



Receptor 2: Motor

$$P_2 = \frac{P_{\text{útil}}}{\eta} = \frac{4,62}{0,84} = 5,5 \text{ kW} \quad , \quad \cos \varphi_2 = 0,83 \quad ,$$

$$\varphi_2 = 33,90^\circ \text{ ind.} \quad , \quad \tan \varphi_2 = 0,67 \quad ,$$

$$Q_2 = \tan \varphi_2 P_2 = 3,70 \text{ k var (ind)} \quad ,$$

$$S_2 = \sqrt{P_2^2 + Q_2^2} = 6,63 \text{ kVA} \quad , \quad I_2 = \frac{S_2}{U} = \frac{6.630}{220} = 30,16 \text{ A} \quad ,$$

$$Z_2 = \frac{U}{I_2} = \frac{220}{30,16} = 7,29 \quad \Omega$$

Receptor 3: Batería condensadores

$$P_3 = 0 \text{ kW} \quad , \quad S_3 = Q_3 = 4 \text{ kVA} = -4 \text{ k var} \quad , \quad \varphi_3 = 90^\circ \text{ cap.} \quad ,$$

$$I_3 = \frac{S_3}{U} = \frac{4.000}{220} = 18,18 \text{ A} \quad ,$$

$$C_3 = \frac{Q_3}{2\pi f U^2} = \frac{4.000}{2\pi \cdot 50 \cdot 220^2} = 263 \mu\text{F} \quad ,$$

Instalación: por Boucherot.

$$P = \sum P_k = 8,5 + 5,5 = 14 \text{ kW} \quad ,$$

$$Q = \sum \pm Q_k = 8,3 + 3,7 - 4 = 8 \text{ k var} \quad ,$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 16,12 \text{ kVA} \quad , \quad \tan \varphi = \frac{Q}{P} = 0,57 \quad ,$$



FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Elementos de circuitos lineales

$$\varphi = 29,74^\circ (i) \quad , \quad \cos \varphi = 0,87 \quad ,$$

$$I = \frac{S}{U} = \frac{16.120}{220} = 73,29 \text{ A}$$

Cuadro resumen:

	<i>U</i> (V)	<i>I</i> (A)	<i>P</i> (kW)	<i>Q</i> (kvar)i	<i>S</i> (kVA)	<i>φ</i> (°ind)
Horno	220	54	8,5	8,3	11,88	44,32
Motor	220	30,16	5,5	3,7	6,63	33,90
Batería	220	18,18	0	-4	4	-90
Instal.	220	73,29	14	8	16,12	29,74



☞ MEDIDORES DE POTENCIA ACTIVA Y REACTIVA

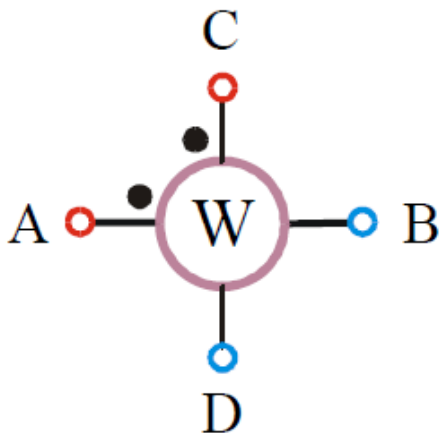
✓ Introducción

- Medidor de potencia activa: **vatímetro**.
- Medidor de potencia reactiva: **varímetro** o vármetro.
- Medidor de potencia aparente: **voltímetro** y **amperímetro**.

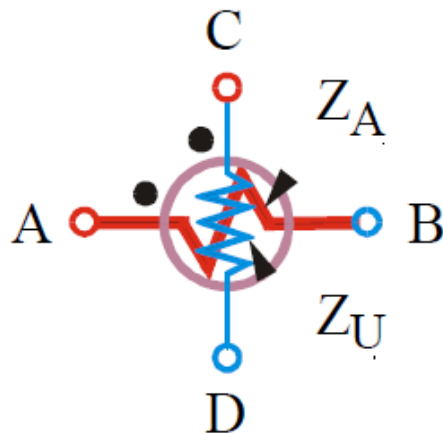
✓ Vatímetro

- Es el medidor de potencia activa o media en c.a.
- Mediante conexión especial, miden potencia reactiva.

❖ Símbolo:



❖ Modelo eléctrico ideal:

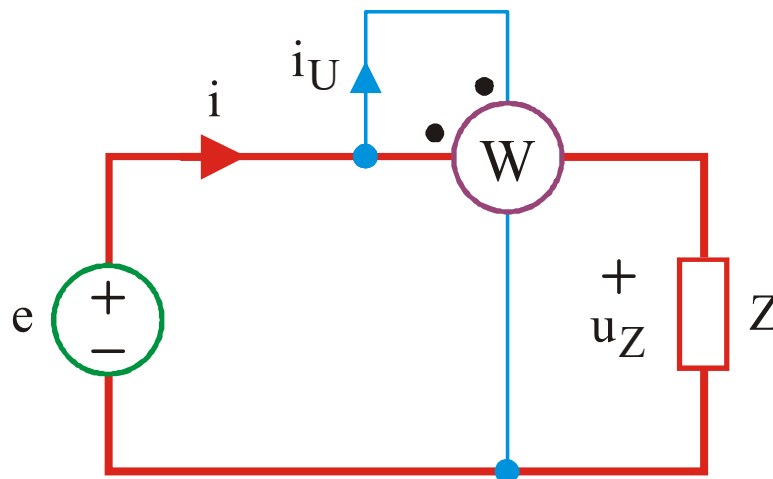




FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Elementos de circuitos lineales

- **Bobina amperimétrica** (A-B) de gran sección y pequeña longitud, $Z_A \approx 0$ (cortocircuito).
 - + Conectada en **serie** con la carga o fuente.
- **Bobina voltimétrica** (C-D) de pequeña sección y gran longitud, $Z_U \approx \infty$ (circuito abierto).
 - + Conectada en **paralelo** con la carga o fuente.
- Ambas bobinas presentan un carácter **resistivo**.



+ Lectura de W

- Visto desde la carga:

$$W = P_Z = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \cdot i(t) d\tau = |\bar{U}_Z| |\bar{I}| \cos(\bar{I}_U \wedge \bar{I}) = U_Z I \cos(\bar{U}_Z \wedge \bar{I})$$

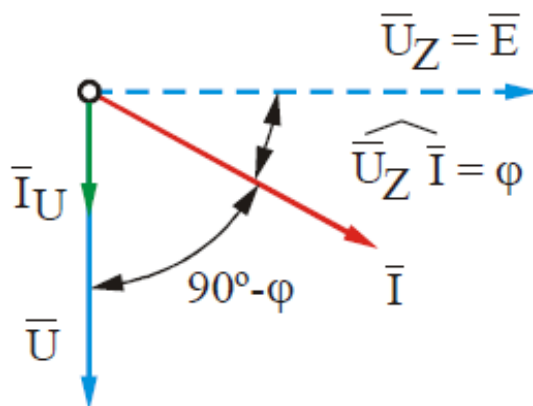
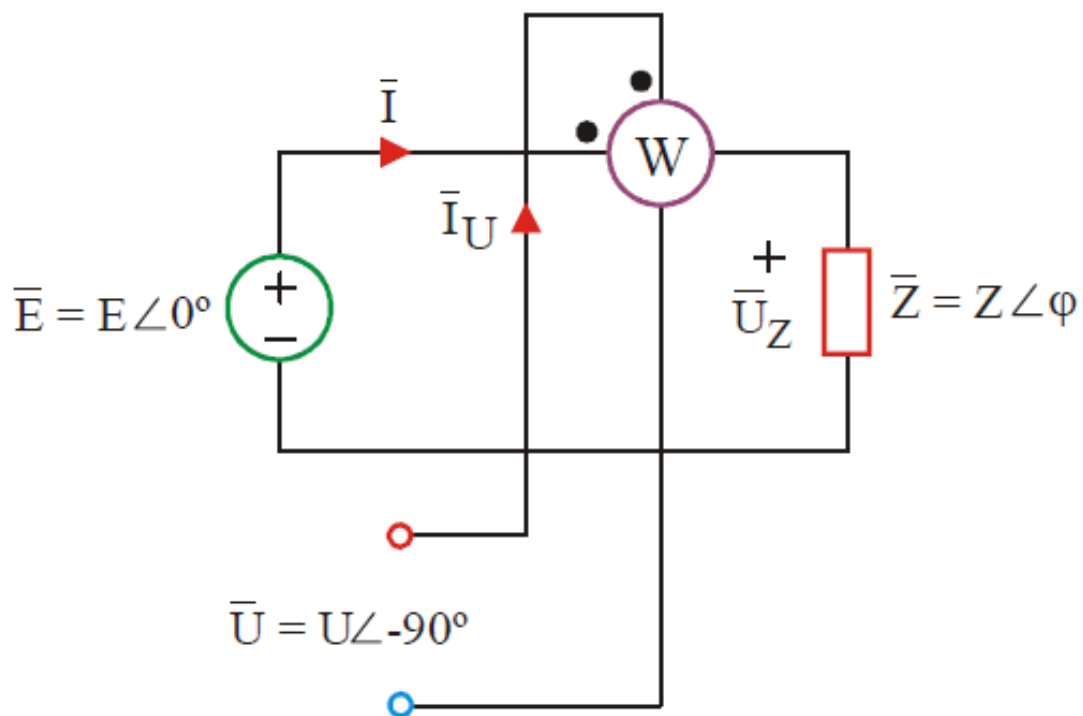
- Visto desde la alimentación:

$$W = P_E = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \cdot i(t) d\tau = |\bar{E}| |\bar{I}| \cos(\bar{I}_U \wedge \bar{I}) = E I \cos(\bar{E} \wedge \bar{I})$$



❖ Conexión para la medida de potencia reactiva

- Bobina amperimétrica: idéntica a la medida de activa.
- Bobina voltimétrica: alimentada con una tensión auxiliar, desfasada 90° en retraso, respecto de la tensión de alimentación del elemento.
- Conexión y lectura:





+ Lectura de W :

$$W = |\bar{U}| |\bar{I}| \cos(\bar{I}_U \wedge \bar{I}) = U I \cos(90 - \varphi) = U I \sin \varphi$$

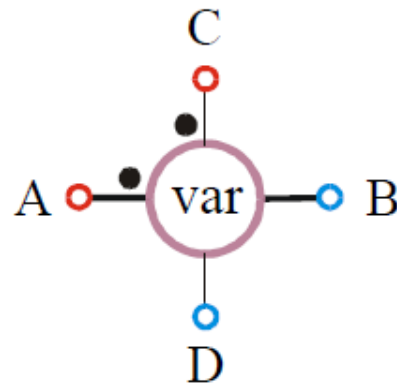
+ Factor de escala. Medida de la potencia reactiva:

$$Q_Z = Q_E = \frac{E}{U} \times \text{Lectura } W$$

✓ Varímetro o vármetro

- Medidor de potencia reactiva.

- Símbolo:



- Construido: a partir de una vatímetro, cuya bobina voltimétrica es, prácticamente, **inductiva pura**.

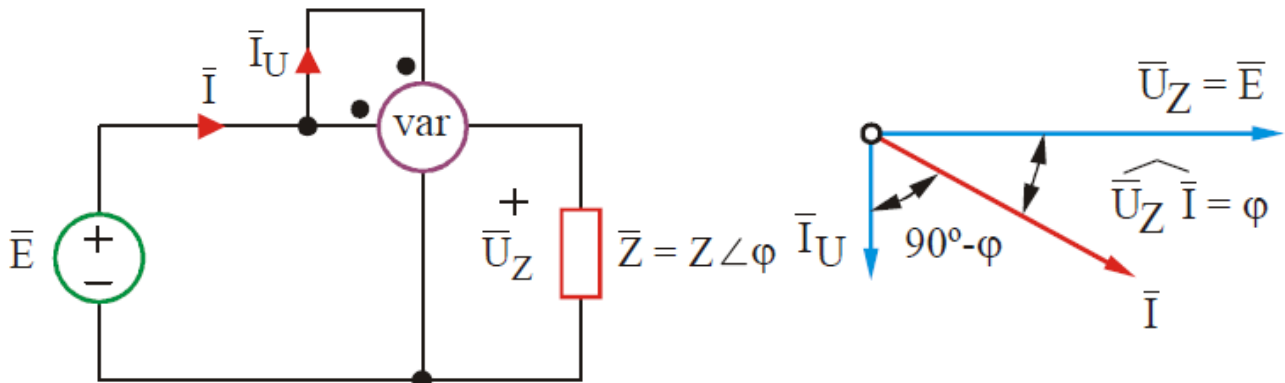
- Conexión para la medida: igual que el vatímetro.

+ Montaje y lectura:



FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Elementos de circuitos lineales



+ Lectura de *varímetro*

- Visto desde la carga:

$$var = Q_Z = |\bar{U}_Z| |\bar{I}| \cos(\bar{I}_U \wedge \bar{I}) = U_Z I \sin \varphi$$

- Visto desde la alimentación:

$$var = Q_E = |\bar{E}| |\bar{I}| \cos(\bar{I}_U \wedge \bar{I}) = E I \sin \varphi$$

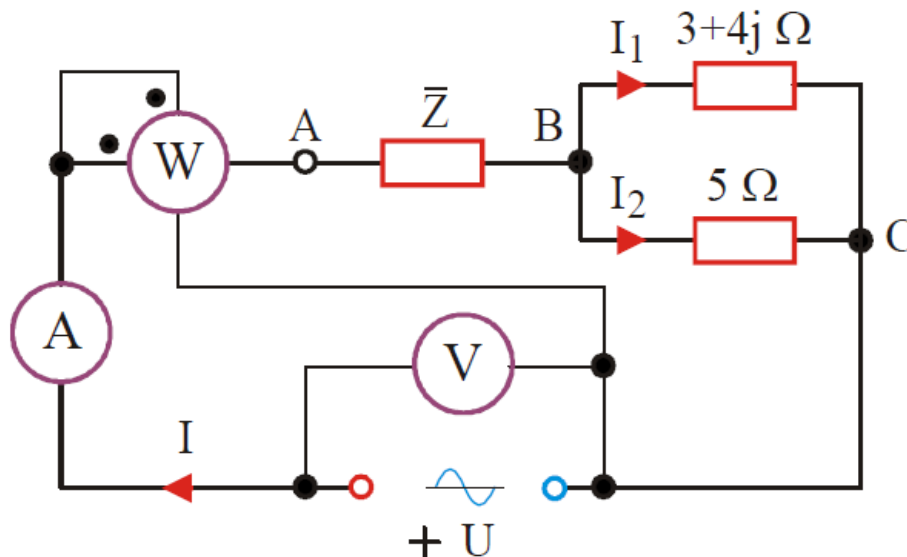


Ejemplo 2.4.

En la red pasiva de la figura, alimentada en corriente alterna a 50 Hz, las lecturas de los aparatos de medida, son:

Voltímetro, $V = 200\text{ V}$, Amperímetro, $A = 20\text{ A}$, Watímetro, $W = 4\text{ kW}$. Con estos datos, **calcular**:

1. El valor de la impedancia desconocida, Z .
2. Verificar que la lectura del watímetro W , coincide con la potencia consumida por los elementos pasivos resistivos.



❖ Solución:

- Apartado 1.

+ Lecturas de los aparatos de medida:

- Lectura $V = U = 200\text{ V}$.
- Lectura $A = I = 20\text{ A}$.
- Lectura $W = P = 4000\text{ W}$.



- + El módulo de la impedancia equivalente, es:

$$Z_{eq} = \frac{U}{I} = \frac{200}{20} = 10 \ \Omega.$$

- + De la lectura del vatímetro:

$$W = UI \cos(\bar{U} \wedge \bar{I}) = UI \cos \varphi \Rightarrow \cos(\bar{U} \wedge \bar{I}) = \cos \varphi = \frac{W}{UI} = 1$$

Por lo tanto,

$$\bar{U} \wedge \bar{I} = \varphi = 0^\circ \Rightarrow \bar{Z}_{eq} = R_{eq} + jX_{eq} \text{ con: } \Rightarrow \begin{cases} \bar{Z}_{eq} = R_{eq} \\ X_{eq} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{Z}_{eq} = 10 + j0}$$

- + La impedancia equivalente compleja de la red, en función de los elementos pasivos, es:

$$\bar{Z}_{eq} = \bar{Z} + Z_{BC} = R + jX + \frac{5(3 + j4)}{8 + j4} = R + jX + \frac{10}{4} + j\frac{5}{4},$$

$$\boxed{\bar{Z}_{eq} = \left(R + \frac{10}{4}\right) + j\left(X + \frac{5}{4}\right)}$$

- + Igualando partes reales e imaginarias, es:

$$\underline{\text{Parte real:}} \ 10 = R + \frac{10}{4}; \quad \underline{\text{Parte imaginaria:}} \ j0 = j\left(X + \frac{5}{4}\right)$$

$$\boxed{\bar{Z} = R + jX = \frac{30}{4} - j\frac{5}{4} = 7,5 - j1,25 = 7,6 \angle -9,46^\circ \ \Omega}$$



FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Elementos de circuitos lineales

- Apartado 2.

La potencia consumida por los elementos pasivos, se formula:

$$P = \sum_k R_k \cdot I_k^2 = (7,5 \cdot I^2) + (3 \cdot I_1^2) + (5 \cdot I_2^2) = 4.000 \text{ W}$$

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-



☞ MEJORA DEL FACTOR DE POTENCIA

✓ Planteamiento del problema

- En general, las instalaciones o los receptores eléctricos presentan un carácter resistivo-inductivo (muy excepcionalmente carácter capacitivo).
- La potencia utilizada por un receptor o instalación \Rightarrow transformable en luz, calor o trabajo mecánico \Rightarrow es potencia activa P .
- Un bajo λ provoca un aumento de la corriente demandada, sobre la estrictamente necesaria:

$$\uparrow I = \frac{P}{U \cos \varphi} \downarrow$$

$P = cte.$ (generada, transportada o consumida).

$U = cte.$ (tensión de suministro).

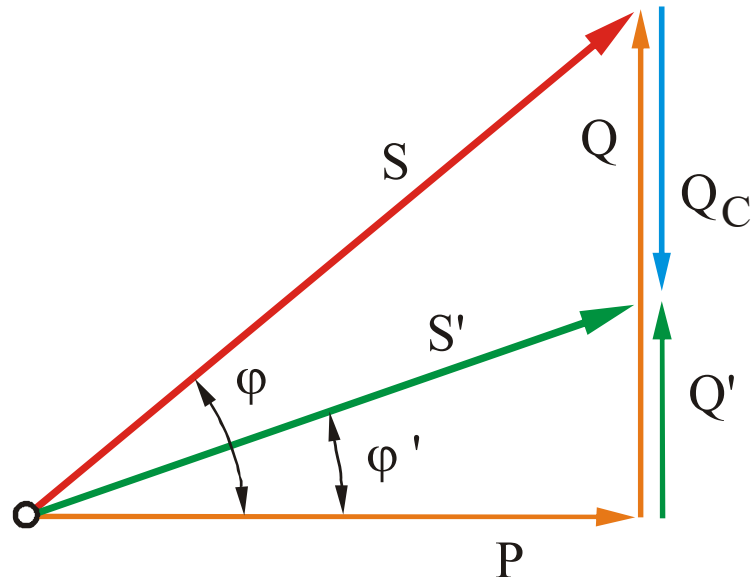
- + Aumento de pérdidas por efecto Joule (generadores, transformadores y líneas):

$$Perdidas\ Joule = RI^2 = R \frac{P^2}{U^2 \cos^2 \varphi}$$



✓ Mejora del FP: batería de condensadores en paralelo

❖ Según triángulo de potencias de instalación



- Triángulo inicial del receptor: $P, Q, S, \cos \varphi = P / S$.
- Conexión en derivación de condensadores: Q_C .
- Triángulo final del receptor: $P, Q', S', \cos \varphi' = P / S'$.

❖ Potencia reactiva capacitiva a instalar

$$\left. \begin{array}{l} \tan \varphi = \frac{Q}{P}, Q = P \tan \varphi \\ \tan \varphi' = \frac{Q'}{P}, Q' = P \tan \varphi' \end{array} \right\} \Rightarrow Q_C = Q - Q' = P (\tan \varphi - \tan \varphi')$$





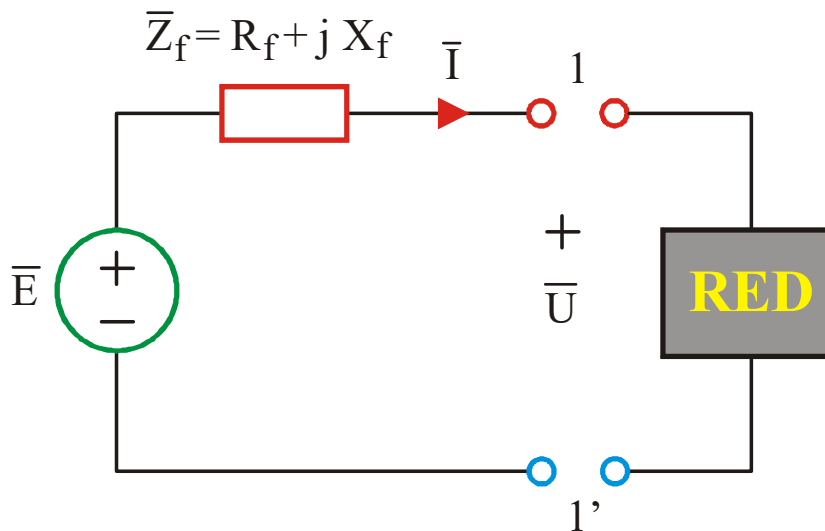
❏ FUENTES REALES EN C.A.

✓ Fuente real de tensión

❖ Parámetros que la definen

- Como **generador / motor** (alternador):
 - + Fuerza electromotriz / contra-electromotriz, \bar{E} (V).
 - + Impedancia interna, $\bar{Z}_f = R_f + jX_f$ (Ω).
 - + Potencia útil máxima (eléctrica / mecánica), $S_{u\text{máx}}$ (VA).

❖ Símbolo



❖ Ecuación característica: $\bar{U} = f(\bar{I})$

- Aplicando la **SLK**: $\bar{U} = \bar{E} - (R_f + jX_f)\bar{I} = \bar{E} - \bar{Z}_f\bar{I}$



- Punto-s de funcionamiento:
 - + Par de valores (\bar{U}, \bar{I}) , que verifican la característica.
 - + Son función de la red externa.
- Puntos notables de la característica:
 - + Punto de **vacío**: $\bar{I} = 0, \bar{U}_o = \bar{E}$.
 - + Punto de **cortocircuito**: $\bar{U} = 0, \bar{I}_{cc} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_f}$.

❖ Representación gráfica de la característica

- Su representación gráfica debe realizarse en el plano **complejo**, es complicada.

✓ Balances de potencia y rendimientos

❖ Regímenes de funcionamiento de la fuente real de tensión

- Tipos:
 - + Generador suministrando potencia activa.
 - + Generador absorbiendo potencia activa, (rendimiento negativo).
 - + Motor absorbiendo potencia activa.



❖ Balance de potencias de potencias del generador

- Potencia aparente compleja útil:

$$\bar{S}_U = \bar{U} \bar{I}^* = P_U \pm jQ_U$$

+ P_U , potencia activa útil y Q_U , potencia reactiva útil.

- Potencia aparente compleja generada:

$$\bar{S}_g = \bar{E} \bar{I}^* = P_g \pm jQ_g$$

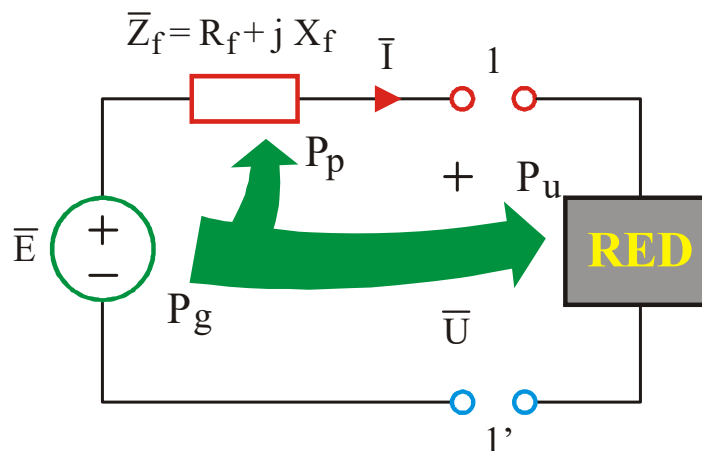
+ P_g , potencia activa generada y Q_g , potencia reactiva generada.

- Potencia aparente compleja perdida:

$$\bar{S}_p = \bar{Z}_f I^2 = P_p + jQ_p$$

+ P_p , potencia activa perdida y Q_p , potencia reactiva perdida.

- Según el teorema de Boucherot: $\begin{cases} P_U = P_g - P_p \\ \pm Q_U = \pm Q_g - Q_p \end{cases}$





- Rendimiento:
 - + Expresiones generales:

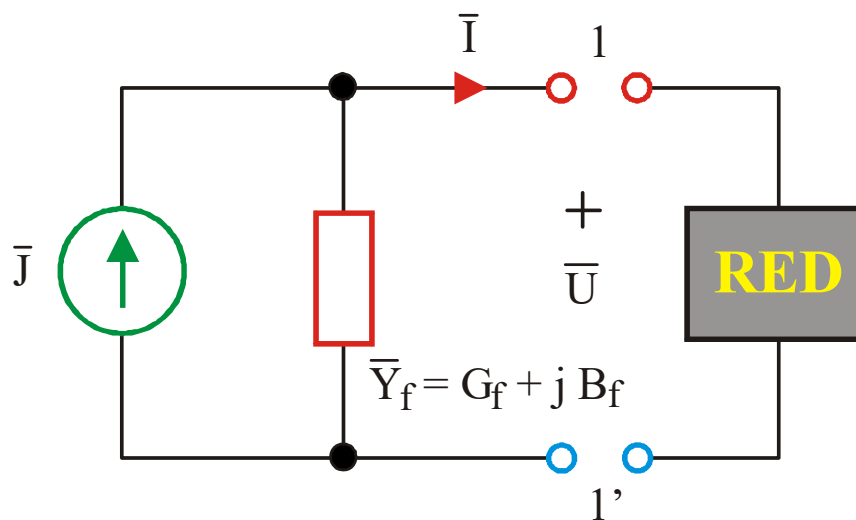
$$\eta_g = 100 \frac{P_u}{P_g}$$

✓ Fuente real de corriente o intensidad

❖ Parámetros que la definen

- Como **generador / motor**:
 - + Corriente de fuente, \bar{J} (A).
 - + Admitancia interna, $Y_f = G_f + jB_f$ (S).
 - + Potencia útil máxima (eléctrica / mecánica), $S_{u\text{máx}}$ (VA).

❖ Símbolo





❖ Ecuación característica: $\bar{I} = f(\bar{U})$

- Aplicando la PLK: $\bar{I} = \bar{J} - (G_f + jB_f)\bar{U} = \bar{J} - \bar{Y}_f \bar{U}$
- Puntos de funcionamiento:
 - + Par de valores (\bar{U}, \bar{I}) , que verifican la característica.
 - + Son función de la red externa.
- Puntos notables de la característica:
 - + Pto. de vacío: $\bar{I} = 0$, $\bar{U}_0 = \frac{\bar{J}}{\bar{Y}_f}$.
 - + Pto. de cortocircuito: $\bar{U} = 0$, $\bar{I}_{cc} = \bar{J}$.

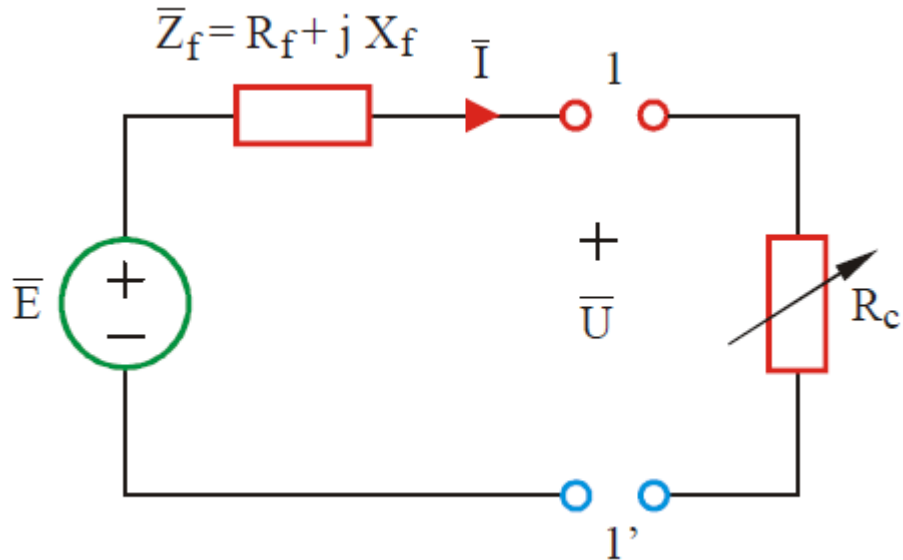
✓ Teorema de máxima transferencia de potencia

❖ Introducción

- Aplicado a generadores suministrando potencia activa.
- Análisis del valor de la impedancia que extrae la máxima potencia activa del generador.
- Casos que se pueden presentar, según la parte variable de $\bar{Z}_c = Z_c \angle \varphi_c = R_c \pm jX_c$:
 1. Reactancia nula, resistencia variable.
 2. Resistencia y reactancia variables.
 3. Resistencia variable, reactancia constante.



❖ Caso I: Resistencia variable



- Corriente:

$$I = \frac{E}{\sqrt{(R_f + R_c)^2 + X_f^2}}$$

- Potencia de la carga:

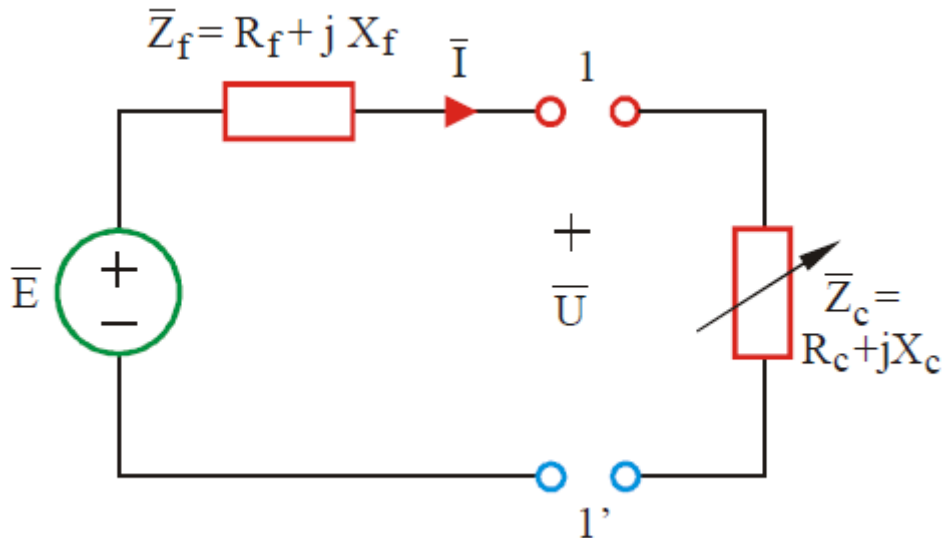
$$P_c = R_c I^2 = \frac{R_c E^2}{(R_f + R_c)^2 + X_f^2}$$

- Condición de extremo: $\frac{dP_c}{dR_c} = 0$

- Máximo, para: $R_c = \sqrt{R_f^2 + X_f^2} \Rightarrow \boxed{R_c = Z_f}$



❖ Caso II: Impedancia con resistencia y reactancia variables



- Corriente:

$$I = \frac{E}{\sqrt{(R_f + R_c)^2 + (X_f + X_c)^2}}$$

- Potencia de la carga:

$$P_c = R_c I^2 = \frac{R_c E^2}{(R_f + R_c)^2 + (X_f + X_c)^2}$$

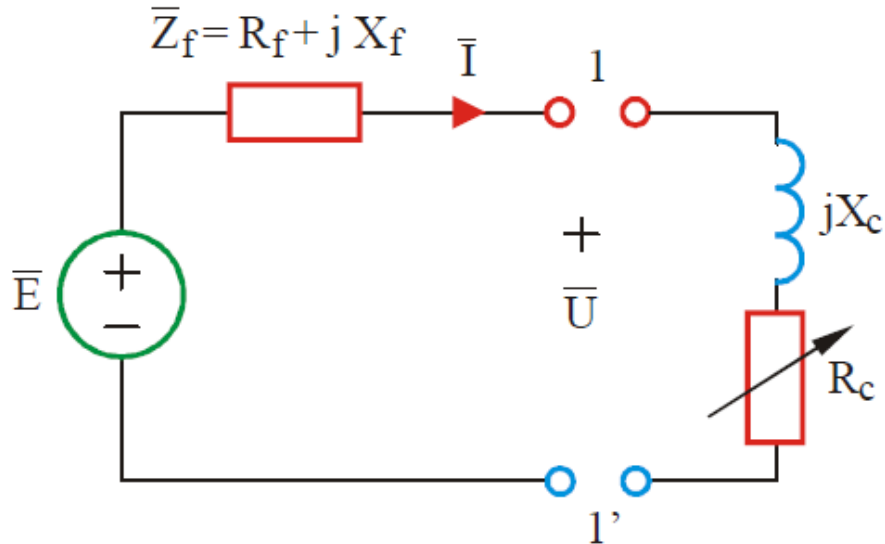
- Condiciones de extremo:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_c}{\partial R_c} = 0 \\ \frac{\partial P_c}{\partial X_c} = 0 \end{cases}$$

- Máximo, para: $\begin{cases} R_c - R_f = 0 \\ X_c + X_f = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\bar{Z}_c = \bar{Z}_f^*}$



❖ Caso III: Impedancia con reactancia constante y resistencia variable



- Sumando la reactancia de la carga a la del generador, constituye el Caso I

- Máximo, para: $R_c = \sqrt{R_f^2 + (X_f + X_c)^2}$





☞ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Chua, L.O. et al. LINEAR AND NONLINEAR CIRCUITS. McGraw-Hill Book Company. New York. 1987.
- Eguíluz, L. I. et al. PRUEBAS OBJETIVAS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS. Eunsa. Pamplona. 2001.
- Fallot, M. THÉORIE GÉNÉRALE DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES. Dunod. París. 1960.
- Madrigal, R.I. Teoría moderna de CIRCUITOS ELÉCTRICOS. Ed. Pirámide, S.A. Madrid. 1977.
- Nilsson, J. W. CIRCUITOS ELÉCTRICOS. Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. U.S.A.. 1995.
- Nilsson, J. W. - Riedel, S. A. CIRCUITOS ELÉCTRICOS. Prentice Hall. México. 2001.
- Parra, V. M. y Otros. TEORÍA DE CIRCUITOS I y II. U.N.E.D. Madrid. 1991.
- Ras, E. TEORÍA DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS. FUNDAMENTOS. Marcombo Boixareu Editores. Barcelona. 1988.
- Sánchez, P. et al. TEORÍA DE CIRCUITOS. Problemas y pruebas objetivas orientadas al aprendizaje. PEARSON, Prentice Hall. Madrid, 2007.

