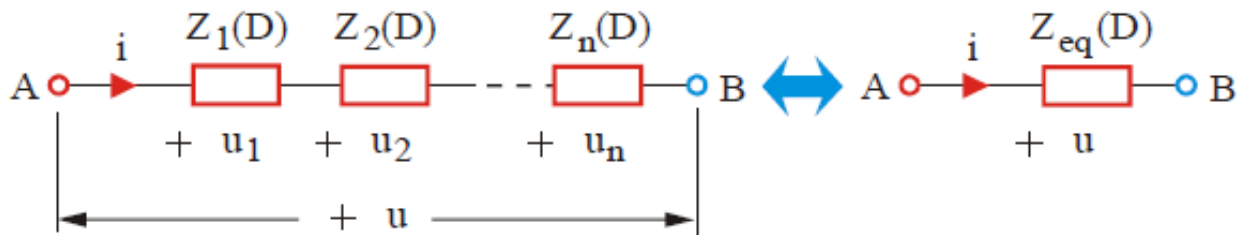
### Admitancia $Y(D)$

- Definición:  $Y(D) = \frac{1}{Z(D)}$



## ✓ Asociación serie o divisor de tensión

### ❖ • Esquemas



### ❖ Aplicando la SLK y la equivalencia de redes

$$u = \sum_{k=1}^n u_k = Z_1 i + Z_2 i + \dots + Z_n i = \Leftrightarrow u = Z_{eq} i \\ = (Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n) i$$

- Identificando ambos miembros,

$$Z_{eq} = \sum_{k=1}^n Z_k = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

### ❖ Regla del divisor de tensión

$$i = cte. \Rightarrow \frac{u_k}{Z_k} = \frac{u}{Z_{eq}} = cte. \Rightarrow \frac{u_1}{Z_1} = \frac{u_2}{Z_2} = \dots = \frac{u}{Z_{eq}}$$





❖ Casos particulares:

- Resistencias:  $Z(D) = R$

$$R_{eq} = \sum_{k=1}^n R_k = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

- Bobinas:  $Z(D) = L D$

$$L_{eq} = \sum_{k=1}^n L_k = L_1 + L_2 + \dots + L_n$$

- Condensador:  $Z(D) = 1/CD$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

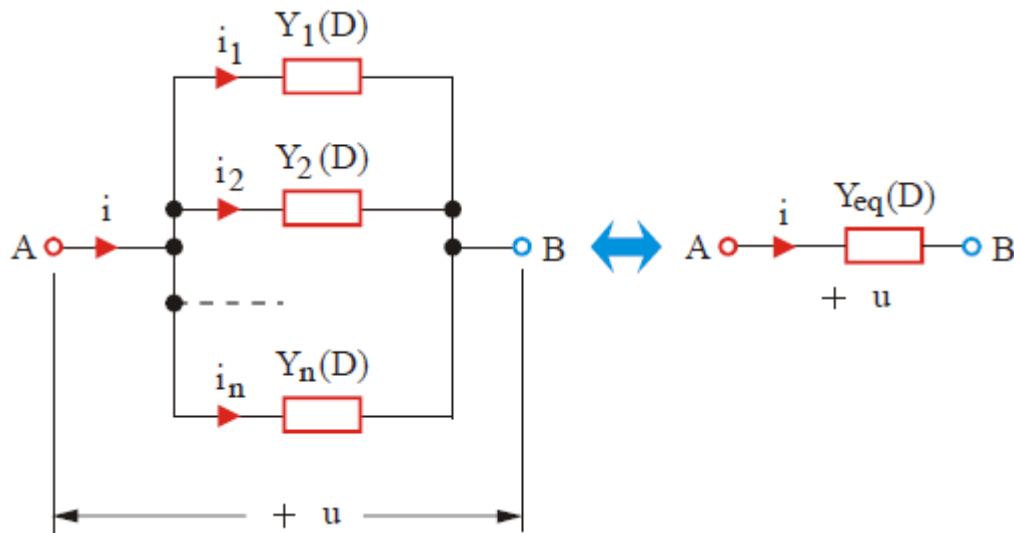
- Dos condensadores (**producto entre la suma**):

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$



## ✓ Asociación en derivación o divisor de corriente

### ❖ Esquemas



### ❖ Aplicando la PLK y la equivalencia de redes.

$$i = \sum_{k=1}^n i_k = \frac{u}{Z_1} + \frac{u}{Z_2} + \dots + \frac{u_n}{Z_n} = \Leftrightarrow i = \frac{u}{Z_{eq}}$$
$$= \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n} \right) u$$

- Identificando ambos miembros,

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{Z_k} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n}$$

### ❖ Regla del divisor de corriente

$$u = \text{cte.} \rightarrow i_k Z_k = i_{eq} Z_{eq} = \text{cte.} \rightarrow i_1 Z_1 = i_2 Z_2 = \dots = i_{eq} Z_{eq}$$



### ❖ Casos particulares

- Resistencias:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

- Dos resistencias (**producto entre la suma**):

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

- Bobinas:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}$$

- Dos bobinas (**producto entre la suma**):

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

- Condensadores:

$$C_{eq} = \sum_{k=1}^n C_k = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$



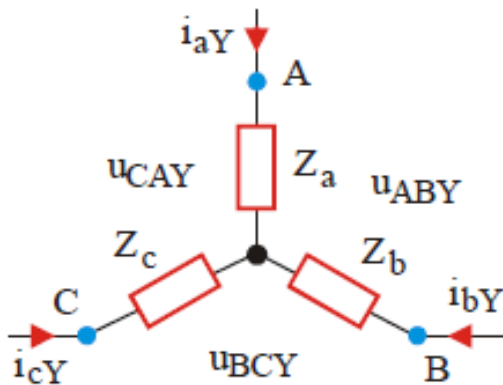
## ✓ Transformación de triángulo ( $\Delta$ ) a estrella ( $\lambda$ ) y viceversa ( $\lambda \rightarrow \Delta$ )

### ❖ Introducción

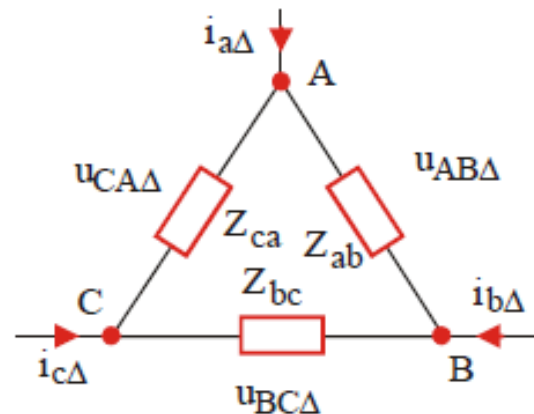
- Útil en ciertas transformaciones de redes pasivas.

### ❖ Esquemas de las conexiones

- Conexión estrella



- Conexión triángulo



### ❖ Principio de la transformación de impedancias

- Principio de equivalencia de ambas redes:

$$\begin{cases} i_{aY} = i_{a\Delta} \\ i_{bY} = i_{b\Delta} \\ i_{cY} = i_{c\Delta} \end{cases} ; \begin{cases} u_{ABY} = u_{AB\Delta} \\ u_{BCY} = u_{BC\Delta} \\ u_{CAY} = u_{CA\Delta} \end{cases}$$



- Transformación triángulo a estrella

$$Z_a = \frac{Z_{ab} Z_{ca}}{\sum Z_{\Delta}} , \quad Z_b = \frac{Z_{ab} Z_{bc}}{\sum Z_{\Delta}} , \quad Z_c = \frac{Z_{bc} Z_{ca}}{\sum Z_{\Delta}}$$

donde,  $\sum Z_{\Delta} = Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}$ .

- Transformación estrella a triángulo

$$Z_{ab} = \frac{\sum Z_i Z_j}{Z_c} , \quad Z_{bc} = \frac{\sum Z_i Z_j}{Z_a} , \quad Z_{ca} = \frac{\sum Z_i Z_j}{Z_b}$$

donde,  $\sum Z_i Z_j = Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a$

#### ❖ Casos particulares: impedancias idénticas

- Tres impedancias de idéntico valor:

$$Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ca} = Z_{\Delta}$$

$$Z_Y = \frac{Z_{\Delta} Z_{\Delta}}{Z_{\Delta} + Z_{\Delta} + Z_{\Delta}} = \frac{Z_{\Delta} Z_{\Delta}}{3Z_{\Delta}} = \frac{Z_{\Delta}}{3}$$

$$Z_Y = \frac{Z_{\Delta}}{3} , \quad Z_{\Delta} = 3Z_Y$$

- + Resistencias:  $Z(D) = R$

$$R_Y = \frac{R_{\Delta}}{3} , \quad R_{\Delta} = 3R_Y$$



## FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

### Elementos de circuitos lineales

+ Bobinas:  $Z(D) = LD$

$$L_Y = \frac{L_\Delta}{3} \quad , \quad L_\Delta = 3L_Y$$

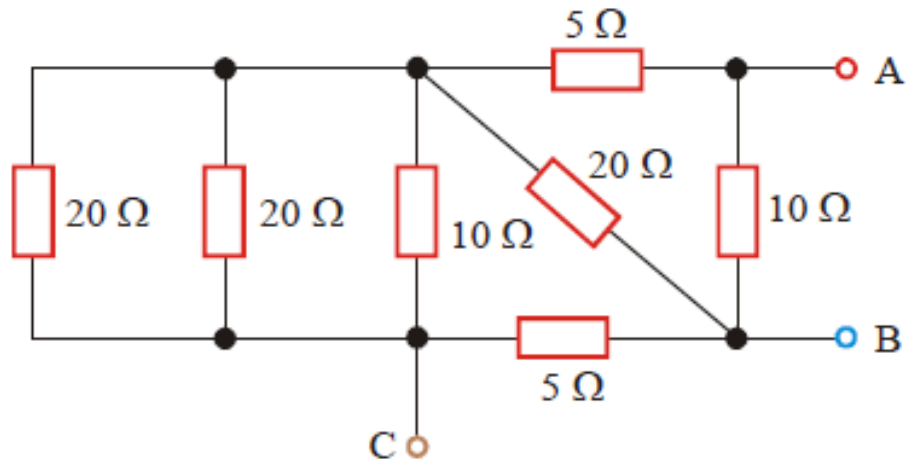
+ Condensadores:  $Z(D) = 1/CD$

$$C_Y = 3C_\Delta \quad , \quad C_\Delta = \frac{C_Y}{3}$$



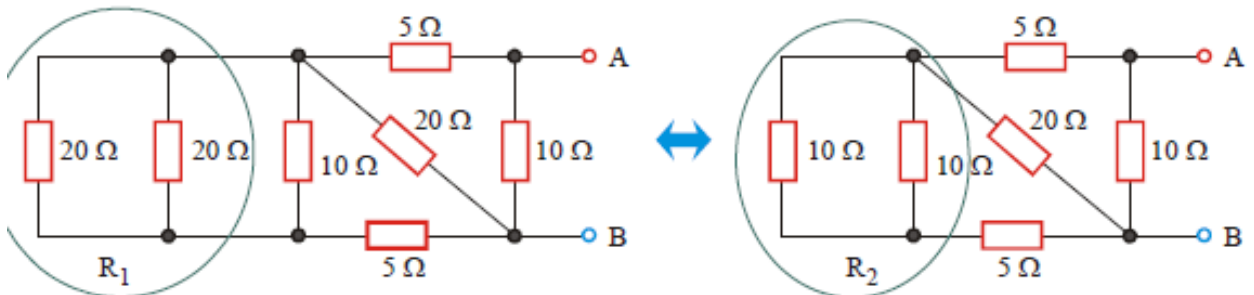
Ejemplo 1.4.

Sobre la red resistiva de la figura determinar, sucesivamente, la resistencia equivalente entre los terminales A-B, B-C y A-C.

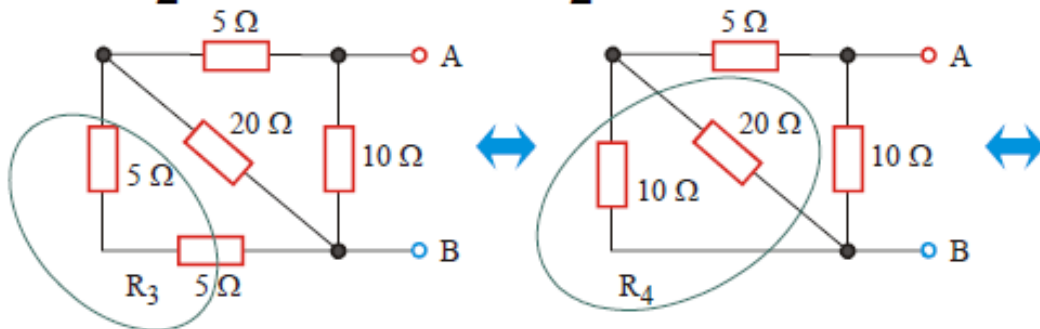


❖ Solución

- Cálculo de  $R_{eq,AB}$ :



$$+ R_1 = \frac{20}{2} = 10 \Omega \quad , \quad R_2 = \frac{10}{2} = 5 \Omega$$

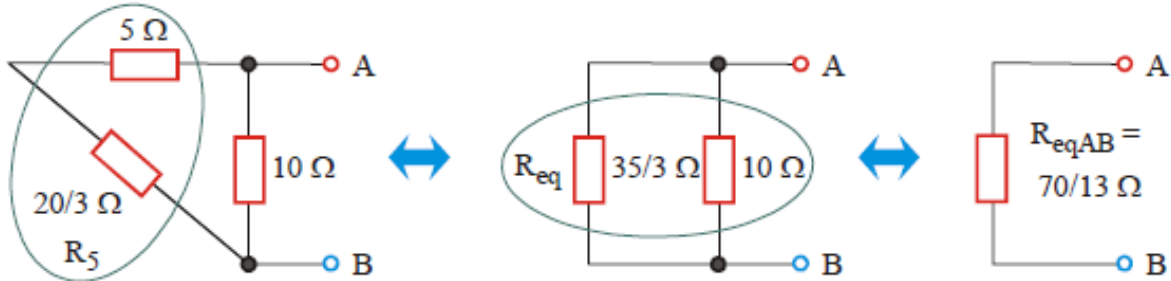




# FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

## Elementos de circuitos lineales

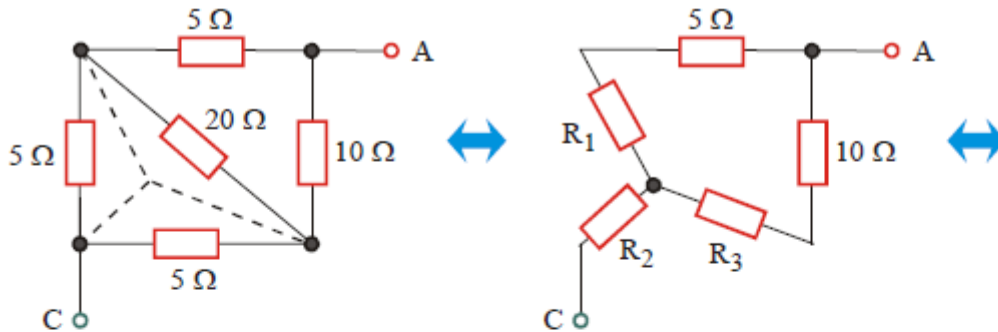
$$+ R_3 = 5 + 5 = 10 \, \Omega \quad , \quad R_4 = \frac{10 \cdot 20}{10 + 20} = \frac{20}{3} \, \Omega$$



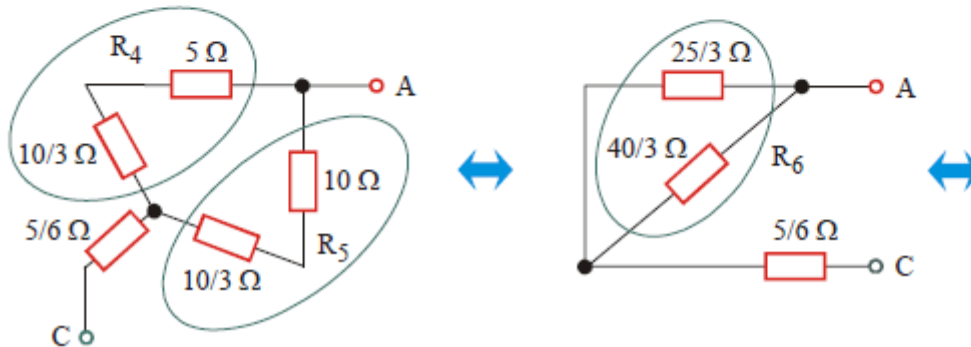
$$+ R_5 = \frac{20}{3} + 5 = \frac{35}{3} \, \Omega \quad ,$$

$$R_{eqAB} = \frac{\frac{35}{3} \cdot 10}{\frac{35}{3} + 10} = \frac{70}{13} \, \Omega$$

- Cálculo de  $R_{eq,AC}$ :



$$+ R_1 = \frac{5 \cdot 20}{30} = \frac{10}{3} \, \Omega, \quad R_2 = \frac{5 \cdot 5}{30} = \frac{5}{6} \, \Omega, \quad R_3 = \frac{5 \cdot 20}{30} = \frac{10}{3} \, \Omega$$

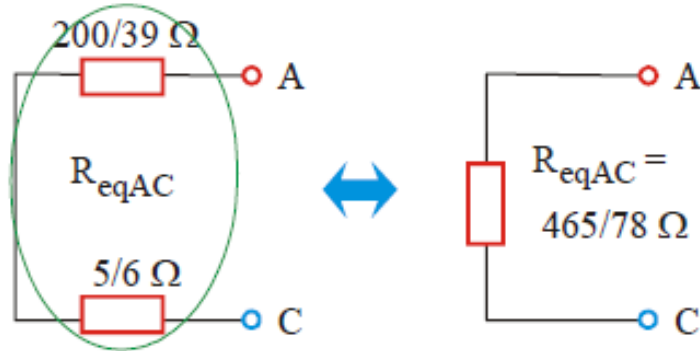






FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA  
Elementos de circuitos lineales

$$+ R_4 = \frac{10}{3} + 5 = \frac{25}{3} \Omega, \quad R_5 = \frac{10}{3} + 10 = \frac{40}{3} \Omega$$



$$+ R_6 = \frac{\frac{25}{3} \cdot \frac{40}{3}}{\frac{25}{3} + \frac{40}{3}} = \frac{200}{39} \Omega, \quad R_{eqAC} = \frac{200}{39} + \frac{5}{6} = \frac{465}{78} \Omega$$

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-



## 7. ELEMENTOS ACTIVOS DE DOS TERMINALES

### ✓ Introducción

#### ❖ Generalidades

- En general, transforman cualquier tipo de energía en energía eléctrica:
  - + Química: pilas y baterías.
  - + Mecánica: dinamos, alternadores.
  - + Solar: células fotovoltaicas.
- Tipos
  - + Fuentes de tensión.
  - + Fuentes de corriente o intensidad.
- Regímenes de funcionamiento
  - + Generador.
  - + Motor.
- Clases
  - + Ideales.
  - + Reales: batería, alternador, motor, etc.

Nota: En lo que sigue, las fuentes serán máquinas rotativas excitadas en D.C. y con sólo pérdidas por efecto Joule.

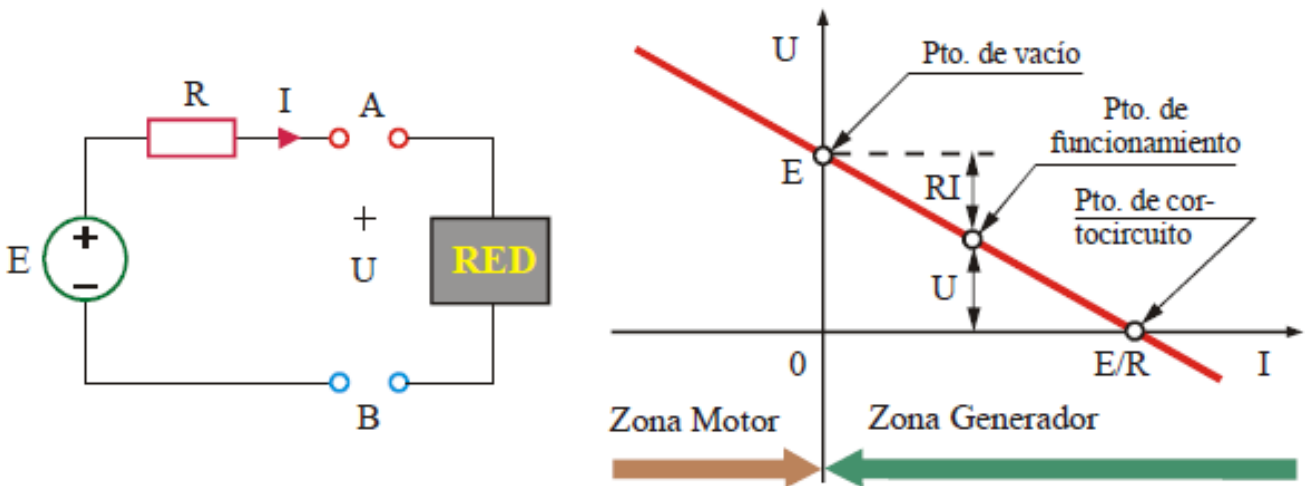


## ✓ Fuente real de tensión

### ❖ Parámetros que la definen

- F.e.m. o tensión de fuente,  $E$  (V)
- Resistencia interna,  $R$  ( $\Omega$ )
- Potencia útil máxima,  $P_{\text{máx.}}$  (W)

### ❖ Símbolo



### ❖ Ecuación característica: $U = f(I)$

- Aplicando la SLK:  $U = E - R \cdot I$
- Punto de funcionamiento
  - + Par de valores  $(U, I)$  que verifican la característica.
  - + Es **función de la red externa**.
- Puntos notables de la característica
  - + **Punto de vacío**:  $I = 0$ ,  $U_0 = E$  (tensión de vacío)
  - + **Punto de cortocircuito**:  $U = 0$ ,  $I_{\text{cc}} = E / R$  (corriente de cortocircuito).



- Zonas de funcionamiento:
  - + Generador: para todo  $U, I > 0$ .
  - + Motor:  $U > 0, I < 0$ .

### ❖ Potencias

- Generador
  - + Multiplicando por (+I) la ecuación característica:

$$U \cdot I = E \cdot I - R I^2 \Rightarrow P_u = P_g - P_p$$

- + Potencia útil (eléctrica),  $P_u = U \cdot I$
- + Potencia generada (mecánica),  $P_g = E \cdot I$
- + Potencia perdida (Joule),  $P_p = R \cdot I^2$
- + Rendimiento:

$$\eta_G = 100 \frac{P_u}{P_g} = 100 \left( 1 - \frac{P_p}{P_g} \right)$$

- Motor
  - + Multiplicando por (-I) la ecuación característica:

$$U \cdot (-I) = E \cdot (-I) + R I^2 \Rightarrow E \cdot (-I) = U \cdot (-I) - R I^2$$

↓

$$P_u = P_a - P_p$$



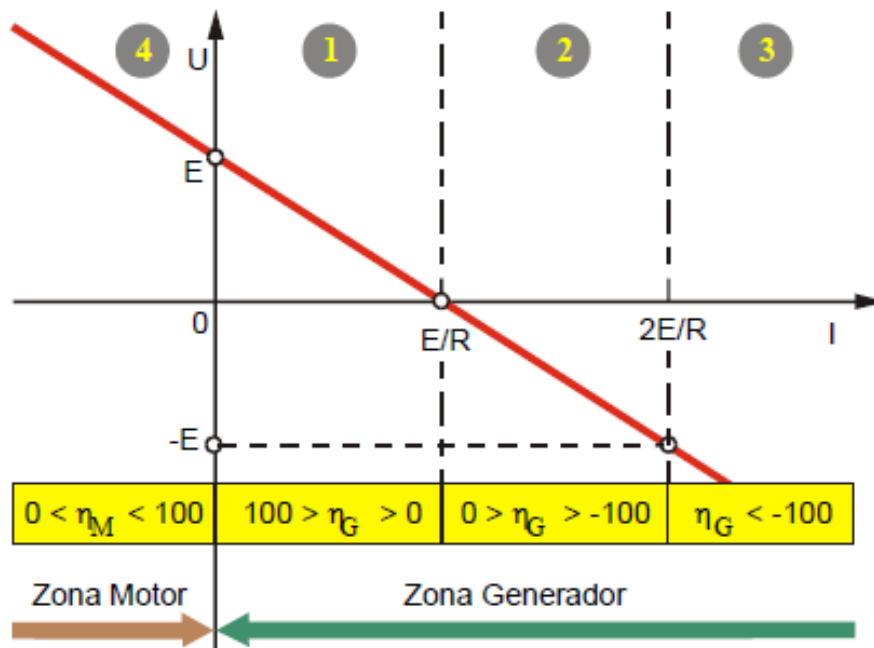
## FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

### Elementos de circuitos lineales

- + Potencia útil (mecánica),  $P_u = E \cdot (-I)$
- + Potencia absorbida (eléctrica),  $P_a = U \cdot (-I)$
- + Potencia perdida (Joule, calor),  $P_p = R \cdot I^2$
- + Rendimiento:

$$\eta_M = 100 \frac{P_u}{P_a} = 100 \left( 1 - \frac{P_p}{P_a} \right)$$

#### ❖ Evaluación del rendimiento en función de U e I.

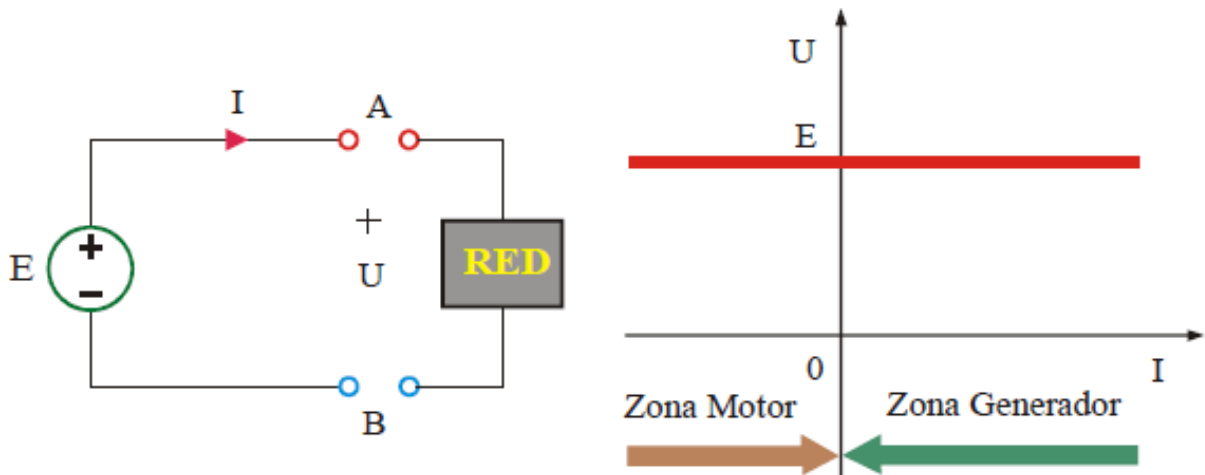


- Zona 1: funcionamiento normal como generador.
- Zonas 2 y 3: funcionamiento anormal como generador.
- Zona 4: funcionamiento normal como motor.



❖ Caso particular: fuente ideal de tensión

- Resulta cuando en la fuente real,  $R = 0$ .
- Gráficas de símbolo y curva característica.

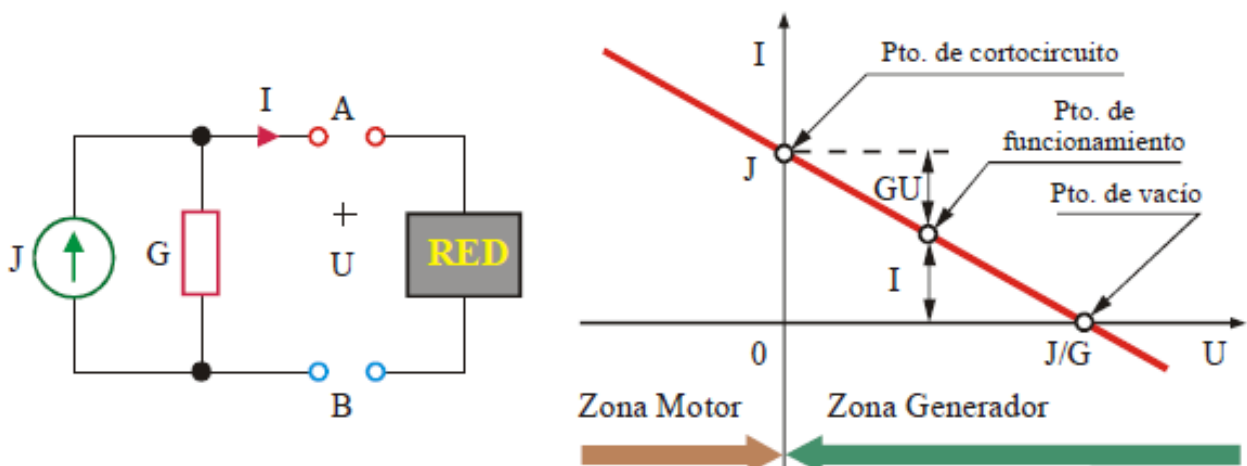


✓ Fuente real de corriente

❖ Parámetros que la definen

- Corriente de fuente,  $J$  (A).
- Conductancia interna,  $G$  (S).
- Potencia útil máxima,  $P_{\text{máx.}}$  (W)

❖ Símbolo





### ❖ Ecuación característica: $I = g(U)$

- Aplicando la PLK:  $I = J - G \cdot U$  para todo  $U$ .
- Punto de funcionamiento:
  - + Par de valores  $(U, I)$  que verifican la característica.
  - + Es **función de la red externa**.
- Puntos notables de la característica
  - + **Punto de vacío**:  $I = 0, U_0 = J / G$ .
  - + **Punto de cortocircuito**:  $U = 0, I_{cc} = J$ .
- Zonas de funcionamiento
  - + Generador: para todo  $I, U > 0$ .
  - + Motor:  $I > 0, U < 0$ .

### ❖ Potencias

- Generador
  - + Multiplicando por  $(+U)$  la ecuación característica:

$$U \cdot I = U \cdot J - G U^2 \quad \Rightarrow \quad P_u = P_g - P_p$$

- + Potencia útil (eléctrica),  $P_u = U \cdot I$ .
- + Potencia generada (mecánica),  $P_g = U \cdot J$ .
- + Potencia perdida (Joule),  $P_p = G U^2$ .
- + Rendimiento:

$$\eta_G = 100 \frac{P_u}{P_g} = 100 \left( 1 - \frac{P_p}{P_g} \right)$$



- Motor

- + Multiplicando por (-U) la ecuación característica:

$$(-U) \cdot J = (-U) \cdot I - G U^2 \Rightarrow P_u = P_a - P_p$$

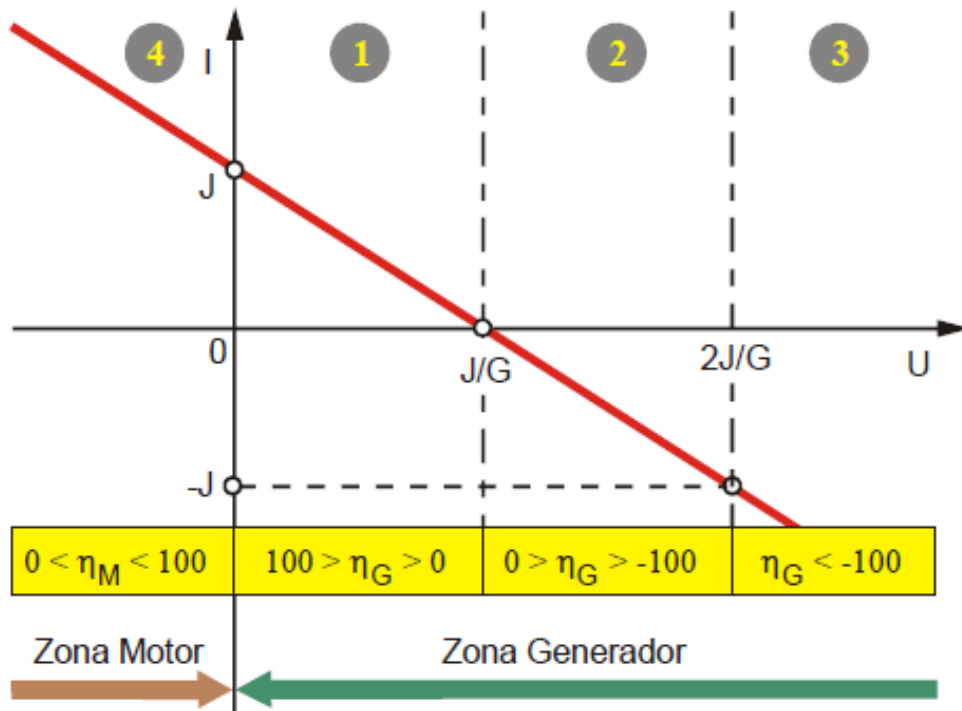
- + Potencia útil (mecánica),  $P_u = (-U) \cdot J$ .

- + Potencia absorbida (eléctrica),  $P_a = (-U) \cdot I$ .

- + Potencia perdida (Joule, calor),  $P_p = G U^2$ .

- + Rendimiento:

$$\eta_M = 100 \frac{P_u}{P_a} = 100 \left( 1 - \frac{P_p}{P_a} \right)$$



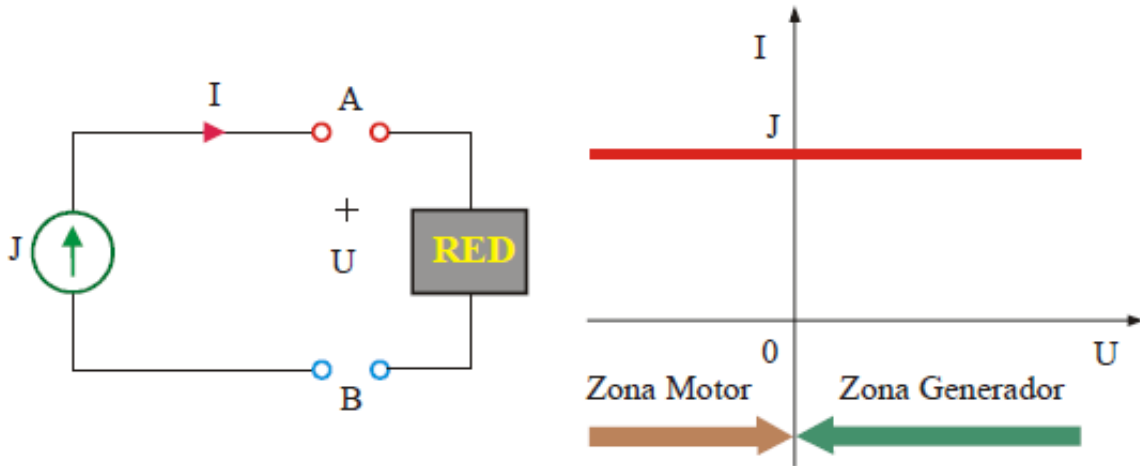
- Zona 1: funcionamiento normal como generador.
- Zonas 2 y 3: funcionamiento anormal como generador.
- Zona 4: funcionamiento normal como motor.





❖ Caso particular: fuente ideal de corriente

- Resulta cuando en la fuente real,  $G = 0 \rightarrow R = \infty$ .
- Gráficas de símbolo y característica

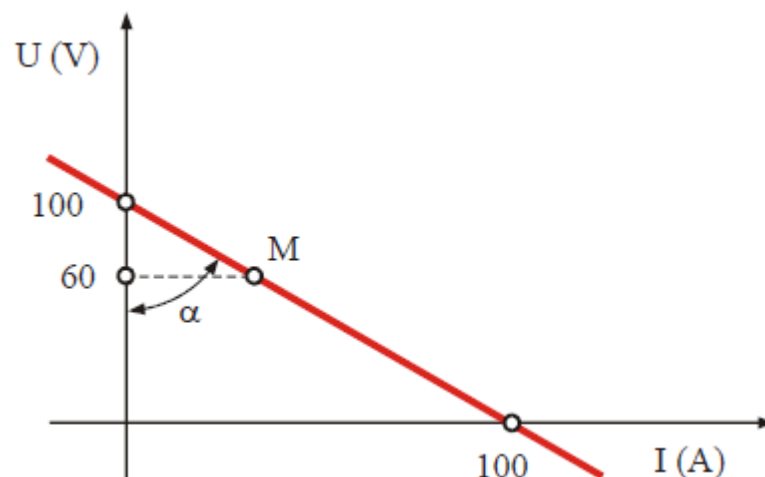




### Ejemplo 1.5.

La figura representa la característica de una fuente real de tensión, de corriente continua,  $U = f(I)$ . En relación con dicha fuente, determinar:

- Sus parámetros f.e.m. y resistencia interna.
- Qué elementos, de los siguientes, conectados de forma sucesiva a la fuente, verifican el punto M.
  - Resistencia de  $1,5 \Omega$ .
  - Fuente ideal de tensión de  $60 \text{ V}$ , como receptor.
  - Fuente ideal de corriente de  $40 \text{ A}$ , como receptor.



### ❖ Solución

a) Punto de funcionamiento M:

$$\tan \alpha = \frac{100}{100} = \frac{I_M}{40} \Rightarrow I_M = 40 \text{ A} ,$$

Punto de trabajo:  $(I_M = 40 \text{ A}, U_M = 60 \text{ V})$

- + Punto de vacío:  $I = 0, E = U = 100 \text{ V}$ .
- + Punto de cortocircuito:  $U = 0, R = E / I_{cc} = 1 \Omega$ .

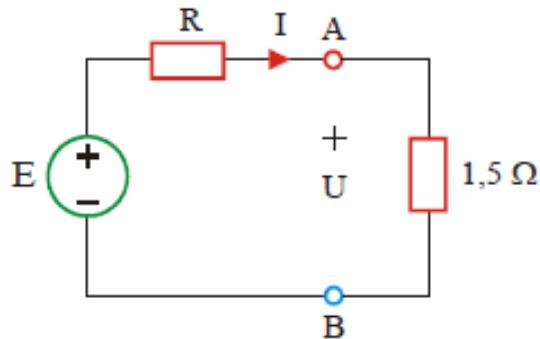
b) Verificando los elementos conectados:



# FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

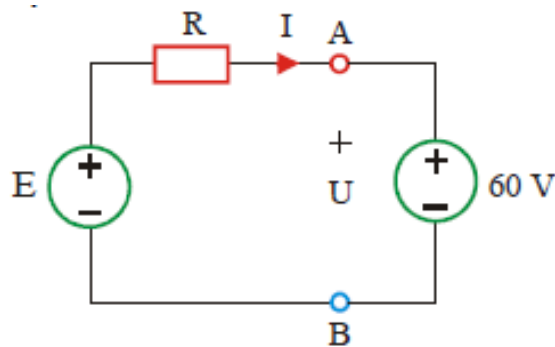
## Elementos de circuitos lineales

+ Resistencia de  $1,5 \Omega$ .



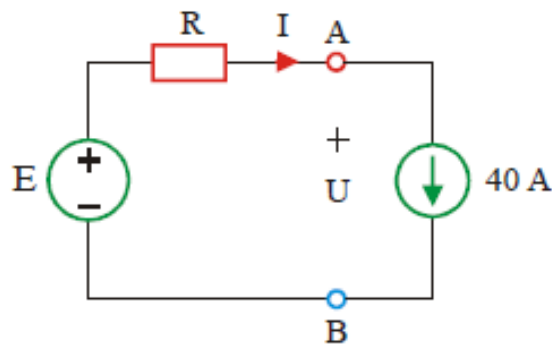
- $I = E / \sum R = 100 / 2,5 = 40 \text{ A}$ .
- $U = 1,5 \cdot 40 = 60 \text{ V}$ , OK.

+ Fuente ideal de tensión, receptor:



- $U = 60 \text{ V}$ .
- $I = (E - U) / R = 40 / 1 = 40 \text{ A}$ , OK.

+ Fuente ideal de corriente, como receptor:



- $I = 40 \text{ A}$ .
- $U = E - R \cdot I = 100 - 40 = 60 \text{ V}$ , OK.



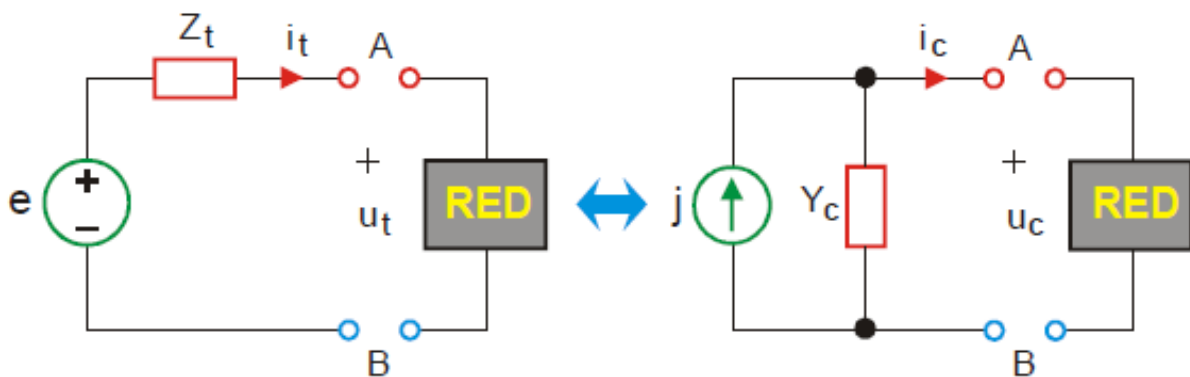
## 8. ASOCIACIÓN DE ELEMENTOS ACTIVOS

### ✓ Transformación de fuentes reales

#### ❖ Introducción

- Sustitución de una **fente de tensión** por otra de **corriente** y viceversa.
- La equivalencia se verifica de **terminales hacia fuera** de las fuentes  $\rightarrow u_t = u_c$  e  $i_t = i_c$ .

#### ❖ Demostración



- Aplicando la **2LK** y la **1LK** a las figuras, resulta:

$$\text{SLK: } e - Z_t i_t - u_t = 0$$

$$\text{PLK: } j - Y_c u_c - i_c = 0$$



$$i_t = \frac{e}{Z_t} - \frac{u_t}{Z_t}$$

$$i_c = j - Y_c u_c$$



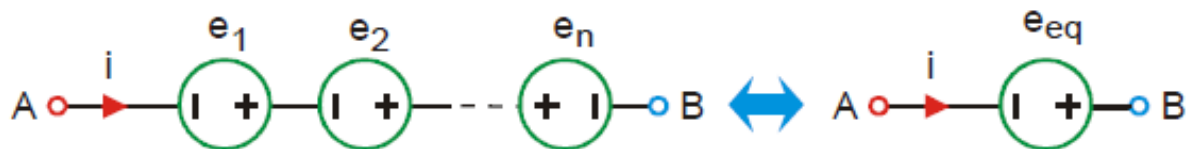
- Identificando términos, resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_c = \frac{1}{Z_t} = Y_t \\ j = \frac{e}{Z_t} = Y_t e \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Z_t = \frac{1}{Y_c} = Z_c \\ e = \frac{j}{Y_c} = j Z_c \end{array} \right.$$

## ✓ Asociación de fuentes ideales de tensión

### ❖ Conexión serie

- Esquemas



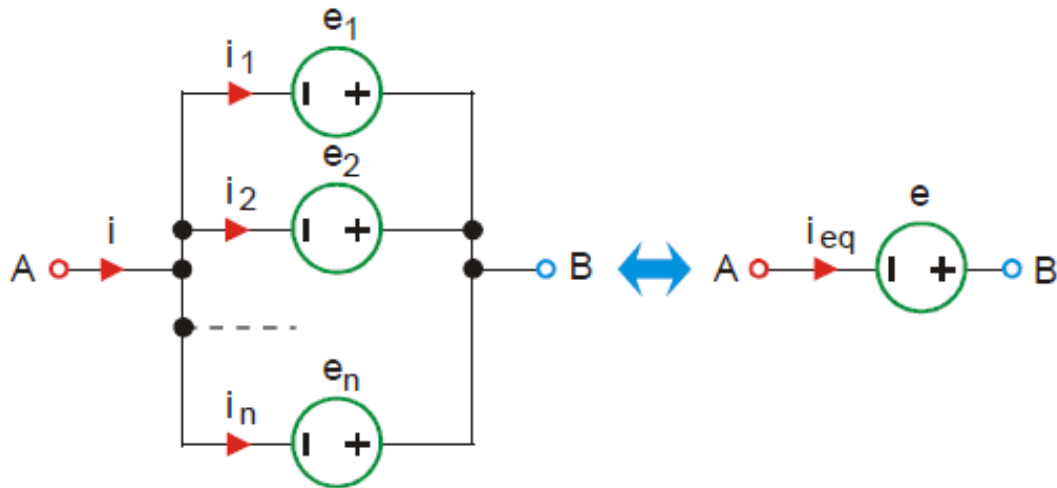
- Condición: la corriente  $i$  es la misma para toda  $e_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).
- Aplicando la SLK:

$$u_{BA} = e_{eq} = -e_n + \dots + e_2 + e_1 = \sum_{k=1}^n \pm e_k$$



### ❖ Conexión derivación

- Esquemas



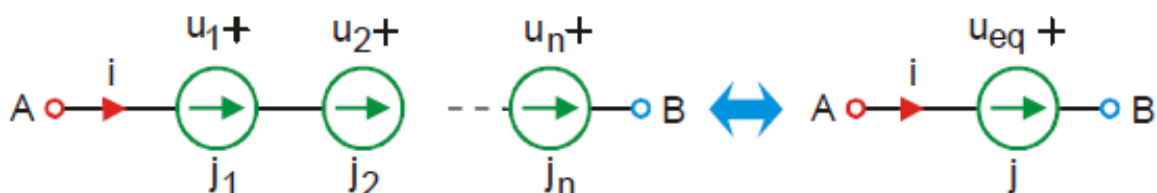
- Condición: la tensión  $u_{BA} = e$  y además es la misma para toda  $e_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).
- Aplicando la PLK:

$$i = i_{eq} = i_n + \dots + i_2 + i_1 = \sum_{k=1}^n \pm i_k$$

## ✓ Asociación de fuentes ideales de corriente

### ❖ Conexión serie

- Esquemas:



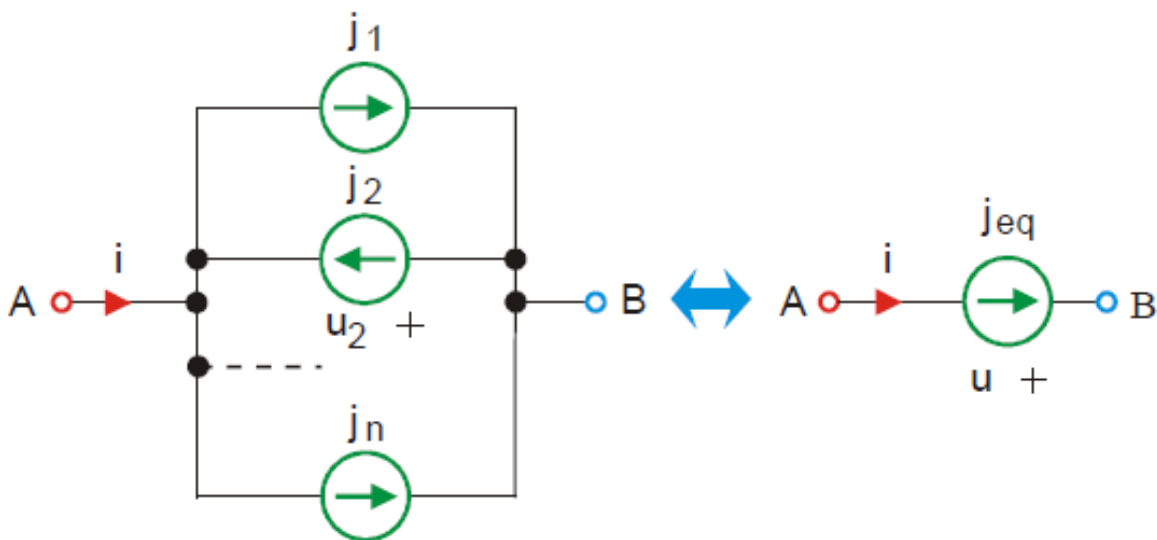


- Condición:  $j = j_k = i$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )
- Aplicando la SLK:

$$U_{BA} = U_{eq} = \sum_{k=1}^n \pm u_k$$

### ❖ Conexión derivación

- Esquemas



- Condición:  $u_{BA} = u_k = u$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )
- Aplicando la PLK:

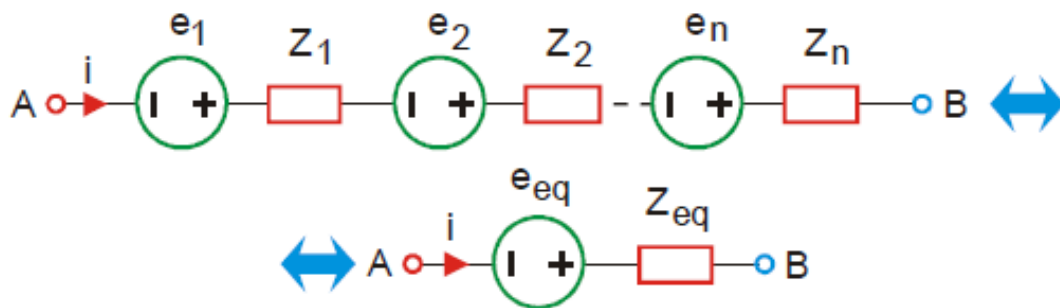
$$i = j_{eq} = j_1 - j_2 + \dots + j_n = \sum_{k=1}^n \pm j_k$$



## ✓ Asociación de fuentes reales de tensión

### ❖ Conexión serie

- Esquemas



- Condición:  $i = i_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )
- Fuente equivalente:

$$e_{eq} = e_1 + e_2 + \dots + e_n = \sum_{k=1}^n \pm e_k$$

- Impedancia equivalente:

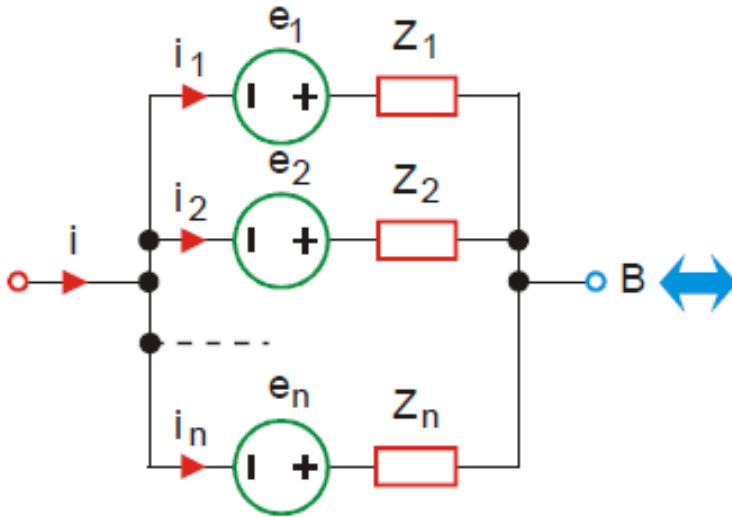
$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \sum_{k=1}^n Z_k$$





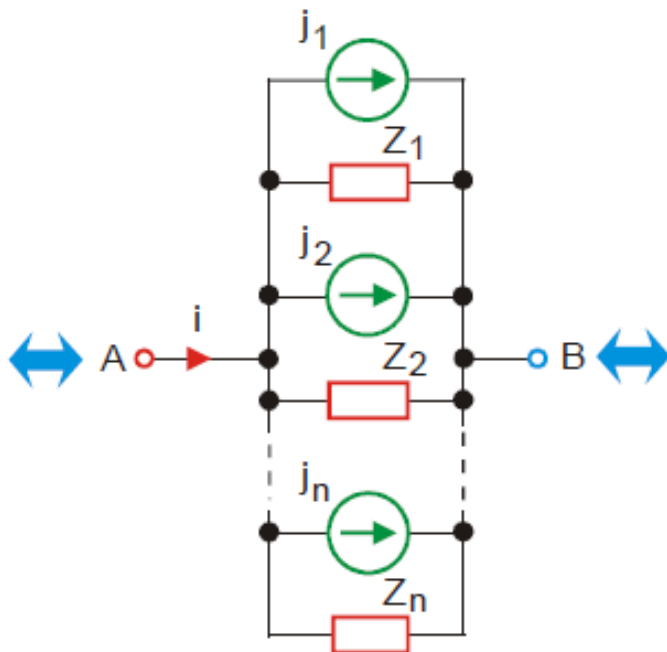
### ❖ Conexión derivación

- Esquema



- Paso 1, transformación:

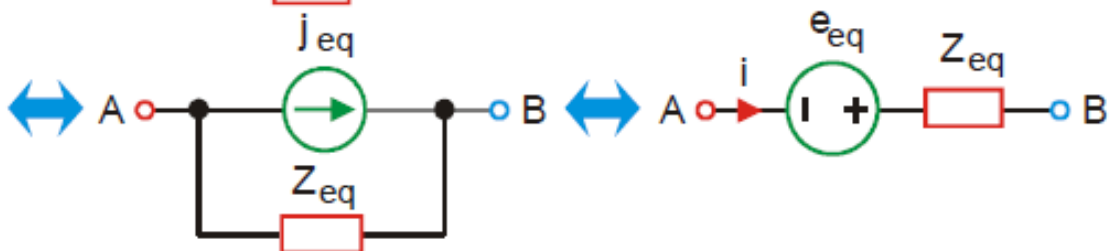
$$Z_k = Z_k ; j_k = \frac{e_k}{Z_k}$$



- Paso 2, asociación:

$$j_{eq} = \sum_{k=1}^n \pm j_k ;$$

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{Z_k}$$



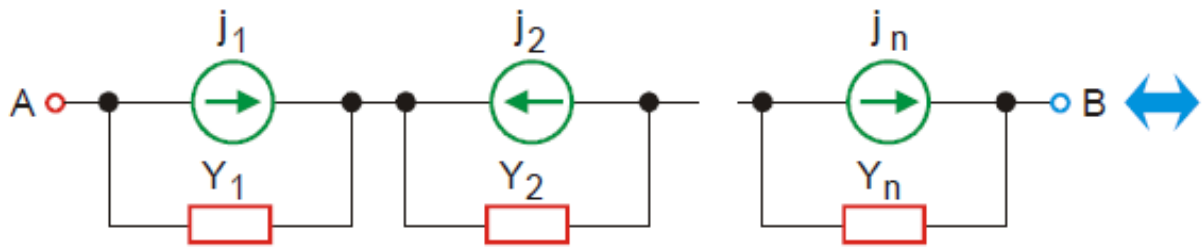
- Paso 3, transformación:  $Z_{eq} = Z_{eq}; e_{eq} = Z_{eq} \cdot j_{eq}$



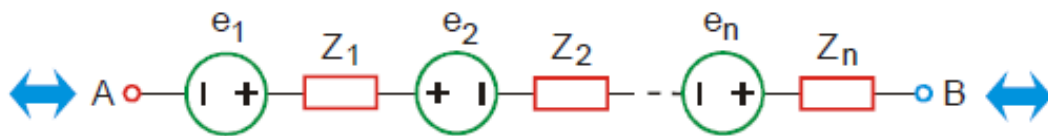
## ✓ Asociación de fuentes reales de corriente

### ❖ Conexión serie

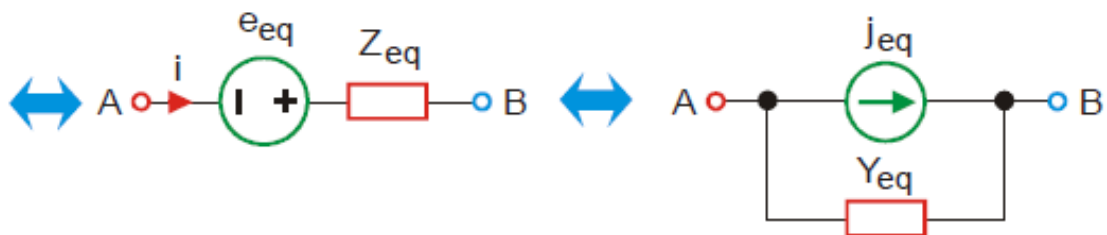
- Esquemas



- Paso 1, transformación:  $Z_k = \frac{1}{Y_k}$ ;  $e_k = \frac{j_k}{Y_k} = Z_k e_k$



- Paso 2, asociación:  $e_{eq} = \sum_{k=1}^n \pm e_k$ ;  $Z_{eq} = \sum_{k=1}^n Z_k$

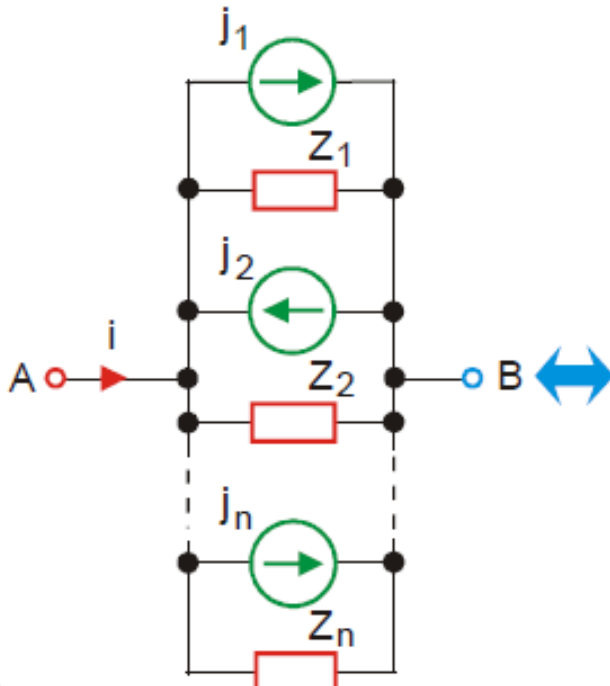


- Paso 3, transformación:  $Y_{eq} = \frac{1}{Z_{eq}}$ ;  $j_{eq} = \frac{e_{eq}}{Z_{eq}}$



### ❖ Conexión derivación

- Esquemas

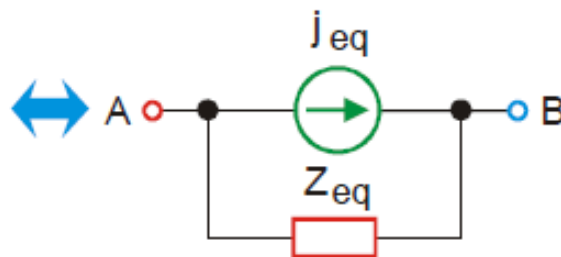


- Fuente equivalente:

$$i = j_{eq} = \sum_{k=1}^n \pm j_k$$

- Admitancia equivalente:

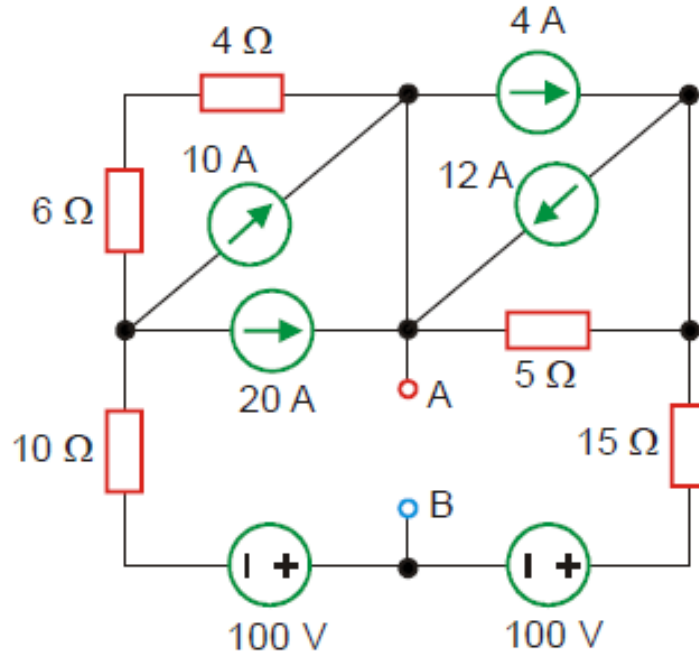
$$Y_{eq} = \sum_{k=1}^n Y_k$$





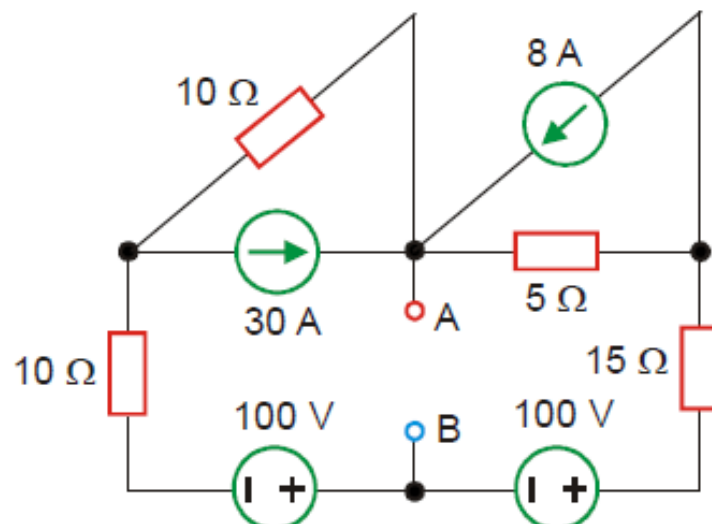
### Ejemplo 1.6.

Utilizando, únicamente, la asociación y transformación de elementos, determinar la d.d.p.  $U_{AB}$ .



### ❖ Solución

- Paso a: asociación en paralelo de las fuentes de corriente de 10 y 20 A, por un lado y, las de 4 y 12 A por otro. Asociación en serie de las resistencias de 6 y 4 ohmios.

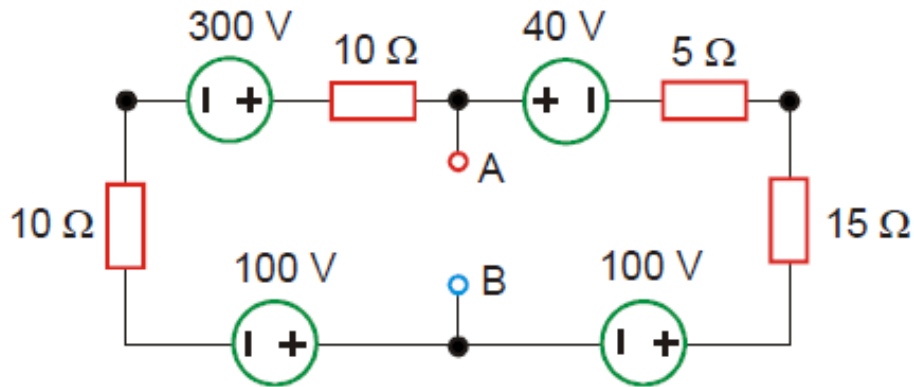




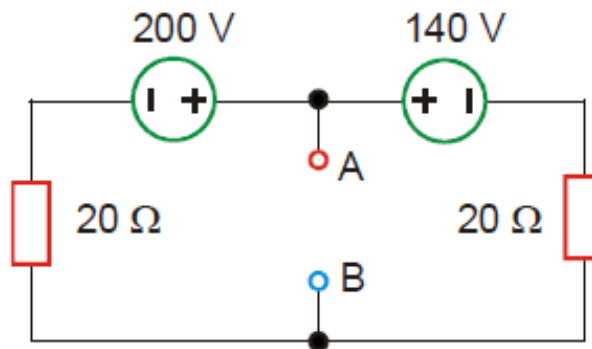
## FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

### Elementos de circuitos lineales

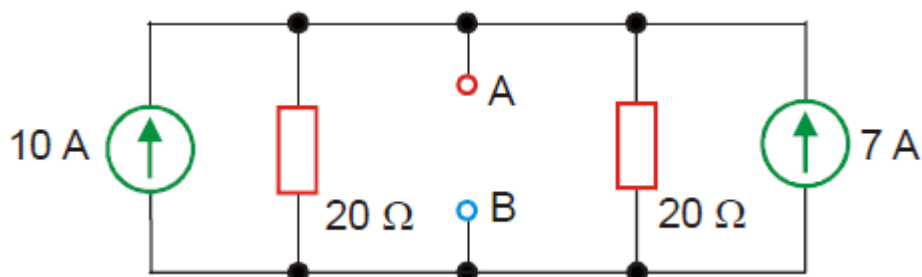
- Paso b: transformación de las dos fuentes reales de corriente de la red anterior.



- Paso c: asociación en serie de las fuentes reales de tensión, a la izquierda y derecha de los terminales A-B.



- Paso d: transformación de las fuentes reales de tensión, en fuentes reales de corriente.

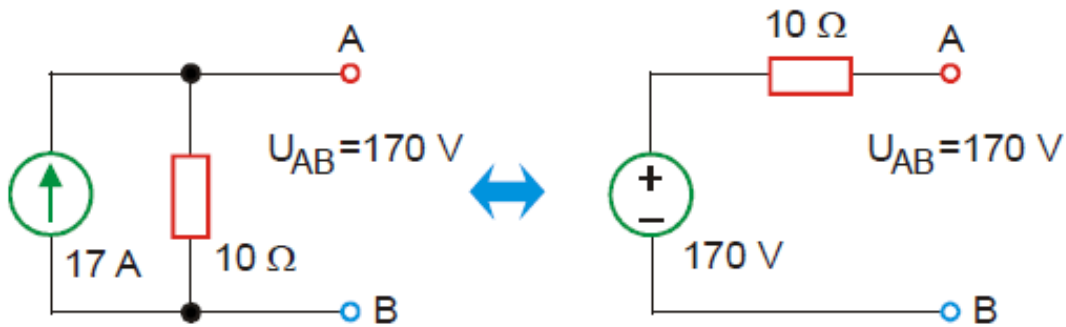




## FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

### Elementos de circuitos lineales

- Paso e: asociación en derivación de las fuentes reales de corriente, a la izquierda y derecha de los terminales A-B.



-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-



## 9. MAGNITUDES, ELEMENTOS Y CIRCUITOS DUALES

### ✓ Introducción

#### ❖ Proposiciones duales

“Definiciones, teoremas o expresiones que presentan una semejanza formal”. Por ejemplo:

- “dos puntos determinan una recta”
- “dos rectas determinan un punto”

#### ❖ Aplicación electrotécnica

- Herramienta que ahorra trabajo en la **demonstración de teoremas** y en la **resolución de algunas redes**.

#### ❖ Símbolo de dualidad

- Símbolo utilizado por E. Colin en 1948:  $\rightleftarrows$ .

### ✓ Magnitudes y elementos duales

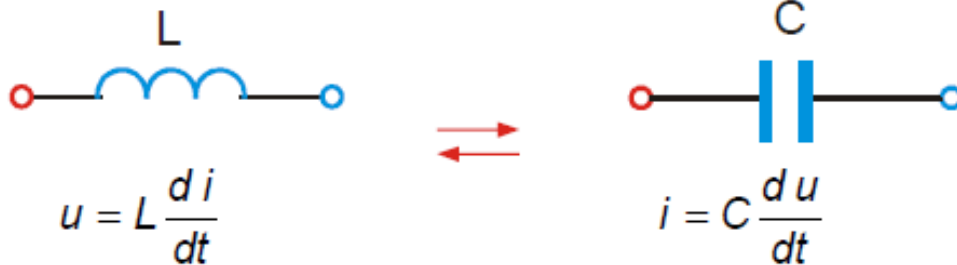
#### ❖ Algunos ejemplos

- Resistencia:

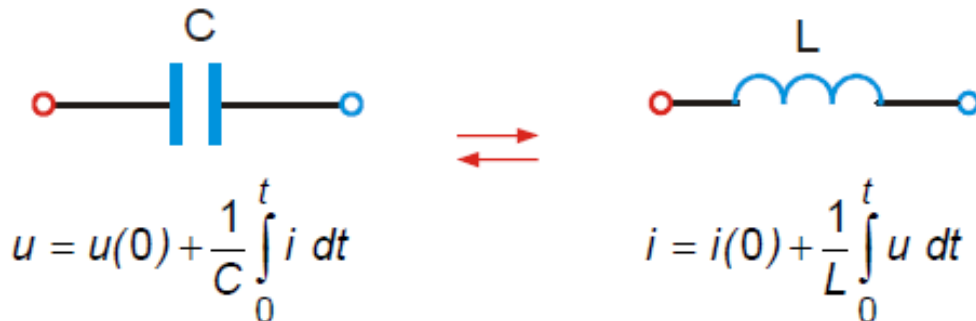




- Bobina:



- Condensador:



### ❖ Listado de magnitudes y elementos duales

- |                              |                   |                               |
|------------------------------|-------------------|-------------------------------|
| • tensión, ( $u$ )           | $\Leftrightarrow$ | intensidad, ( $i$ )           |
| • carga, ( $q$ )             | $\Leftrightarrow$ | flujo abrazado, ( $\psi$ )    |
| • resistencia, ( $R$ )       | $\Leftrightarrow$ | conductancia, ( $G$ )         |
| • inductancia, ( $L$ )       | $\Leftrightarrow$ | capacidad, ( $C$ )            |
| • impedancia, ( $Z$ )        | $\Leftrightarrow$ | admitancia, ( $Y$ )           |
| • fuente de tensión, ( $e$ ) | $\Leftrightarrow$ | fFuente de corriente ( $j$ )  |
| • P.L. de Kirchhoff          | $\Leftrightarrow$ | S.L. de Kirchhoff             |
| • cortocircuito, ( $u = 0$ ) | $\Leftrightarrow$ | circuito abierto, ( $i = 0$ ) |
| • red serie                  | $\Leftrightarrow$ | red derivación                |
| • malla                      | $\Leftrightarrow$ | nudo                          |
| • lazo                       | $\Leftrightarrow$ | corte                         |





❖ Magnitudes invariantes

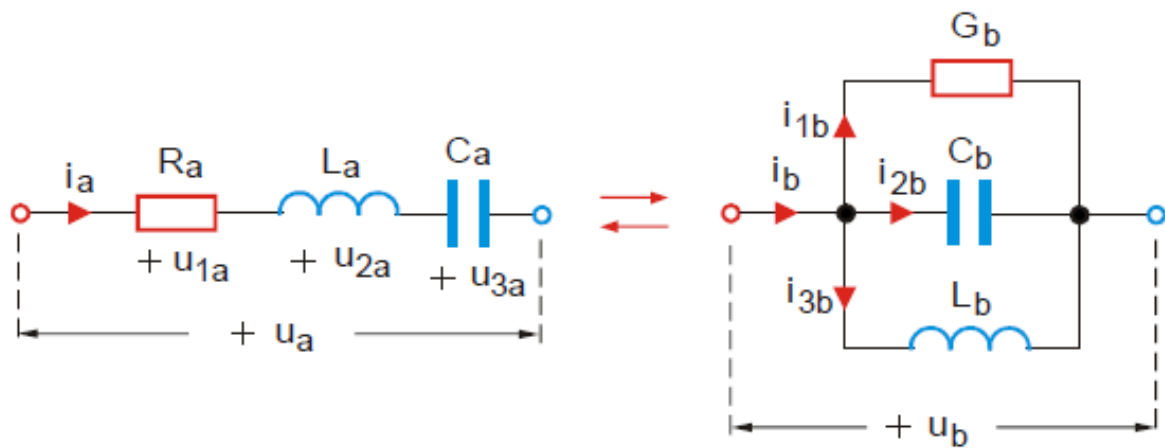
- tiempo ( $t$ )
- derivación  $\left(\frac{d \bullet}{dt}\right)$
- integración  $\left(\int \bullet dt\right)$
- potencia ( $p$ )                      potencia ( $p$ )
 

$p = u \cdot i$	=	$p = i \cdot u$
$p = R \cdot i^2$		$p = G \cdot u^2$
- energía ( $w$ )                      energía ( $w$ )
 

$w = u \cdot i \cdot t$	=	$w = i \cdot u \cdot t$
$w = \frac{1}{2} L \cdot i^2$		$w = \frac{1}{2} C \cdot u^2$

❖ Ejemplo de circuitos y magnitudes duales

- Redes duales



$$R_a \leftrightarrow G_b, \quad L_a \leftrightarrow C_b, \quad C_a \leftrightarrow L_b$$

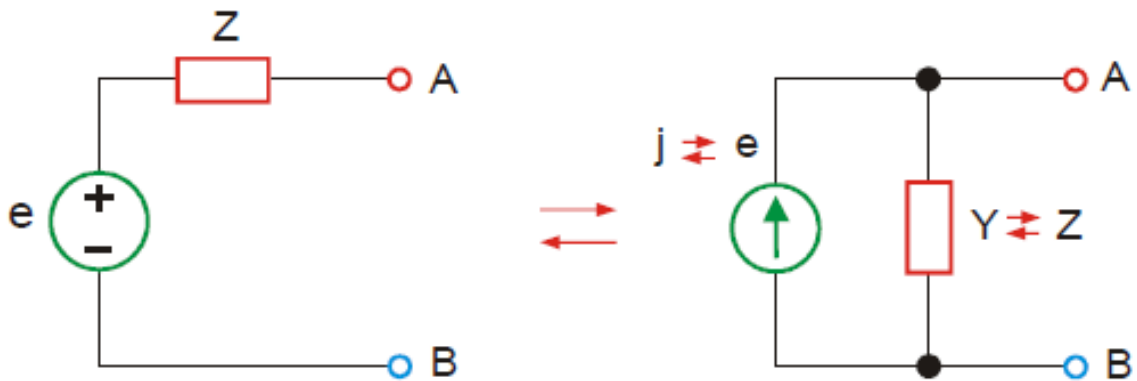
$$u_{1a} \leftrightarrow i_{1b}, \quad u_{2a} \leftrightarrow i_{2b}, \quad u_{3a} \leftrightarrow i_{3b}$$

$$u_a \leftrightarrow i_b, \quad i_a \leftrightarrow u_b.$$



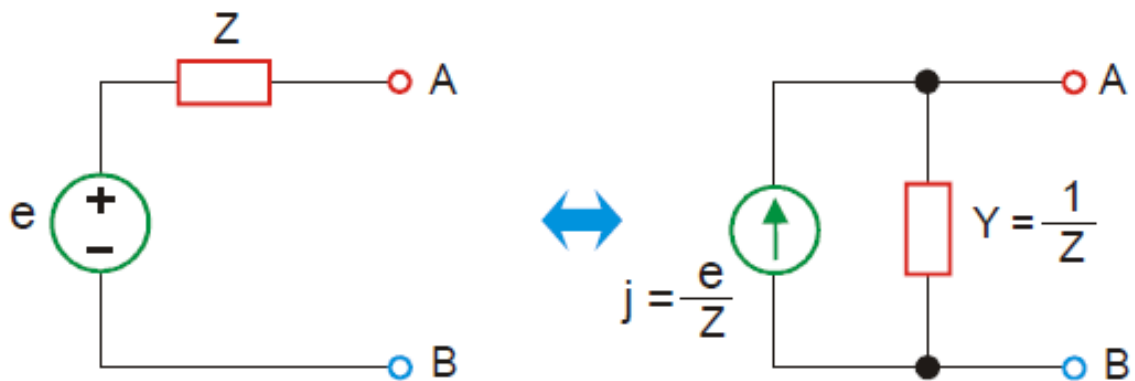
## ✓ Error usual: fuentes reales duales y equivalentes

### ❖ Fuentes reales duales



BOBINA:  $Z = LD \rightleftharpoons CD = Y$ : CONDENSADOR

### ❖ Obtención de la fuente equivalente



BOBINA:  $Z = LD \leftrightarrow LD = 1/Y$ : BOBINA



## 10. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Chua, L. et al. LINEAR AND NON LINEAR CIRCUITS. McGraw-Hill Book Company. New York. 1987.
- Eguíluz, L. I. et al. PRUEBAS OBJETIVAS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS. Eunsa. Pamplona. 2001.
- Madrigal, R.I. Teoría moderna de CIRCUITOS ELÉCTRICOS. Ed. Pirámide, S.A. Madrid. 1977.
- Nilsson, J. W. – Riedel, S. A. CIRCUITOS ELÉCTRICOS. Prentice Hall. México. 2001.
- Pastor, A. et al. CIRCUITOS ELECTRICOS. Volumen I. U.N.E.D. Madrid. 2005.
- Ras, E. TEORÍA DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS. FUNDAMENTOS. Marcombo Boixareu Editores. Barcelona. 1988.
- Ras, E. REDES ELÉCTRICAS Y MULTIPOLOS. Marcombo Boixareu Editores. Barcelona. 1980.
- Sánchez, P. et al. TEORÍA DE CIRCUITOS. Problemas y pruebas objetivas orientadas al aprendizaje. Pearson. Prentice Hall. Madrid. 2007.

