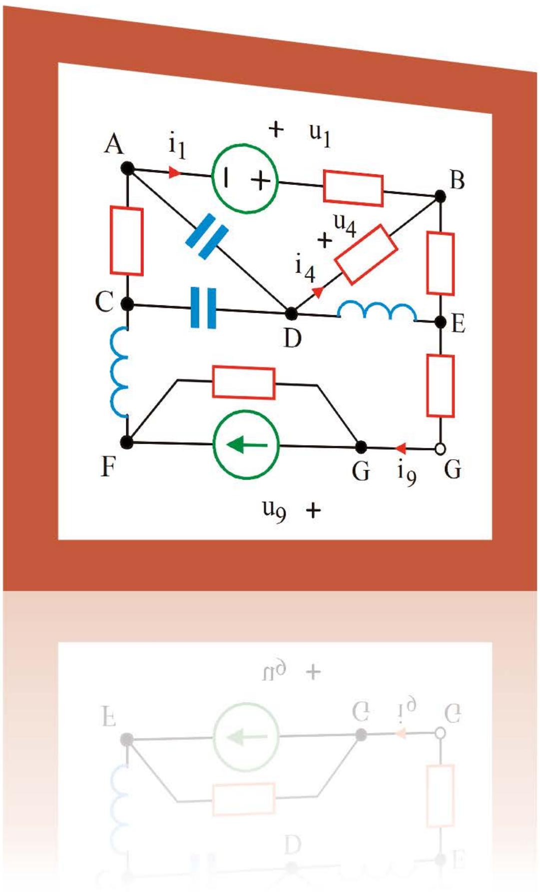
Fundamentos de Ingeniería Eléctrica

UD 2. Régimen permanente sinusoidal



Alberto Arroyo Gutiérrez
José Carlos Lavandero González
Sergio Bustamante Sánchez
Eugenio Sainz Ortiz
Alberto Laso Pérez
Raquel Martínez Torre
Mario Mañana Canteli

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

BT2: RÉGIMEN PERMANENTE SINUSOIDAL

CONTENIDOS

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

INTRODUCCIÓN

✓ Generalidades

❖ Sinusoidal: contracción términos seno y coseno.

❖ Importancia

- Generación, transporte, distribución y consumo de la energía eléctrica actual.

❖ Ventajas prácticas

- Fácil de obtener mediante alternadores.
- Transporte económico, mediante el uso de transformadores eléctricos.

✓ Representación fasorial de ondas sinusoidales

❖ Fasor

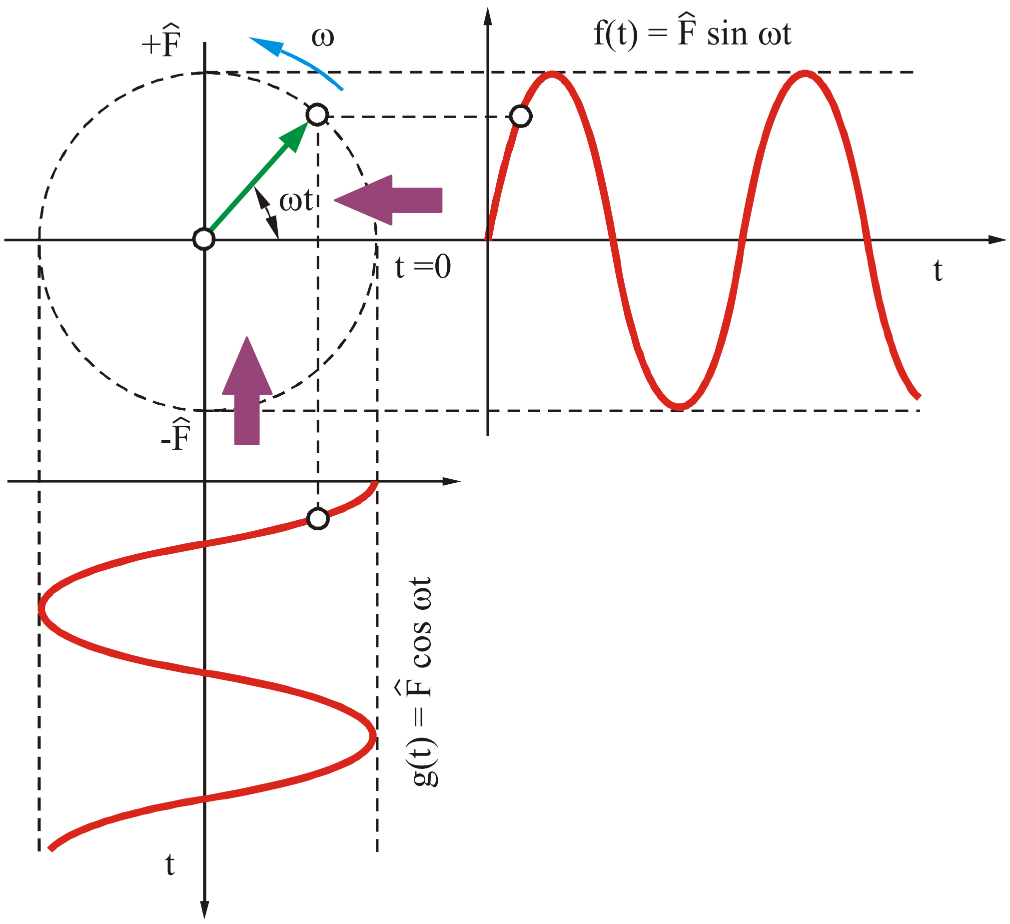
- Vector giratorio
  - Eje de giro: origen del vector.
  - Velocidad de giro: pulsación ω (rad/s)
  - Módulo: valor máximo, $\hat{F}$ ó eficaz, F.

- Representación de sinusoides
  - $f(t) = \hat{F}\ sin\ \omega t \Rightarrow$ Proyección fasor sobre eje de ordenadas.
  - $g(t) = \hat{F}\ cos\ \omega t \Rightarrow$ Proyección fasor sobre eje de abscisas.

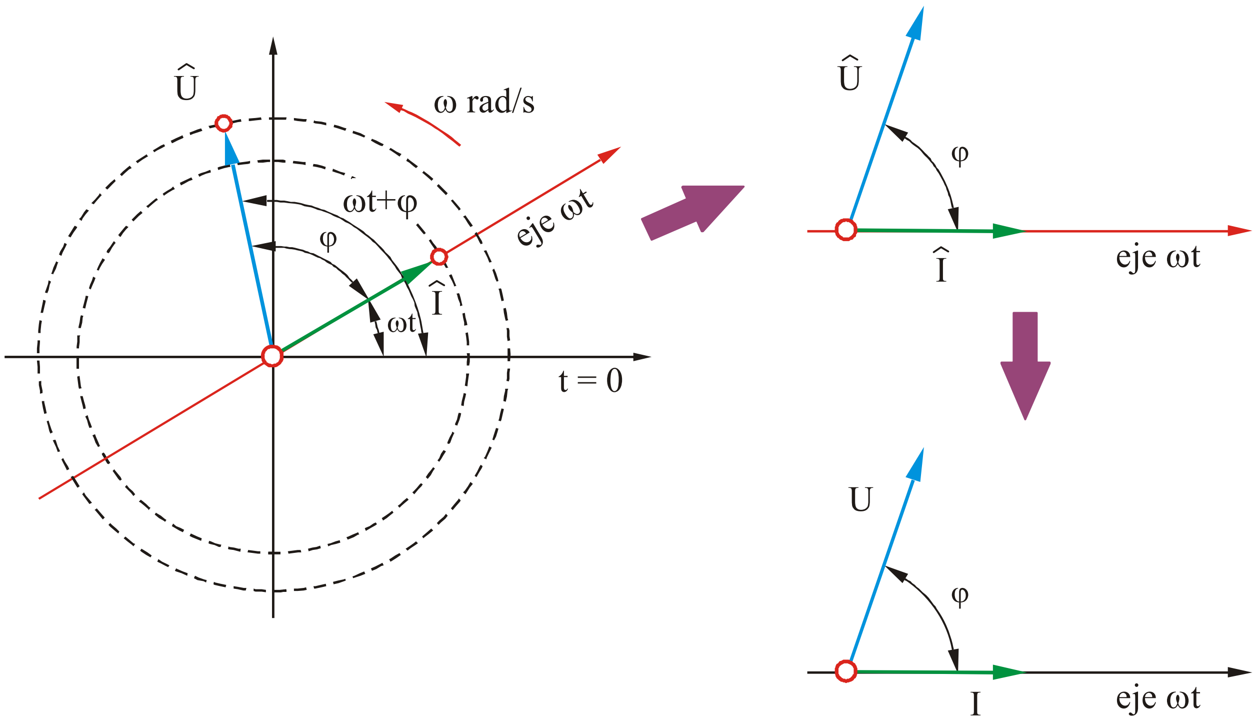
❖ Vectores representativos de tensiones e intensidades

- Valores instantáneos o temporales:

$$i(t) = \hat{I}\ sin\ \omega t,\ u(t) = \hat{U}\ sin\ (\omega t + \varphi)$$



- Representación fasorial



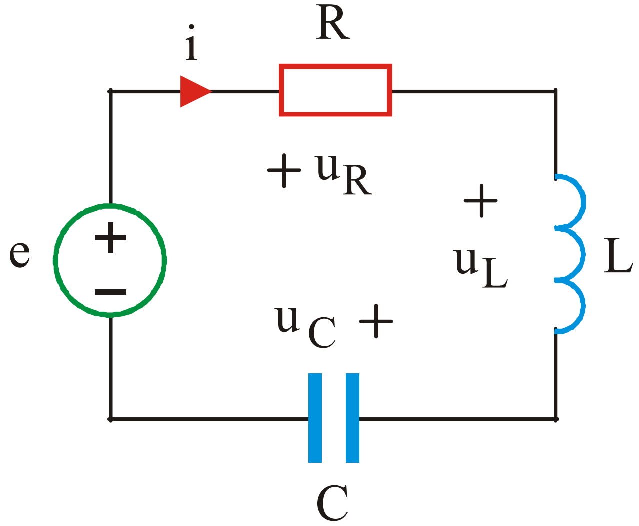
+ En las redes lineales ω = *cte*.
+ Para cualquier valor de $\omega\, t$, la posición relativa de los fasores no varía.
+ En análisis de régimen permanente, la posición de los fasores en un instante *t*, concreto, no interesa.
+ Representación mediante fasores parados o vectores:
    - Tomando el instante *t = 0.*
    - Tomando el eje $\omega\, t$ como referencia.

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

MÉTODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

✓ *Estudio del circuito RLC serie*

❖ Circuito



❖ Datos

- Elementos pasivos: *R*, *L* y *C*.
- F.e.m. fuente: $e = \sqrt{2}\,E\,sin\,(\omega t + \varphi)$.

❖ Incógnitas

- Corriente instantánea y eficaz: *i* e *I*.
- Desfase: $\varphi = arc\,|\,e \wedge i\,|$.
- Tensiones: u_R, u_L, u_C y U_R, U_L, U_C.

❖ Aplicando la SLK: $e = u_R + u_L + u_C$

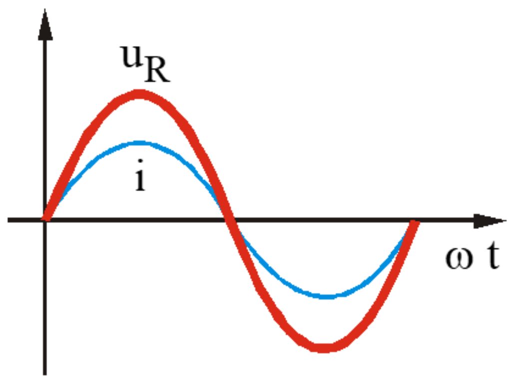
❖Ecuación integro-diferencial del circuito y solución

$$\boxed{e = R\,i + L\frac{d\,i}{d\,t} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\;dt} \longrightarrow \boxed{i = \sqrt{2}\,I\,sin(\omega t)}$$

- Evaluación de los sumandos:

  + Resistencia:

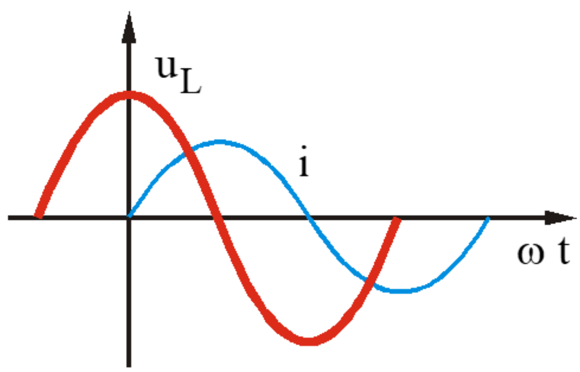
$$u_R = R\,i = R\sqrt{2}\,I\,sin(\omega t)$$



  - En fase con la intensidad.

  + Bobina:

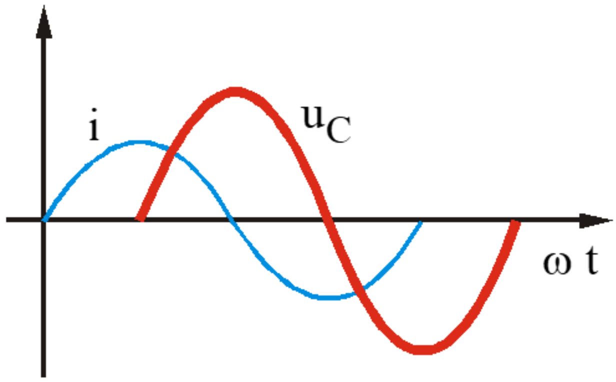
$$u_L = L\frac{di}{dt} = \omega L\sqrt{2}\,I\,cos(\omega t) = \\ = \omega L\sqrt{2}\,I\,sin(\omega t + 90^o)$$



  - Adelantada 90º respecto de *i*.

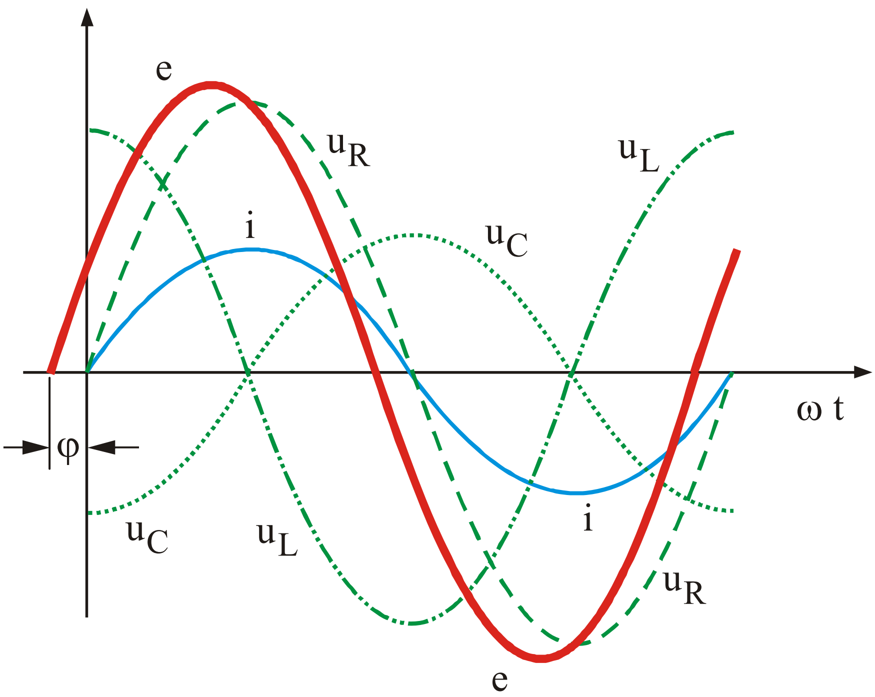
+ Condensador:

$$u_C = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,dt = -\frac{\sqrt{2}I}{\omega C}\cos(\omega t) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}I}{\omega C}\sin(\omega t - 90^o)$$



- Retrasada 90º respecto de *i*.

- <u>Solución gráfica:</u> $e = u_R + u_L + u_C$.



❖ Ecuación de régimen permanente sinusoidal

$$E\sin(\omega t + \varphi) = R\ I\sin(\omega t) + \omega L\ I\sin(\omega t + 90^o) +$$
$$+ \frac{I}{\omega C}\sin(\omega t - 90^o)$$

❖ Tomando valores particulares de ωt

- Para $\omega t = 0$: $E \sin(\varphi) = \omega L\, I - \dfrac{I}{\omega C}$ (1)
- Para $\omega t = \pi/2$: $E \cos(\varphi) = R\, I$ (2)

❖ Dividiendo miembro a miembro (1) y (2)

- Desfase tensión /intensidad:

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}}$$

❖ Elevando al cuadrado y sumando (1) y (2)

$$E^2 = R^2 I^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 I^2$$

- Valor eficaz de la corriente

$$\boxed{I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \dfrac{1}{\omega C})^2}}}$$

❖ Ley de Ohm en corriente alterna

$$\boxed{I = \frac{E}{Z}}$$

❖ Reactancias e Impedancia en corriente alterna

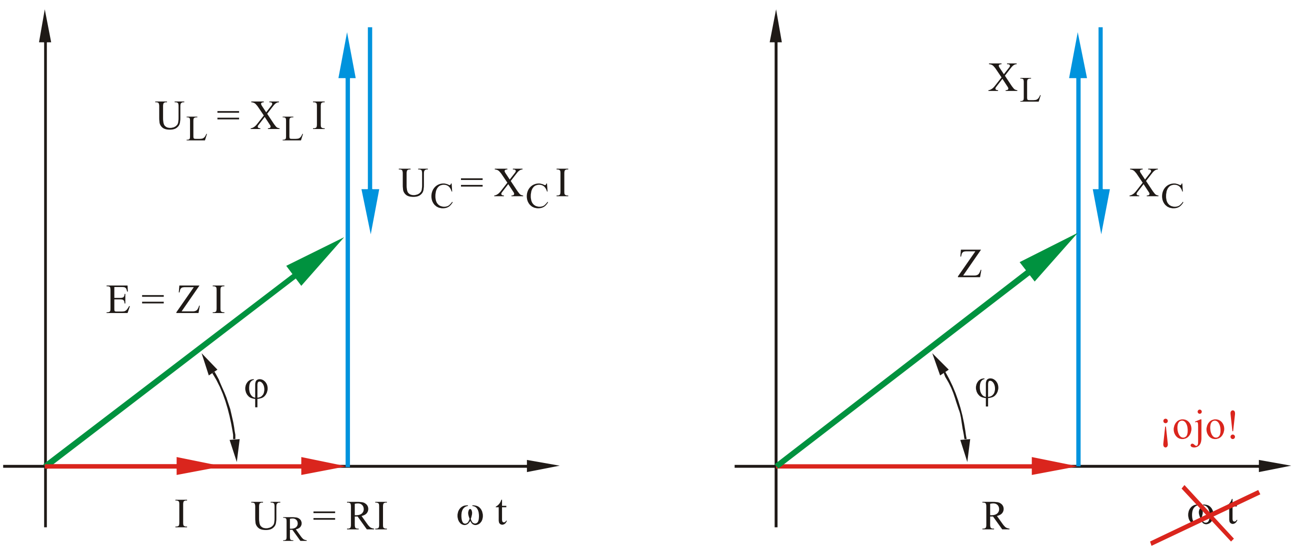
- Reactancia inductiva (Ω): $\boxed{X_L = \omega L}$, $\left(\frac{rad}{s} \cdot H = \Omega\right)$
- Reactancia capacitiva (Ω): $\boxed{X_C = \frac{1}{\omega C}}$, $\left(\frac{s}{rad \cdot F} = \Omega\right)$
- Impedancia (Ω): $\boxed{Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$

❖ Valor eficaz de las caídas de tensión

- Resistencia: $\boxed{U_R = R I}$
- Bobina: $\boxed{U_L = X_L I = \omega L I}$
- Condensador: $\boxed{U_C = X_C I = \frac{I}{\omega C}}$

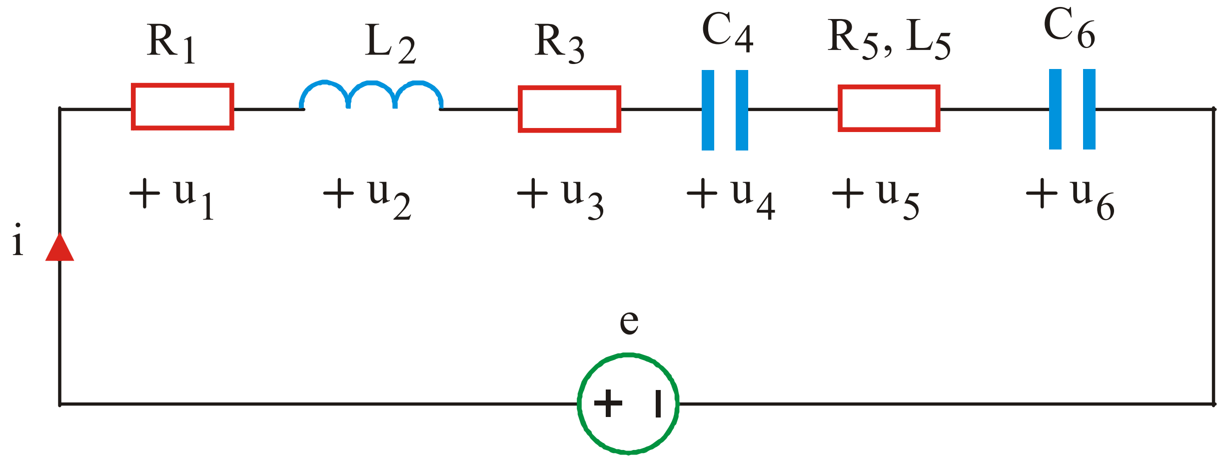
❖ Diagramas vectoriales de tensiones

- De las ecuaciones (1) y (2): $\begin{cases} E \ \sin\varphi = U_L - U_C \\ E \ \cos\varphi = U_R \end{cases}$



✓ Generalización del circuito serie

❖ Circuito



❖ Datos

- Parámetros elementos pasivos.
- F.e.m. fuente: $e = \sqrt{2}\, E \sin(\omega t + \varphi)$.

❖ Incógnitas

- Corriente: *i*, *I*.
- Desfase: $\varphi = arc\,|\,e \wedge i\,|$.
- Tensiones parciales: u_k, U_k.
- Impedancia equivalente: Z_{eq}.

❖ Reactancias inductivas y capacitivas

$$X_{L2} = \omega L_2 \;, \quad X_{C4} = \frac{1}{\omega C_4} \;, \quad X_{L5} = \omega L_5 \;,$$

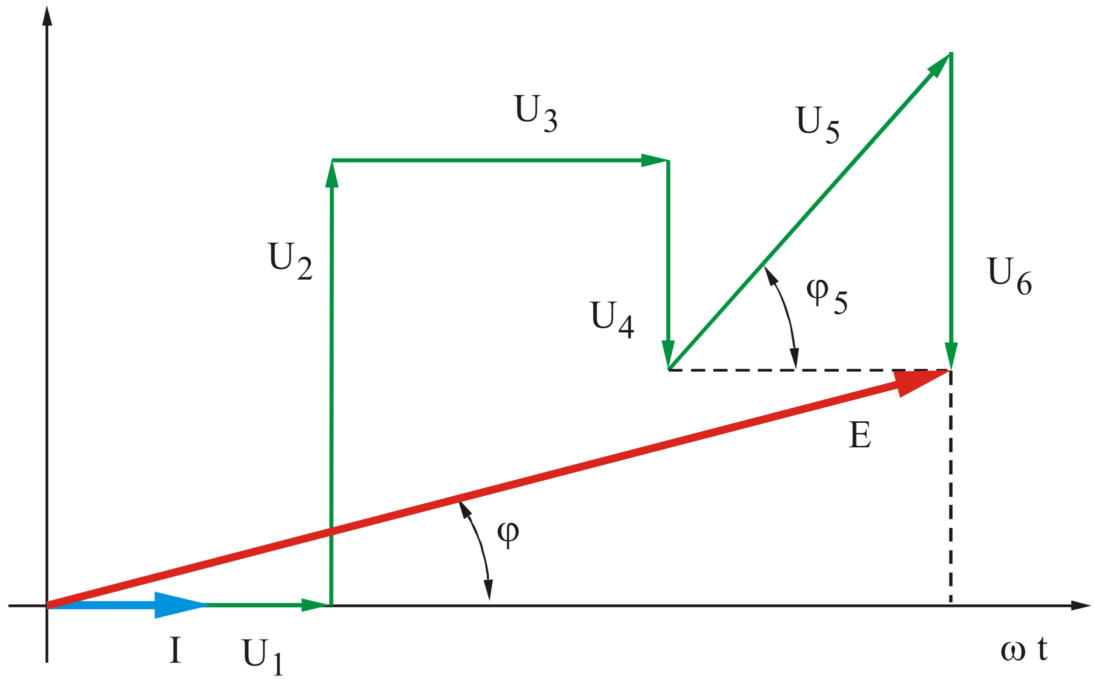
$$Z_5 = \sqrt{R_5^2 + X_{L5}^2} \;, \quad X_{C6} = \frac{1}{\omega C_6}$$

- Valores eficaces y desfases de las caídas de tensión respecto de la corriente

$$U_1 = R_1 I \ , \qquad \varphi_1 = 0^o$$
$$U_2 = X_{L2} I \ , \qquad \varphi_2 = 90^o$$
$$U_3 = R_3 I \ , \qquad \varphi_3 = 0^o$$
$$U_4 = X_{C4} I \ , \qquad \varphi_4 = -90^o$$
$$U_5 = Z_5 I \ , \qquad \varphi_5 = arctan \frac{X_{L5}}{R_5}$$
$$U_6 = X_{C6} I \ , \qquad \varphi_6 = -90^o$$

- Aplicando la SLK: $e = \sum_{k=1}^{6} u_k$ ó $\vec{E} = \sum_{k=1}^{6} \vec{U}_k$

- Diagrama fasorial de tensiones



-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

TRANSFORMADA COMPLEJA

✓ *Representación compleja de una función sinusoidal*

❖ Representación exponencial de la onda senoidal

$$f(t) = \hat{F}\sin(\omega t + \varphi) = \hat{F}\, Im\left[e^{j(\omega t+\varphi)}\right]$$
$$= \sqrt{2} Im\left[\left(F e^{j\varphi}\right) \cdot e^{j\omega t}\right]$$

- $e^{j\omega t}$, es el factor que imprime giro al vector.
- $\overline{F} = F\, e^{j\varphi} = F \cos\varphi + jF \sin\varphi$, es el valor eficaz complejo. Define la posición relativa de distintos fasores de igual frecuencia o pulsación.

❖ Transformada compleja, $\mathscr{F}(\bullet)$:

- Definición y nomenclatura:

$$\boxed{\mathscr{F}\left[\hat{F}\sin(\omega t + \varphi)\right] = F\, e^{j\varphi} = \overline{F}}$$

- Constituida por:
  - Valor eficaz ($F = \hat{F}/\sqrt{2}$).
  - Ángulo de fase (φ).
  - Desaparece la pulsación o frecuencia.

- <u>Característica</u>: transfiere la función sinusoidal en el dominio del tiempo al dominio de los números complejos.

❖ Transformada compleja inversa, $\mathscr{F}^{-1}(\bullet)$

- Definición: del mismo modo que se puede pasar de una onda sinusoidal a un vector $\bar{F}$, también se puede pasar de un vector $\bar{F}$ a una onda sinusoidal.

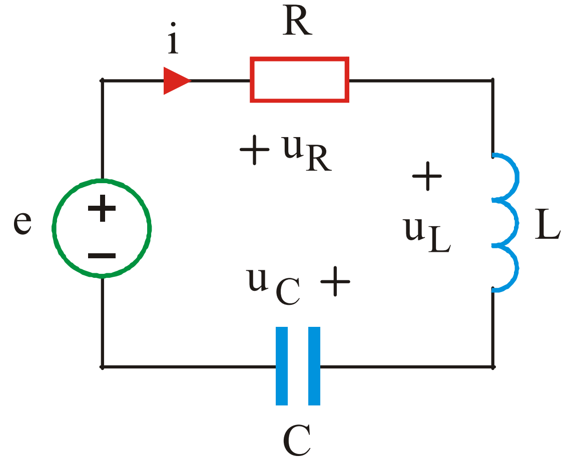
$$\boxed{\mathscr{F}^{-1}(\bar{F}) = \mathscr{F}^{-1}(F\,e^{j\varphi}) = \hat{F}\,sin(\omega t + \varphi)}$$

❖ Otras representaciones complejas

- Binómica: $\bar{F} = F\,e^{j\varphi} = F\,cos\,\varphi + j\,F\,sin\,\varphi$
- Polar: $\bar{F} = F\,e^{j\varphi} = F\,\angle\varphi$

MÉTODO COMPLEJO

✓ Solución del circuito serie RLC



❖ Forma compleja de excitación

$$e = \sqrt{2}\,E\sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \bar{E} = E\angle 0^o$$

❖ Solución compleja del régimen permanente

$$\boxed{\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j(X_L - X_C)}} \qquad (4)$$

- Operando:

$$\boxed{\bar{I} = \frac{E\angle 0^o}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}\ \angle \arctan\dfrac{X_L - X_C}{R}} = \frac{E}{Z}\angle -\varphi = I\angle -\varphi}$$

- Valor instantáneo de la solución: aplicando la transformada inversa,

$$\bar{I} = I\angle -\varphi \quad \Rightarrow \quad i = \sqrt{2}\,I\sin(\omega t - \varphi)$$

✓ Impedancia compleja

❖ Impedancia compleja: del denominador de (4),

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{Z} &= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j(X_L - X_C) = R + jX = \\ &= Z\,e^{j\varphi} = Z\cos\varphi + jZsen\varphi = Z\angle\varphi\end{aligned}}$$

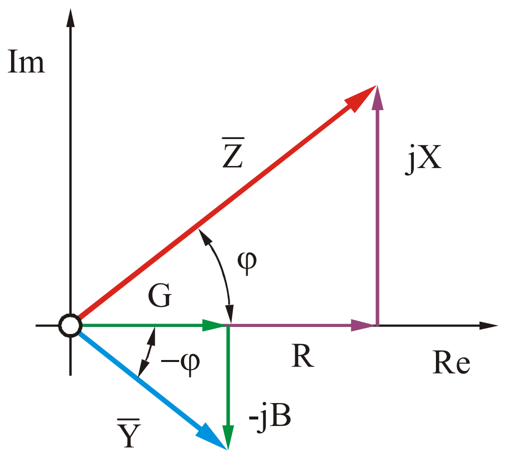
- Observar que $\overline{Z}$ es función de ω.
- La impedancia $\overline{Z}$, en ningún caso, es un fasor.

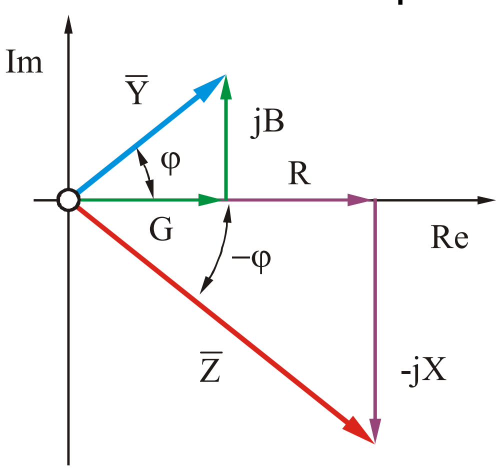
• Impedancia compleja de los elementos pasivos

- Resistencia: $\boxed{\overline{Z} = R + j0 = R\angle 0^o}$
- Bobina: $\boxed{\overline{Z} = 0 + j\omega L = jX_L = X_L\angle 90^o}$
- Condensador: $\boxed{\overline{Z} = 0 + \dfrac{1}{j\omega C} = -jX_C = X_C\angle -90^o}$

• Diagramas de impedancia compleja

- Red resistiva-inductiva
- Red resistiva-capacitiva





✓ Leyes y métodos fasoriales

❖ Ley de Ohm

$$\boxed{\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}} = \frac{E\angle\theta}{Z\angle\varphi} = \frac{E}{Z}\angle\theta-\varphi}$$

❖ Leyes de Kirchhoff

- Primera Ley (nudos / cortes):

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \pm \bar{I}_k = 0}$$

- Segunda Ley (mallas / lazos):

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \pm \bar{U}_k = 0}$$

❖ Asociación de elementos pasivos

- Asociación serie: $\boxed{\bar{Z}_{eq} = \sum_{k=1}^{n} \bar{Z}_k = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \ldots + \bar{Z}_n}$
- Asociación paralelo: $\boxed{\bar{Y}_{eq} = \sum_{k=1}^{n} \bar{Y}_k = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \ldots + \bar{Y}_n}$
- Teorema de Kennelly:

- Transformación triángulo a estrella:

$$\overline{Z}_a = \frac{\overline{Z}_{ab}\,\overline{Z}_{ca}}{\sum \overline{Z}_{\Delta}} \quad , \quad \overline{Z}_b = \frac{\overline{Z}_{ab}\,\overline{Z}_{bc}}{\sum \overline{Z}_{\Delta}} \quad , \quad \overline{Z}_c = \frac{\overline{Z}_{bc}\,\overline{Z}_{ca}}{\sum \overline{Z}_{\Delta}}$$

Donde, $\sum \overline{Z}_{\Delta} = \overline{Z}_{ab} + \overline{Z}_{bc} + \overline{Z}_{ca}$

- Transformación de estrella a triángulo:

$$\overline{Z}_{ab} = \frac{\sum \overline{Z}_i \overline{Z}_j}{\overline{Z}_c} \quad , \quad \overline{Z}_{bc} = \frac{\sum \overline{Z}_i \overline{Z}_j}{\overline{Z}_a} \quad , \quad \overline{Z}_{ca} = \frac{\sum \overline{Z}_i \overline{Z}_j}{\overline{Z}_b}$$

Donde, $\sum \overline{Z}_i \overline{Z}_j = \overline{Z}_a \overline{Z}_b + \overline{Z}_b \overline{Z}_c + \overline{Z}_c \overline{Z}_a$

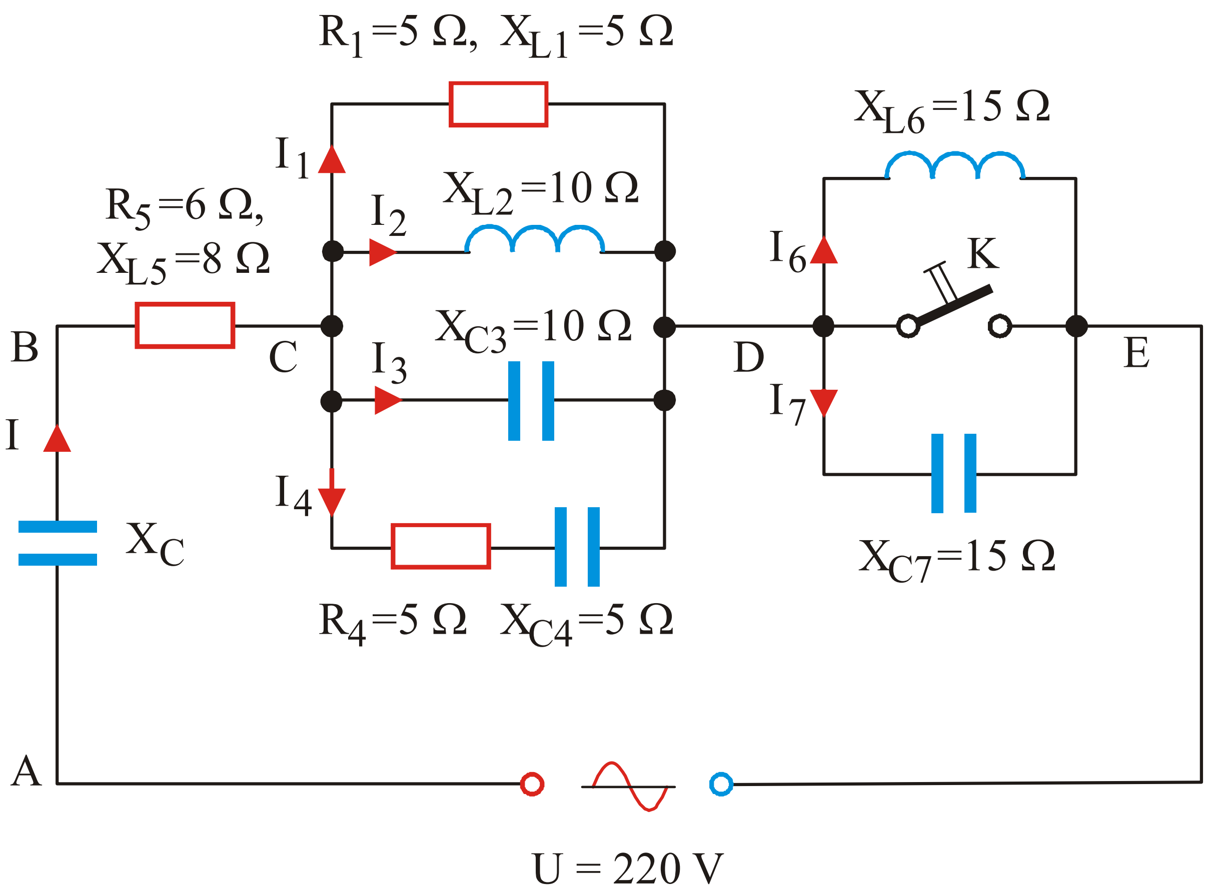
Ejemplo 2.1.

Sobre la red de la figura, determinar por el método complejo las tensiones, corrientes parciales y reactancia del condensador X_C, en los siguientes casos:

- Apartado a). Con el interruptor K cerrado:

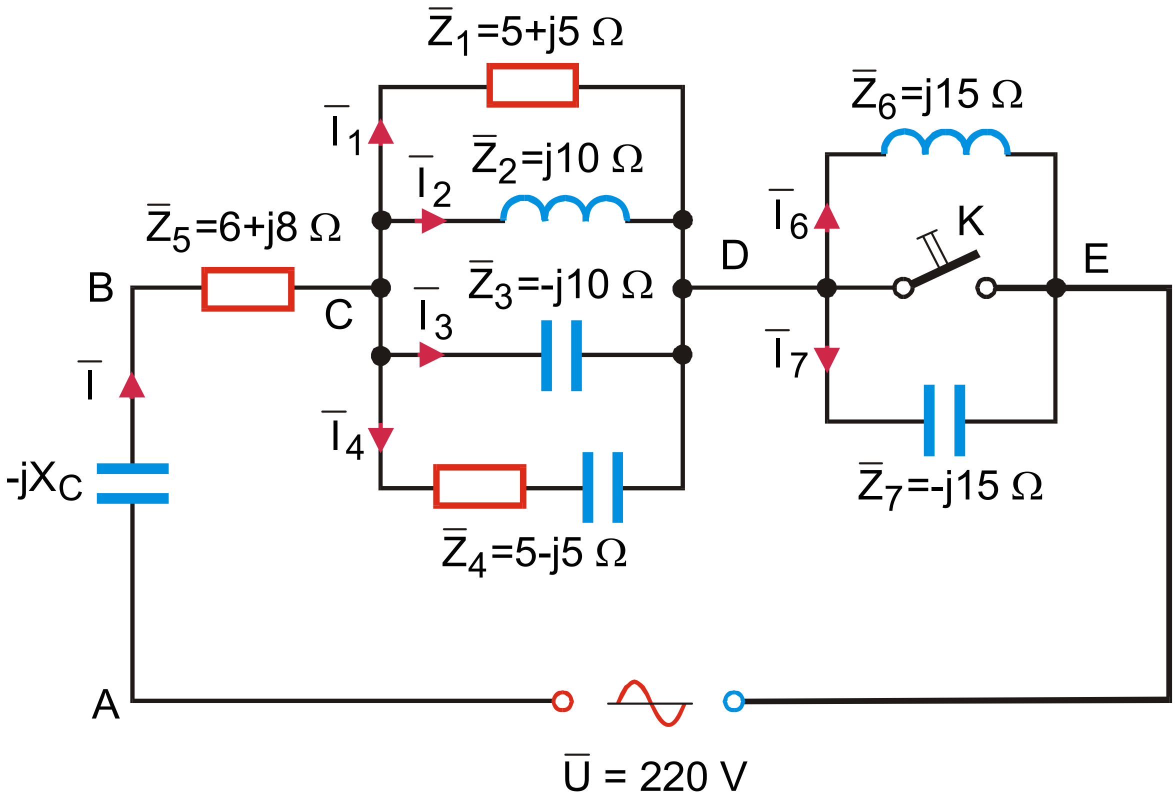
1. Cuando U en fase con I.
2. Cuando U desfasado 30º respecto de I.

- Apartado b). Con el interruptor K abierto.



❖ Solución

- Red con parámetros complejos



- Apartado a): Interruptor K cerrado

$$U_{DE} = 0 \quad \Rightarrow \quad I_6 = I_7 = 0\,.$$

+ Impedancia equivalente compleja de la red:

$$\frac{1}{\overline{Z}_{CD}} = \frac{1}{\overline{Z}_1} + \frac{1}{\overline{Z}_2} + \frac{1}{\overline{Z}_3} + \frac{1}{\overline{Z}_4} \Rightarrow \overline{Z}_{CD} = 5 + j0 = 5\angle 0^o \quad \Omega,$$

$$\overline{Z}_{eq} = -jX_C + 6 + j8 + \overline{Z}_{CD} = 11 + j(8 - X_C) \quad \Omega.$$

- La impedancia equivalente, origina el desfase entre $\overline{U}$ e $\overline{I}$, es decir φ:

$$\tan\varphi = \tan(\overline{U} \,\hat{}\, \overline{I}) = \frac{8 - X_C}{11}$$

+ <u>Apartado a.1)</u>: *U* en fase con *I*.

$$\tan\varphi = 0 = \frac{8 - X_C}{11} \quad \Rightarrow \quad \boxed{X_C = 8 \quad \Omega} \quad ,$$

$$\overline{Z}_{eq} = 11 + j(8 - X_C) = 11 \quad \Omega \ ,$$

- Cálculo de tensiones e intensidades:

$$\overline{I} = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}_{eq}} = \frac{220\angle 0^o}{11\angle 0^o} = 20\angle 0^o \quad A,$$

$$\overline{U}_{AB} = -jX_C \ \overline{I} = 8\angle -90^o \cdot 20\angle 0^o = 160\angle -90^o \quad V,$$

$$\overline{U}_{BC} = \overline{Z}_5 \ \overline{I} = 120 + j160 = 200\angle 53{,}13^o \quad V,$$

$$\overline{U}_{CD} = \overline{Z}_{CD} \ \overline{I} = 5\angle 0^o \cdot 20\angle 0^o = 100\angle 0^o \quad V,$$

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{U}_{CD}}{\overline{Z}_1} = \frac{100\angle 0^o}{5\sqrt{2}\angle 45^o} = 10\sqrt{2}\angle -45^o \quad A,$$

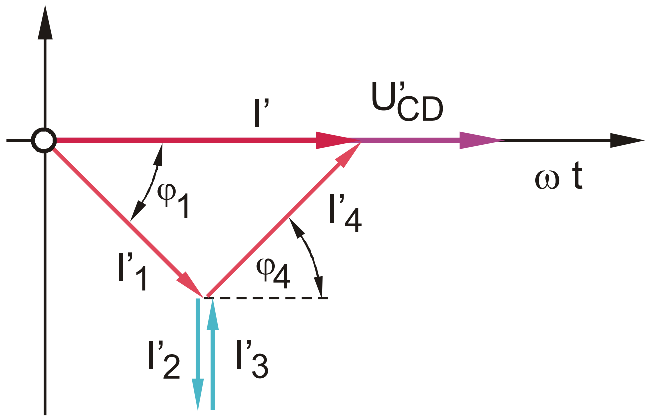
$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{U}_{CD}}{\overline{Z}_2} = \frac{100\angle 0^o}{10\angle 90^o} = 10\angle -90^o \quad A,$$

$$\overline{I}_3 = \frac{\overline{U}_{CD}}{\overline{Z}_3} = \frac{100\angle 0^o}{10\angle -90^o} = 10\angle 90^o \quad A,$$

$$\overline{I}_4 = \frac{\overline{U}_{CD}}{\overline{Z}_4} = \frac{100\angle 0^o}{5\sqrt{2}\angle -45^o} = 10\sqrt{2}\angle 45^o \quad A$$

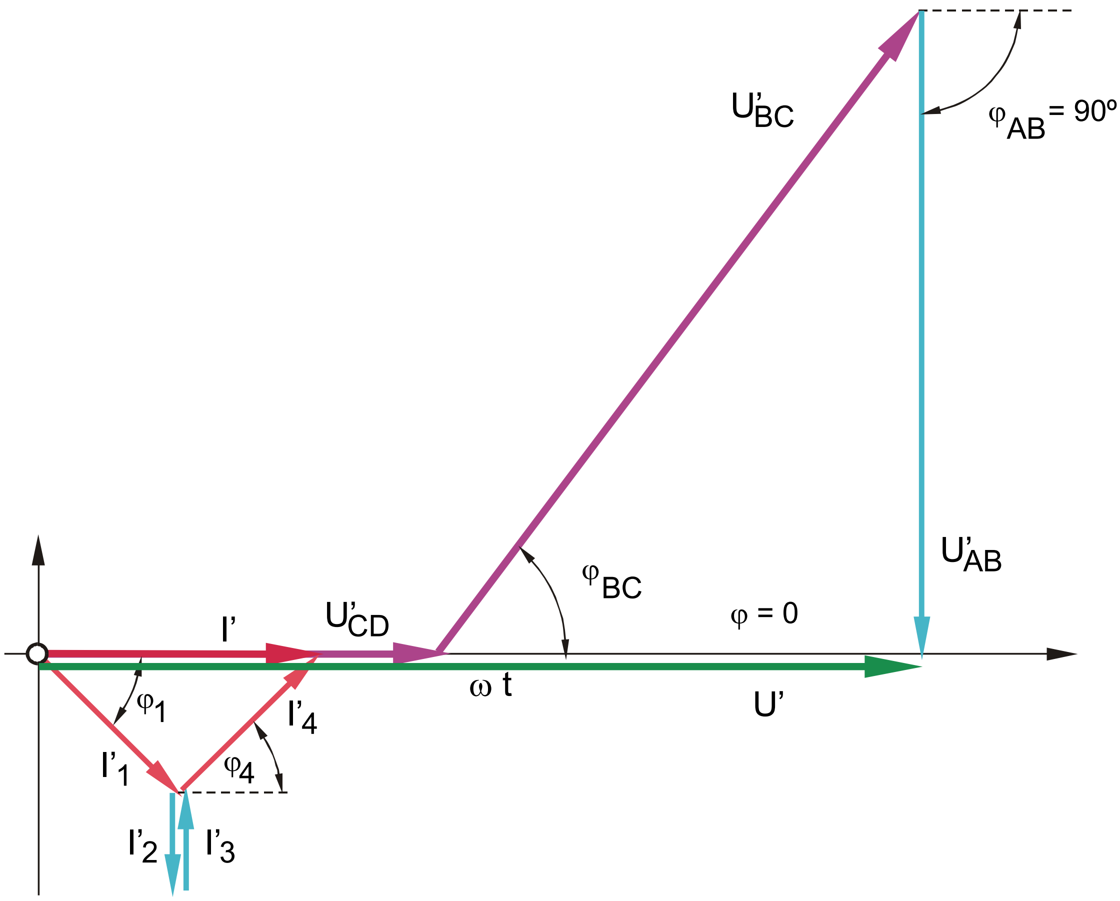
- Diagrama vectorial, intensidad total:

Según la PLK: $\overline{I_1} + \overline{I_2} + \overline{I_3} + \overline{I_4} = \overline{I'}$



- Diagrama vectorial, tensión total:

Según la SLK: $\overline{U'_{CD}} + \overline{U'_{BC}} + \overline{U'_{AB}} = \overline{U'}$



+ Apartado a.2): *U* desfasado *30º* respecto de *I*.

$$tan\,\varphi = tan\,\pm 30^o = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{8-X_C}{11} \Rightarrow$$

$$\boxed{X_C = \begin{cases} 1{,}65\ \ \Omega & red\ ind \\ 14{,}35\ \ \Omega & red\ cap \end{cases}}$$

- Red de carácter inductivo: intensidad retrasada respecto de la tensión

$$\overline{Z}_{eq} = 11 + j(8 - X_C) = 11 + j6{,}35 = 12{,}70\angle 30^o \quad \Omega\,,$$

$$\overline{I} = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}_{eq}} = \frac{220\angle 0^o}{12{,}7\angle 30^o} = 10\sqrt{3}\angle -30^o \quad A\,,$$

$$\overline{U}_{AB} = -jX_C\ \overline{I} = 1{,}65\angle -90^o \cdot 10\sqrt{3}\angle -30^o = 28{,}58\angle -120^o \quad V$$
$$\overline{U}_{BC} = \overline{Z}_5\ \overline{I} = 10\angle 53{,}13^o \cdot 10\sqrt{3}\angle -30^o = 100\sqrt{3}\angle 23{,}13^o \quad V$$
$$\overline{U}_{CD} = \overline{Z}_{CD}\ \overline{I} = 5\angle 0^o \cdot 10\sqrt{3}\angle -30^o = 50\sqrt{3}\angle -30^o \quad V\,,$$

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{U}_{CD}}{\overline{Z}_1} = \frac{50\sqrt{3}\angle -30^o}{5\sqrt{2}\angle 45^o} = 5\sqrt{6}\angle -75^o \quad A\,,$$

$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{U}_{CD}}{\overline{Z}_2} = \frac{50\sqrt{3}\angle -30^o}{10\angle 90^o} = 5\sqrt{3}\angle -120^o \quad A\,,$$

$$\overline{I}_3 = \frac{\overline{U}_{CD}}{\overline{Z}_3} = \frac{50\sqrt{3}\angle -30^o}{10\angle -90^o} = 5\sqrt{3}\angle 60^o \quad A\,,$$

$$\overline{I}_4 = \frac{\overline{U}_{CD}}{\overline{Z}_4} = \frac{50\sqrt{3}\angle -30^o}{5\sqrt{2}\angle -45^o} = 5\sqrt{6}\angle 15^o \quad A\,.$$

- Red de carácter capacitivo: intensidad adelantada respecto de la tensión.

$$\overline{Z}_{eq} = 11 + j(8 - X_C) = 11 - j6{,}35 = 12{,}70\angle -30^o \quad \Omega$$

$$\bar{I} = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}_{eq}} = \frac{220\angle 0^o}{12{,}7\angle -30^o} = 10\sqrt{3}\angle 30^o \quad A$$

$$\overline{U}_{AB} = -jX_C\ \bar{I} = 14{,}35\angle -90^o \cdot 10\sqrt{3}\angle 30^o = 248{,}5\angle -60^o \quad V$$

$$\overline{U}_{CD} = \overline{Z}_{CD}\ \bar{I} = 5\angle 0^o \cdot 10\sqrt{3}\angle 30^o = 50\sqrt{3}\angle 30^o \quad V,$$

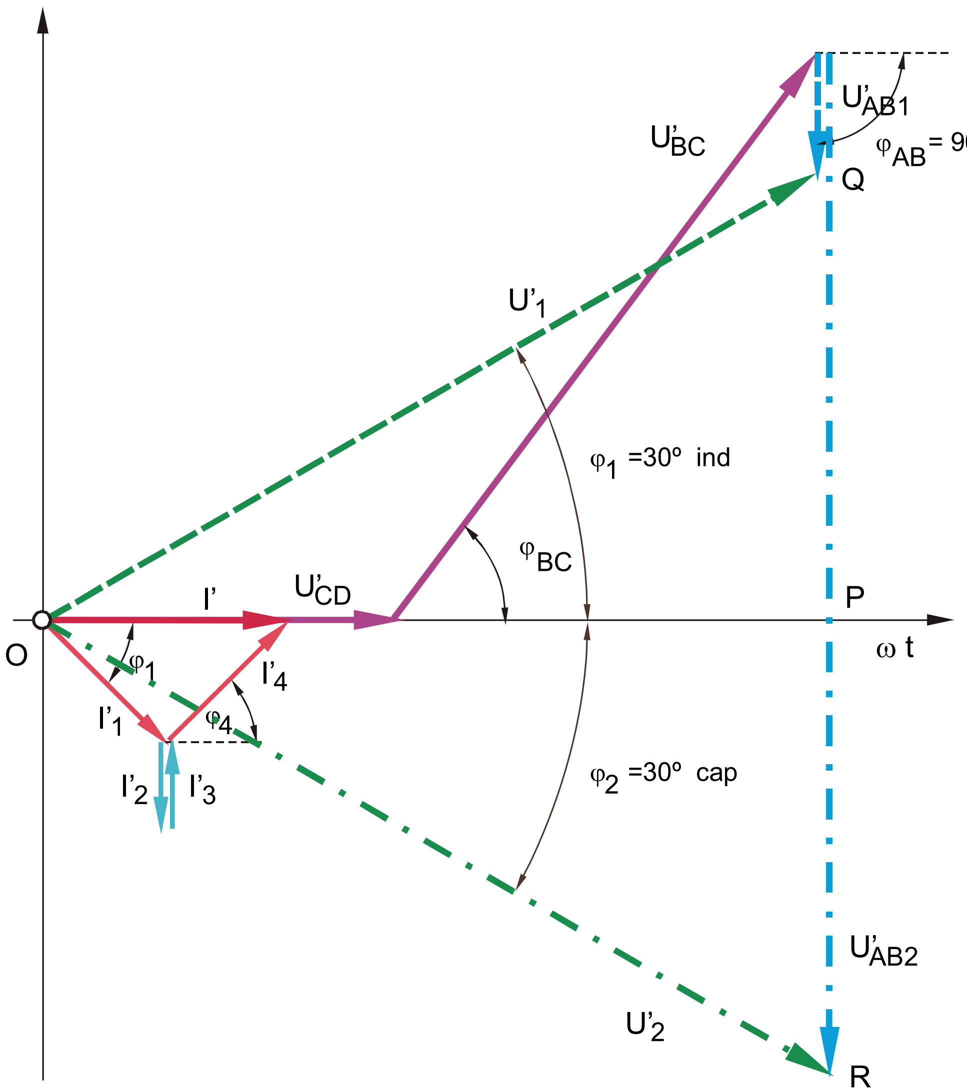
$$\bar{I}_1 = \frac{\overline{U}_{CD}}{\overline{Z}_1} = \frac{50\sqrt{3}\angle 30^o}{5\sqrt{2}\angle 45^o} = 5\sqrt{6}\angle -15^o \quad A \quad ,$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\overline{U}_{CD}}{\overline{Z}_2} = \frac{50\sqrt{3}\angle 30^o}{10\angle 90^o} = 5\sqrt{3}\angle -60^o \quad A \quad ,$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\overline{U}_{CD}}{\overline{Z}_3} = \frac{50\sqrt{3}\angle 30^o}{10\angle -90^o} = 5\sqrt{3}\angle 120^o \quad A \quad ,$$

$$\bar{I}_4 = \frac{\overline{U}_{CD}}{\overline{Z}_4} = \frac{50\sqrt{3}\angle 30^o}{5\sqrt{2}\angle -45^o} = 5\sqrt{6}\angle 75^o \quad A.$$

- Diagrama vectorial de tensiones,



- Apartado b): Interruptor K abierto
  - Cálculo de la impedancia equivalente, tensiones e intensidades:

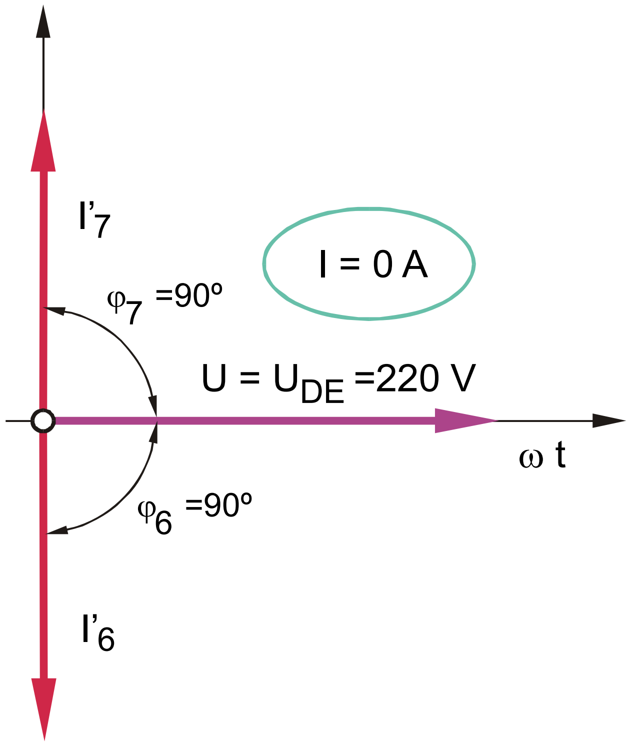
$$\overline{Z}_{DE} = \frac{\overline{Z}_6 \cdot \overline{Z}_7}{\overline{Z}_6 + \overline{Z}_7} = \frac{j15 \cdot (-j15)}{0} \rightarrow \infty$$

$$\bar{I} \rightarrow 0\ A \Rightarrow \begin{cases} U_{AB} = U_{BC} = U_{CD} = 0 \\ \overline{U}_{DE} = U = 220\angle 0^o\ \ V \end{cases} ,$$

$$\bar{I}_6 = \frac{\overline{U}_{DE}}{\overline{Z}_6} = \frac{220\angle 0^o}{15\angle 90^o} = 14{,}\widehat{6}\angle -90^o \quad A \qquad ,$$

$$\bar{I}_7 = \frac{\overline{U}_{DE}}{\overline{Z}_7} = \frac{220\angle 0^o}{15\angle -90^o} = 14{,}\widehat{6}\angle 90^o \quad A\,.$$

- Diagrama vectorial e intensidad total: $\overline{I'_6} + \overline{I'_7} = \overline{I'}$



-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

POTENCIA

✓ *Introducción*

❖ Potencia instantánea en un dipolo

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

- *u(t)* e *i(t)* son funciones sinusoidales.

❖ Potencias en régimen permanente sinusoidal

- Potencia activa o media, *P*.
- Potencia reactiva, *Q*: inductiva o capacitiva.
- Potencia aparente, *S*.
- Característica: Todas ellas son fácilmente medibles.

✓ *Triángulo de potencias*

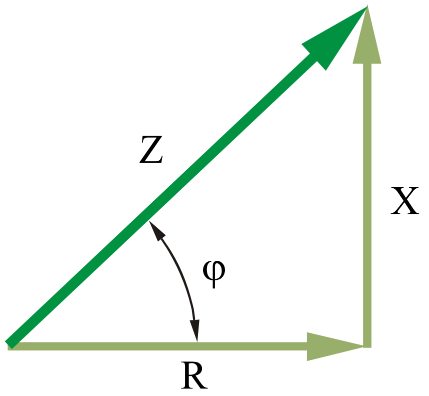
❖ En corriente continua

- Una sola potencia. La instantánea y media coinciden.
- Definida, por la potencia media: $P=U \cdot I$
  - *U* e *I*, son constantes en el tiempo.

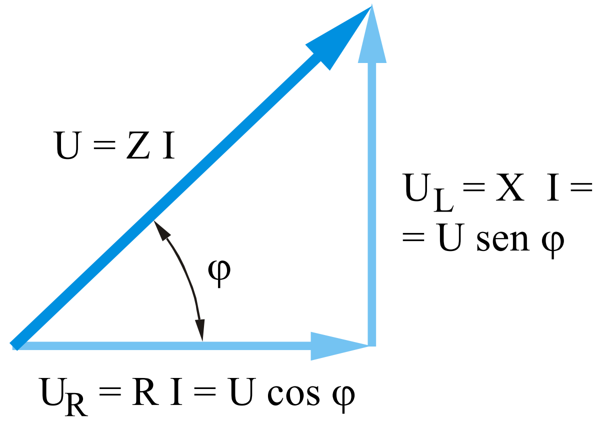
❖ En corriente alterna

- Del triángulo de impedancias de una carga pasiva, p.e., resistiva-inductiva

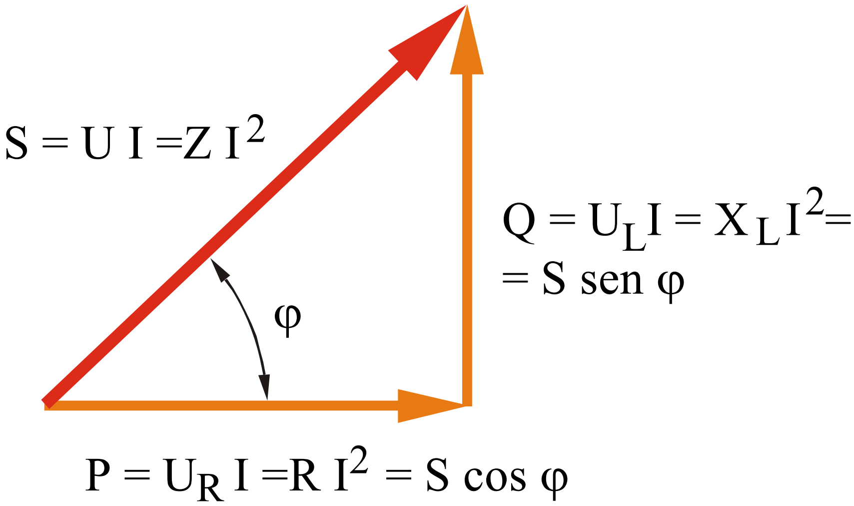
- Multiplicando por la corriente eficaz *I* ⇒ Triángulo de tensiones.



(x I)



- Multiplicando el triángulo de tensiones, de nuevo, por el escalar corriente eficaz *I* ⇒ Triángulo de potencias.



- <u>Potencia activa</u>: $\boxed{P = R I^2 = U I \cos \varphi}$
  - Asociada a la resistencia *R* y/o a las fuentes.
  - Transformable en calor o trabajo mecánico.
  - Equivalente en A.C. a la potencia D.C..

  - Unidades: vatio (W). Múltiplos: kilovatio (kW), megavatio (MW), gigavatio (GW). Submúltiplos: milivatio (mW), microvatio (μW), etc.
  - Elemento de medida: vatímetro.

- Potencia reactiva: $\boxed{Q = X\,I^2 = U\,I\,sin\,\varphi}$.
  - Asociada a los elementos L o C y/o a las fuentes.
  - Almacenamiento de energía.
  - No transformable en calor o trabajo mecánico, aunque ocasiona pérdidas en las líneas.
  - Unidades: voltamperio reactivo (var). Múltiplos: kilovoltamperio reactivo (kvar), megavoltamperio reactivo (Mvar),...
  - Elemento de medida: varímetro o vármetro.

- Potencia aparente: $\boxed{S = Z\,I^2 = U\,I}$
  - Asociada a las lecturas de los aparatos de medida, amperímetro y voltímetro, de valores eficaces.
  - Unidades: voltamperio (VA). Múltiplos: kilovoltamperio (kVA), megavoltamperio (MVA), gigavoltamperio (GVA), etc.
  - Elementos de medida: amperímetro y voltímetro.

- Otras relaciones:

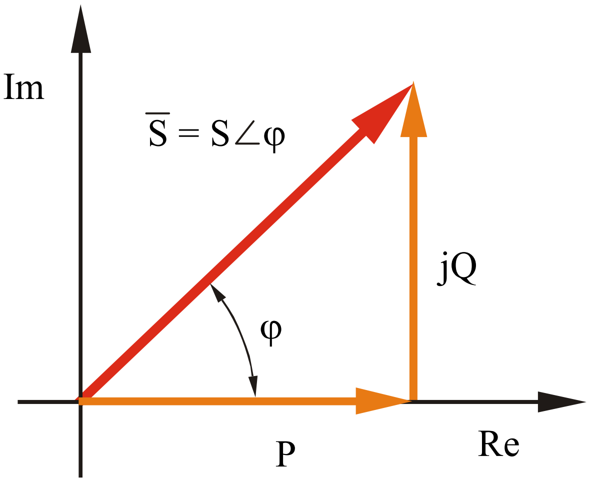
$$\boxed{S=\sqrt{P^2+Q^2}}\ ,\ \boxed{\sin\varphi=\frac{Q}{S}}\ ,\ \boxed{\cos\varphi=\frac{P}{S}}\ ,\ \boxed{\tan\varphi=\frac{Q}{P}}$$

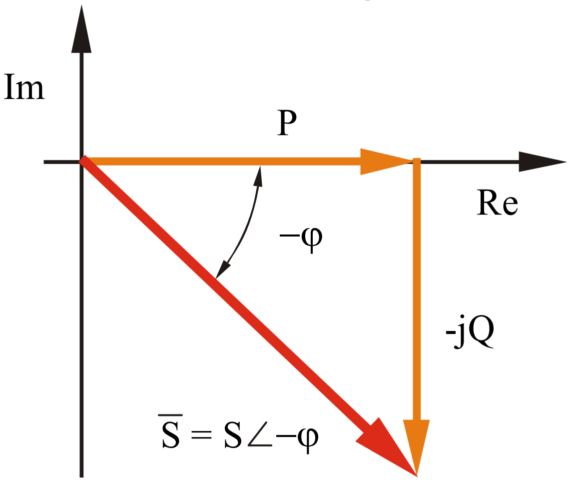
- Factor de potencia, λ *(PF)*: en general, $\boxed{\lambda=\frac{P}{S}}$
  + Es un indicador de la eficiencia con que se realiza el consumo.
  + Un bajo factor de potencia, incrementa las perdidas en las líneas de transporte de la energía eléctrica.
  + Si *u* e *i* sinusoidales: $\lambda=\frac{P}{S}=\cos\varphi$ *(dPF)*

✓ Potencia compleja

❖ Aproximación gráfica

- Situando el triángulo de potencias sobre el plano complejo.
  + Carga o generador resistivo-inductivo
  + Carga o generador resistivo -capacitivo





❖ Definición

$$\boxed{\overline{S} = S\angle \pm \varphi = S\cos\varphi \pm j\,S\sin\varphi = P \pm jQ}$$

- Nota: al igual que la impedancia compleja, no constituye un fasor o vector giratorio, únicamente un número complejo.

❖ En términos de tensión–intensidad

- Si los valores de tensión y de corriente son:

$$\overline{U} = U\angle\alpha \quad , \quad \overline{I} = I\angle\beta \quad , \quad \overline{I}^{*} = I\angle -\beta$$

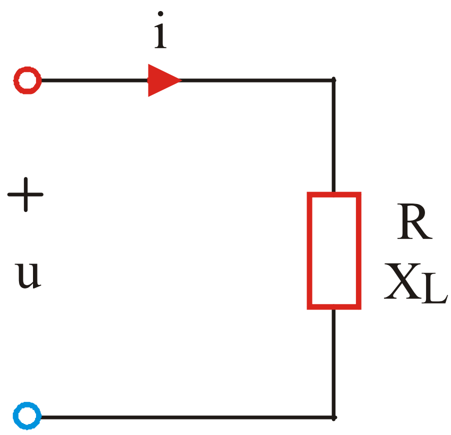
- Definición:

$$\boxed{\overline{S} = \overline{U}\,\overline{I}^{*} = U\angle\alpha\, I\angle -\beta = U\,I\,\angle\alpha-\beta = S\angle\varphi}$$

❖ En términos de impedancias

$$\boxed{\overline{S} = \overline{U}\,\overline{I}^{*} = \overline{Z}\,\overline{I}\,\overline{I}^{*} = \overline{Z}\,I^{2} = \frac{I^{2}}{\overline{Y}}}$$

✓ *Potencia instantánea*



❖ Formulaciones *u-i*

- En un elemento pasivo resistivo-inductivo:

$$u = \sqrt{2}\,U \sin(\omega t), \quad I = \frac{U}{Z},$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}, \quad \varphi = \arctan\frac{X_L}{R}, \quad i = \sqrt{2}\,I \sin(\omega t - \varphi)$$

❖ Formulación de la potencia instantánea:

$$p = u\,i = 2\,U\,I \sin(\omega t)\sin(\omega t - \varphi)$$

- Aplicando:

$$2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

- Resulta:

$$\boxed{p = U\,I\cos\varphi - U\,I\cos(2\omega t - \varphi)}$$

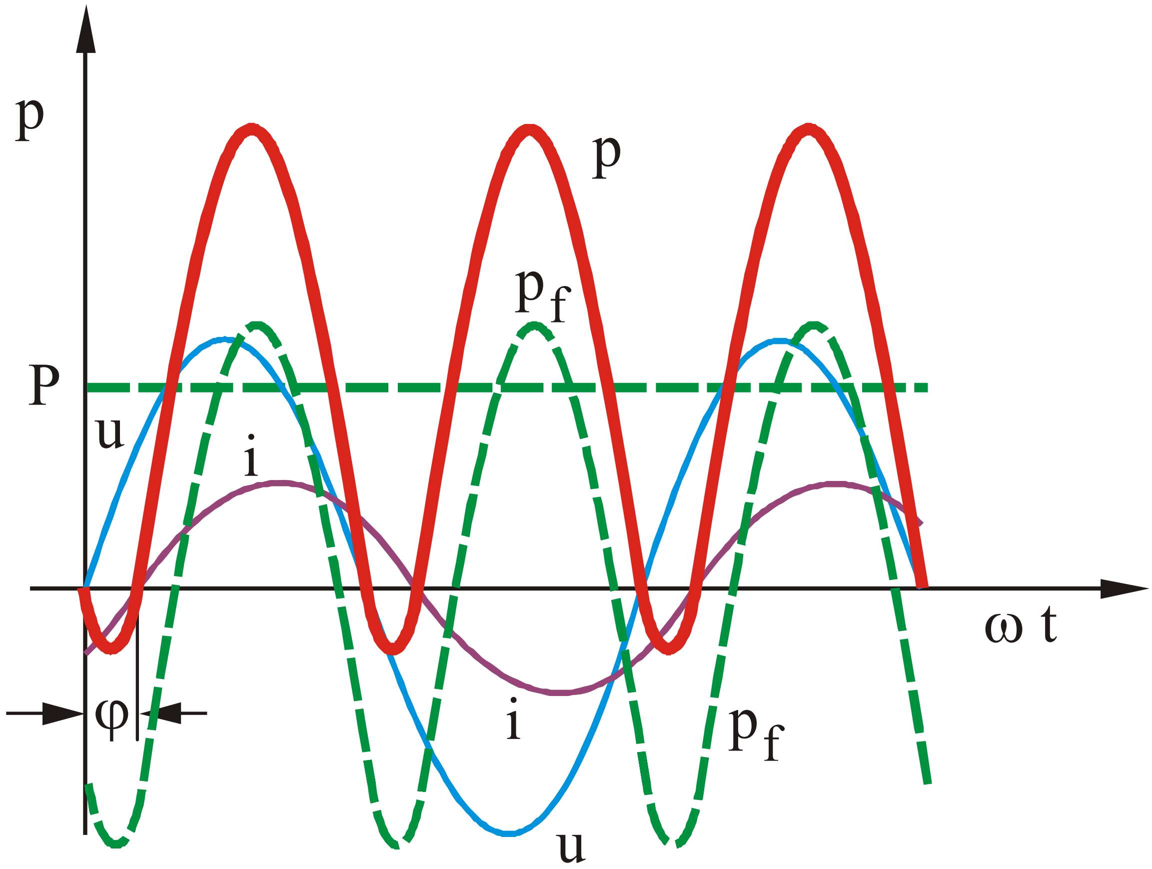
+ De frecuencia doble que la excitación.
+ Primer sumando: potencia media, activa, vatiada, real o verdadera.

$$\boxed{P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = U\,I\cos\varphi}$$

+ Segundo sumando: potencia fluctuante.

$$\boxed{p_f = -U\,I\cos(2\omega t - \varphi)}$$

- Representación gráfica:



❖ Otros aspectos

- Es nula en los pasos por cero de *u* e *i*.
- Para $\varphi = 0 \Rightarrow p \geq 0$ (solo *R* ó en resonancia).
- Para $\varphi \neq 0 \Rightarrow$ intervalos $p > 0$ y $p < 0$.
    - Si $p > 0$, el dipolo absorbe energía de la red: parte disipada y parte almacenada.
    - Si $p < 0$, el dipolo cede energía a la red, previamente almacenada en *L* o *C*.

Ejemplo 2.2.

En una impedancia alimentada a la tensión máxima de $50\sqrt{2}$ V, su potencia fluctuante vale $p_f = -250 \ \cos\ (2.000\, t + 30^o\ )$ W. Determinar:

1. El periodo de la excitación.
2. Los parámetros de la impedancia.
3. Potencias activa y reactiva consumidas.
4. Valores instantáneos de tensión y corriente.

❖ Solución

- Apartado 0: Bajo las premisas expuestas en teoría:

$$\begin{cases} U = \dfrac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \\ p_f = -S\ \cos\ (2\ \omega\ t - \varphi) \end{cases}$$ impedancia inductiva. Por tanto,

$$\begin{cases} U = 50 \quad V \\ S = 250 \quad VA \\ 2\ \omega = 2.000 \quad rad\ /\ s \\ \varphi = 30^o \quad cap \end{cases}$$

- Apartado 1: Periodo de la excitación:

$$T = \frac{2\ \pi}{\omega} = \frac{2\ \pi}{1.000} = 6{,}28 \quad ms$$

- Apartado 2: Parámetros de la impedancia:

$$Z = \frac{S}{I^2} = 10 \quad \Omega \quad , \qquad \bar{Z} = 10\angle -30^o \quad \Omega .$$

- Apartado 3: Potencias activa y reactiva consumidas:

$$\begin{cases} P = S \cos \varphi = 125\sqrt{3} \quad W \\ Q = S \cos \varphi = 125 \quad var \ (cap) = -125 \quad var \ (ind) \end{cases}$$

- Apartado 4: Tensión y corriente instantáneas:

$$\begin{cases} u(t) = 50\sqrt{2} \ sin \ 1.000\, t \quad V \\ i(t) = 5\sqrt{2} \ sin \ (1.000 \ t + 30^o \ ) \quad A \end{cases}$$

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

BALANCE DE POTENCIAS Y CÁLCULO DE INSTALACIONES

✓ Teorema de Boucherot

❖ Definición: En toda red, de frecuencia única, la suma de potencias aparentes complejas de todos sus elementos vale cero:

$$\boxed{\sum_k \overline{S}_k = \sum_k \overline{U}_k \, \overline{I}_k^* = 0} \quad , \quad k = \text{elementos red.}$$

- Corolarios
  - Conservación e independencia de la P y Q en A.C.

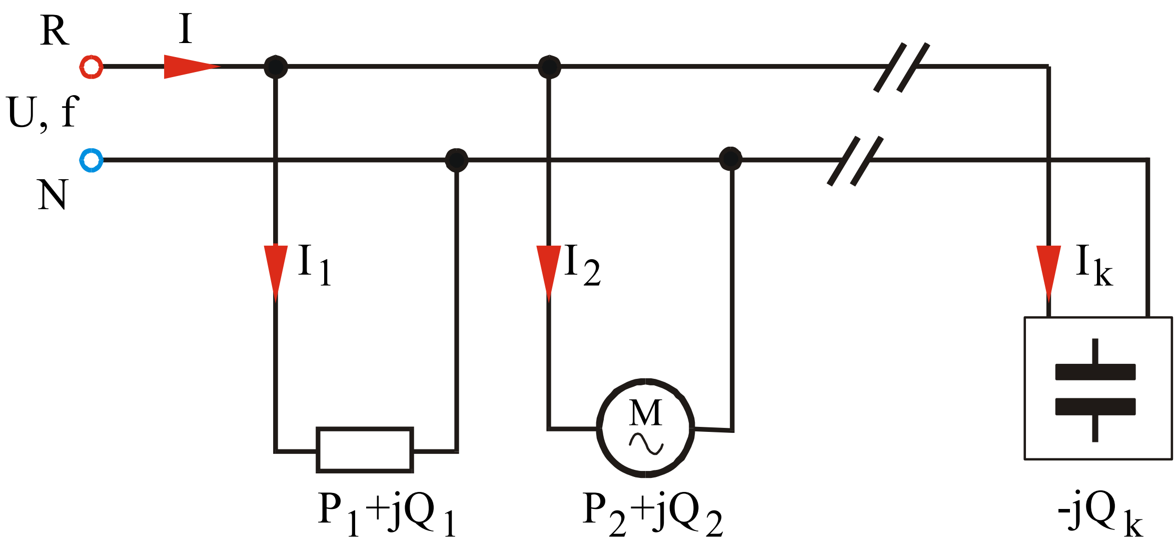
$$\boxed{\sum_k \pm P_k \pm jQ_k = 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} \sum_k \pm P_k = 0 \\ \sum_k \pm Q_k = 0 \end{cases}}$$

  - Balance de potencias de una red de corriente alterna:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum \pm P_{activos} = \sum P_{pasivos} \\ \sum \pm Q_{activos} = \sum \pm Q_{pasivos} \end{array}}$$

✓ Aplicación de interés práctico: instalación eléctrica

❖ Esquema de instalación monofásica



- Todos los receptores están conectados en derivación.
- Una sola fuente a tensión *U* y frecuencia *f*.
- No procede el método fasorial: resulta muy laborioso.
- Por Boucherot más sencillo:

$$\boxed{P = \sum_k P_k} \quad , \quad \boxed{Q = \sum_k \pm Q_k}$$

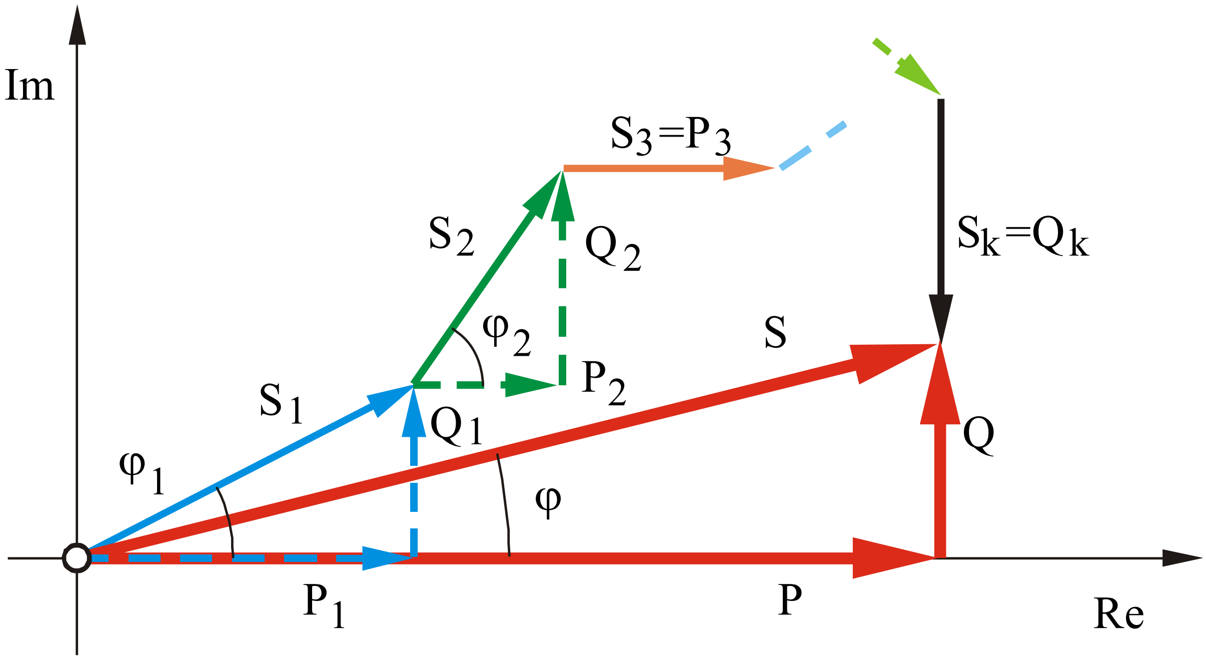
P_k = potencia activa del elemento k-ésimo

Q_k = potencia reactiva del elemento k-ésimo.

- Potencia aparente, corriente y factor de potencia de la instalación:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad , \quad I = \frac{S}{U} \quad , \quad \varphi = arctan\,\frac{Q}{P}$$

- Diagrama de potencias:



Ejemplo 2.3.

Tomando como referencia el esquema de la instalación anterior. La tensión nominal de alimentación es de 220 V, 50 Hz, siendo conocidos los siguientes datos de los receptores:

- Horno de inducción: potencia aparente, 8,5+j8,3 kVA.
- Motor de inducción: potencia útil, 4,62 kW, rendimiento, 84 %, factor de potencia, 0,83.
- Batería de condensadores: potencia, 4 kVA.

Determinar:

1. La corriente consumida por cada receptor y por la instalación.
2. Las potencias activa y reactiva de la instalación, así como el factor de potencia de la misma.
3. La impedancia del horno y la capacidad equivalente de la batería de condensadores.

❖ Solución:

Receptor 1: *Horno*

$$\overline{S}_1 = P_1 + jQ_1 = 8{,}5 + j8{,}3 = 11{,}88\angle 44{,}32^o\ kVA \quad ,$$

$$I_1 = \frac{S_1}{U} = \frac{11.880}{220} = 54\ A \quad , \quad \varphi_1 = 44{,}32^o\ ind. \ ,$$

$$Z_1 = \frac{U}{I_1} = \frac{220}{54} = 4{,}07\ \ \Omega \quad ,$$

Receptor 2: *Motor*

$$P_2 = \frac{P_{útil}}{\eta} = \frac{4{,}62}{0{,}84} = 5{,}5\ kW \quad , \quad \cos\varphi_2 = 0{,}83 \quad ,$$

$$\varphi_2 = 33{,}90^o\ ind. \quad , \quad \tan\varphi_2 = 0{,}67 \quad ,$$

$$Q_2 = \tan\varphi_2\ P_2 = 3{,}70\ k\,var\ (ind) \quad ,$$

$$S_2 = \sqrt{P_2^2 + Q_2^2} = 6{,}63\ kVA,\ I_2 = \frac{S_2}{U} = \frac{6.630}{220} = 30{,}16\ A,$$

$$Z_2 = \frac{U}{I_2} = \frac{220}{30{,}16} = 7{,}29\ \ \Omega$$

Receptor 3: *Batería condensadores*

$$P_3 = 0\ kW\ ,\ S_3 = Q_3 = 4\ kVA = -4\ \ k\,var\ ,\ \varphi_3 = 90^o\ cap.,$$

$$I_3 = \frac{S_3}{U} = \frac{4.000}{220} = 18{,}18\ A \quad ,$$

$$C_3 = \frac{Q_3}{2\pi f U^2} = \frac{4.000}{2\pi\ 50\ 220^2} = 263\ \mu F \ ,$$

Instalación: *por Boucherot.*

$$P = \sum P_k = 8{,}5 + 5{,}5 = 14\ kW \quad ,$$

$$Q = \sum \pm Qk = 8{,}3 + 3{,}7 - 4 = 8\ k\,var \quad ,$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 16{,}12\ kVA \quad , \quad \tan\varphi = \frac{Q}{P} = 0{,}57 \quad ,$$

$$\varphi = 29{,}74^{o}\,(i) \quad , \quad \cos\varphi = 0{,}87 \quad ,$$

$$I = \frac{S}{U} = \frac{16.120}{220} = 73{,}29\ A$$

Cuadro resumen:

	U (V)	***I*** (A)	***P*** (kW)	***Q*** (kvar)i	***S*** (kVA)	***φ*** (ºind)
Horno	220	54	8,5	8,3	11,88	44,32
Motor	220	30,16	5,5	3,7	6,63	33,90
Batería	220	18,18	0	-4	4	-90
Instal.	220	73,29	**14**	**8**	16,12	29,74

MEDIDORES DE POTENCIA ACTIVA Y REACTIVA

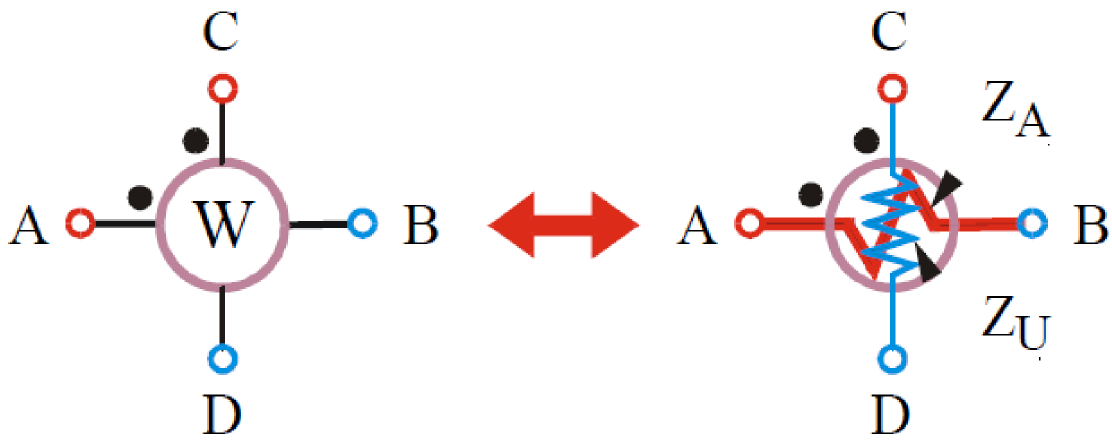
✓ Introducción

- Medidor de potencia activa: vatímetro.
- Medidor de potencia reactiva: varímetro o vármetro.
- Medidor de potencia aparente: voltímetro y amperímetro.

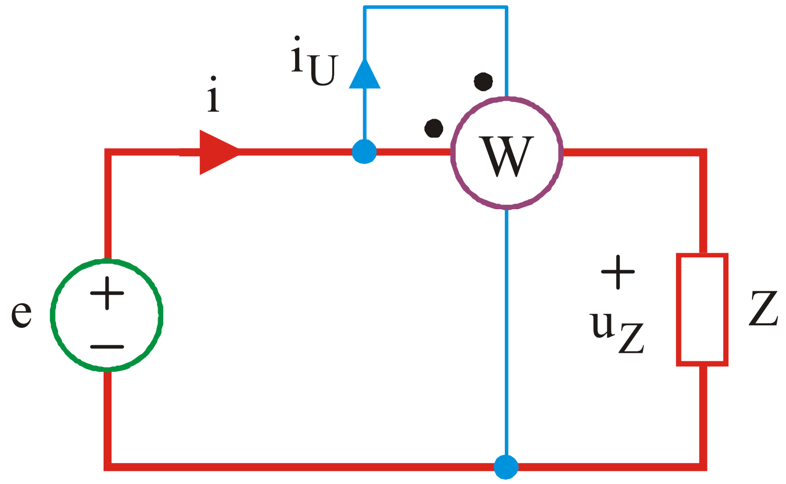
✓ Vatímetro

- Es el medidor de potencia activa o media en c.a.
- Mediante conexión especial, miden potencia reactiva.

❖ Símbolo: ❖ Modelo eléctrico ideal:



- Bobina amperimétrica (A-B) de gran sección y pequeña longitud, $Z_A \approx 0$ (cortocircuito).
  - Conectada en serie con la carga o fuente.
- Bobina voltimétrica (C-D) de pequeña sección y gran longitud, $Z_U \approx \infty$ (circuito abierto).
  - Conectada en paralelo con la carga o fuente.
- Ambas bobinas presentan un carácter resistivo.



- Lectura de W
  - Visto desde la carga:

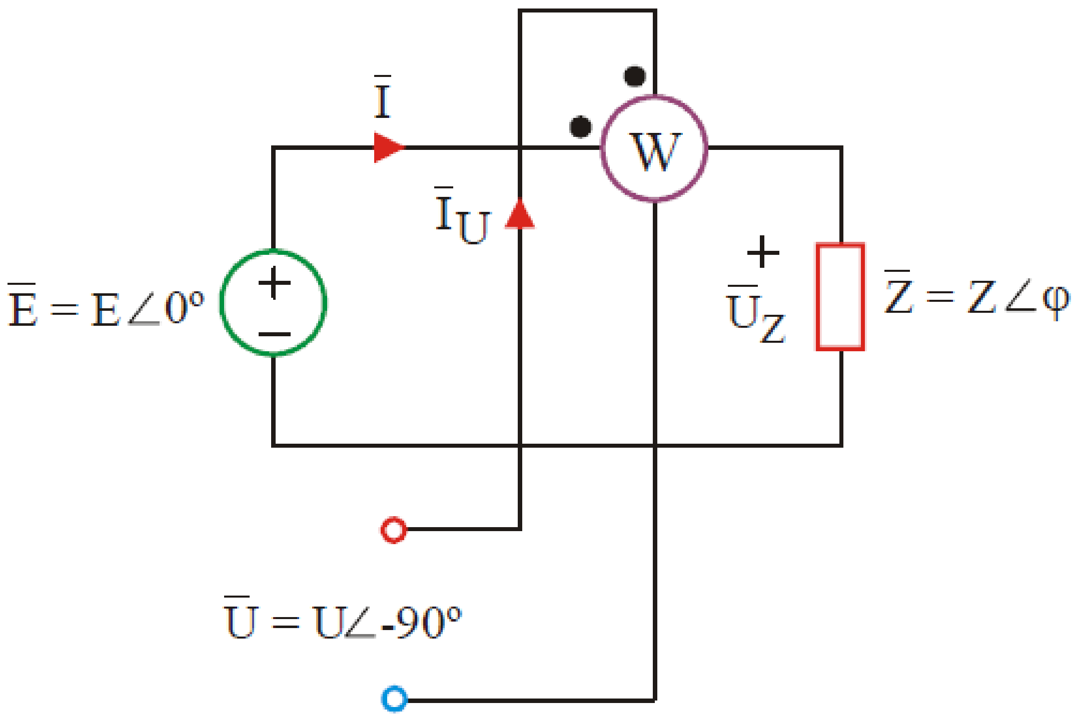
$$\boxed{W = P_Z = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)\cdot i(t)\,d\tau = \left|\bar{U}_Z\right|\left|\bar{I}\right| cos(\bar{I}_U \wedge \bar{I}) = U_Z\; I\; cos(\bar{U}_Z \wedge \bar{I})}$$

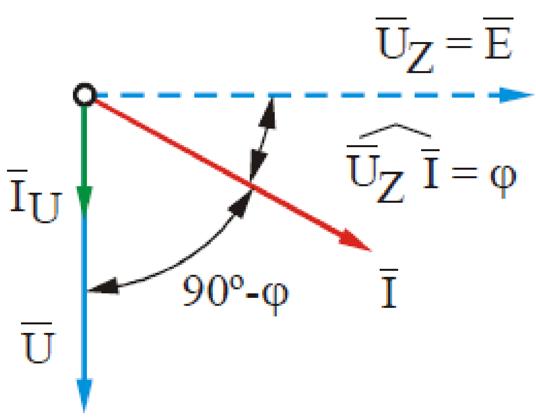
  - Visto desde la alimentación:

$$\boxed{W = P_E = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)\cdot i(t)\,d\tau = \left|\bar{E}\right|\left|\bar{I}\right| cos(\bar{I}_U \wedge \bar{I}) = E\; I\; cos(\bar{E} \wedge \bar{I})}$$

❖ Conexión para la medida de potencia reactiva

- Bobina amperimétrica: idéntica a la medida de activa.
- Bobina voltimétrica: alimentada con una tensión auxiliar, desfasada 90º en retraso, respecto de la tensión de alimentación del elemento.
- Conexión y lectura:





+ Lectura de *W*:

$$\boxed{W = |\bar{U}|\,|\bar{I}|\,\cos(\bar{I}_U \,^\wedge\, \bar{I}\,) = U\,I\,\cos(90-\varphi) = U\,I\,\sin\varphi}$$

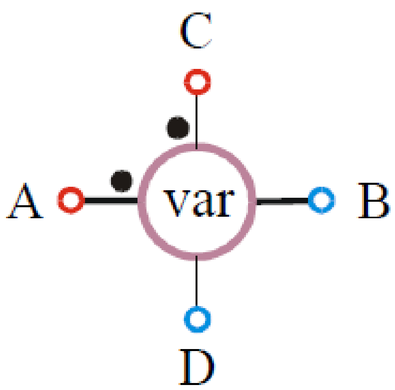
+ Factor de escala. Medida de la potencia reactiva:

$$\boxed{Q_Z = Q_E = \frac{E}{U}\; x \;Lectura\; W}$$

✓ *Varímetro o vármetro*

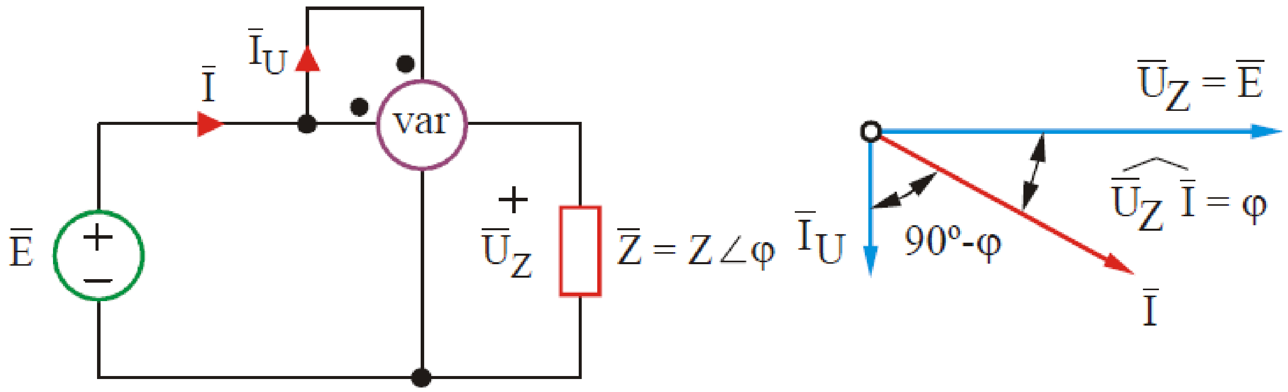
- Medidor de potencia reactiva.

- Símbolo:



- Construido: a partir de una vatímetro, cuya bobina voltimétrica es, prácticamente, inductiva pura.

- Conexión para la medida: igual que el vatímetro.
  + Montaje y lectura:



- Lectura de *varímetro*
  - Visto desde la carga:

$$\boxed{var = Q_Z = \left|\bar{U}_Z\right| \left|\bar{I}\right| \cos(\bar{I}_U \wedge \bar{I}) = U_Z\, I \sin\varphi}$$

  - Visto desde la alimentación:

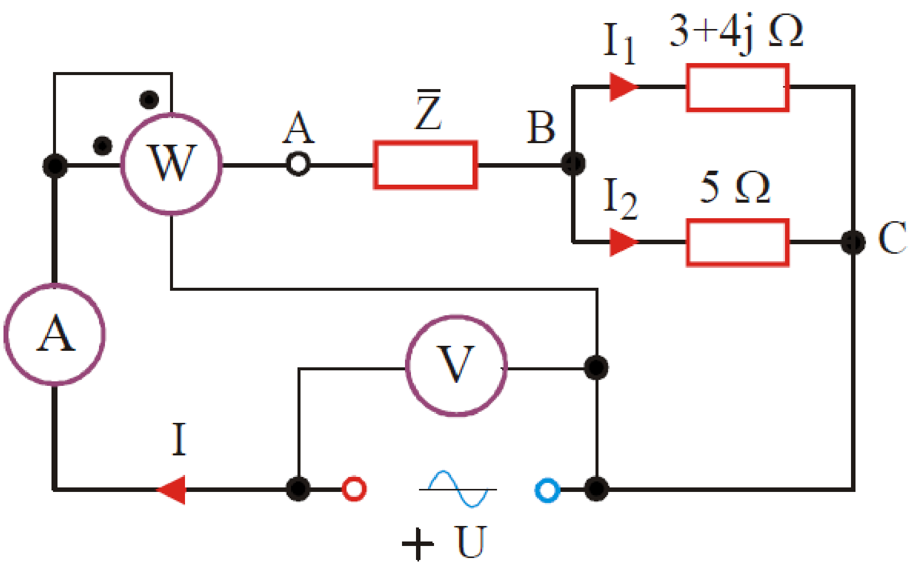
$$\boxed{var = Q_E = \left|\bar{E}\right| \left|\bar{I}\right| \cos(\bar{I}_U \wedge \bar{I}) = E\, I \sin\varphi}$$

Ejemplo 2.4.

En la red pasiva de la figura, alimentada en corriente alterna a 50 Hz, las lecturas de los aparatos de medida, son:

Voltímetro, V = 200 V, Amperímetro, A = 20 A, Vatímetro, W = 4 kW. Con estos datos, ***calcular***:

1. El valor de la impedancia desconocida, Z.
2. Verificar que la lectura del vatímetro W, coincide con la potencia consumida por los elementos pasivos resistivos.



❖ Solución:

- Apartado 1.
  - Lecturas de los aparatos de medida:
    - Lectura V = U = 200 V.
    - Lectura A = I = 20 A.
    - Lectura W = P = 4000 W.

+ El módulo de la impedancia equivalente, es:

$$Z_{eq} = \frac{U}{I} = \frac{200}{20} = 10 \ \ \Omega.$$

+ De la lectura del vatímetro:

$$W = U\,I\,\cos(\overline{U}\wedge\overline{I}) = U\,I\,\cos\varphi \quad \Rightarrow \cos(\overline{U}\wedge\overline{I}) = \cos\varphi = \frac{W}{U\,I} = 1$$

Por lo tanto,

$$\overline{U}\wedge\overline{I} = \varphi = 0^o \Rightarrow \overline{Z}_{eq} = R_{eq} + jX_{eq} \text{ con: } \Rightarrow \begin{cases} \overline{Z}_{eq} = R_{eq} \\ X_{eq} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{\overline{Z}_{eq} = 10 + j0}$$

+ La impedancia equivalente compleja de la red, en función de los elementos pasivos, es:

$$\overline{Z}_{eq} = \overline{Z} + Z_{BC} = R + jX + \frac{5(3+j4)}{8+j4} = R + jX + \frac{10}{4} + j\frac{5}{4} \quad ,$$

$$\boxed{\overline{Z}_{eq} = \left(R + \frac{10}{4}\right) + j\left(X + \frac{5}{4}\right)}$$

+ Igualando partes reales e imaginarias, es:

<u>Parte real</u>: $10 = R + \frac{10}{4}$; <u>Parte imaginaria</u>: $j0 = j\left(X + \frac{5}{4}\right)$

$$\boxed{\overline{Z} = R + jX = \frac{30}{4} - j\frac{5}{4} = 7{,}5 - j1{,}25 = 7{,}6\angle -9{,}46^o \ \ \Omega}$$

- Apartado 2.

  La potencia consumida por los elementos pasivos, se formula:

$$\boxed{P = \sum_k R_k \cdot I_k^2 = (7{,}5 \cdot I^2) + (3 \cdot I_1^2) + (5 \cdot I_2^2) = 4.000 \quad W}$$

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

MEJORA DEL FACTOR DE POTENCIA

✓ Planteamiento del problema

- En general, las instalaciones o los receptores eléctricos presentan un carácter resistivo-inductivo (muy excepcionalmente carácter capacitivo).
- La potencia utilizada por un receptor o instalación $\Rightarrow$ transformable en luz, calor o trabajo mecánico $\Rightarrow$ es potencia activa P.
- Un bajo λ provoca un aumento de la corriente demandada, sobre la estrictamente necesaria:

$$\boxed{\uparrow I = \frac{P}{U \cos\varphi \downarrow}}$$

P = *cte*. (generada, transportada o consumida).

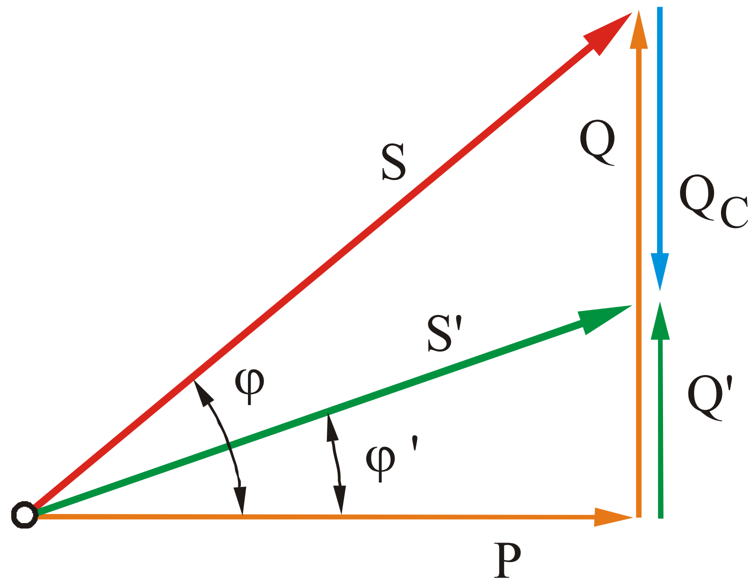
U = *cte*. (tensión de suministro).

+ Aumento de pérdidas por efecto Joule (generadores, transformadores y líneas):

$$\boxed{Perdidas\ Joule = RI^2 = R\frac{P^2}{U^2 \cos^2\varphi}}$$

✓ *Mejora del FP: batería de condensadores en paralelo*

❖ Según triángulo de potencias de instalación



- Triángulo inicial del receptor: *P, Q, S, cos* φ = *P / S.*
- Conexión en derivación de condensadores: Q_C.
- Triángulo final del receptor: P, Q’, S’, cos φ’ = P / S’.

❖ Potencia reactiva capacitiva a instalar

$$\left. \begin{array}{l} \tan\varphi = \dfrac{Q}{P},\ Q = P\tan\varphi \\ \tan\varphi' = \dfrac{Q'}{P},\ Q' = P\tan\varphi' \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{Q_C = Q - Q' = P\,(\tan\varphi - \tan\varphi')}$$

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

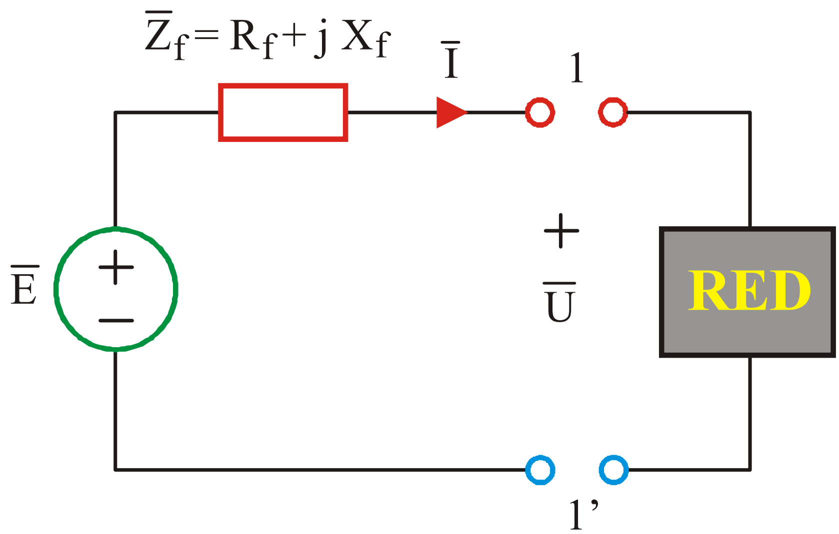
FUENTES REALES EN C.A.

✓ *Fuente real de tensión*

❖ Parámetros que la definen

- Como generador / motor (alternador):
  - Fuerza electromotriz / contra-electromotriz, $\overline{E}$ (V).
  - Impedancia interna, $\overline{Z}_f = R_f + jX_f$ (Ω).
  - Potencia útil máxima (eléctrica / mecánica), $S_{u\,máx}$ *(VA)*.

❖ Símbolo



❖ Ecuación característica: $\overline{U} = f(\overline{I})$

- Aplicando la SLK: $\boxed{\overline{U} = \overline{E} - (R_f + jX_f)\overline{I} = \overline{E} - \overline{Z}_f\,\overline{I}}$

- Punto-s de funcionamiento:
  - Par de valores $(\overline{U}, \overline{I})$, que verifican la característica.
  - Son función de la red externa.
- Puntos notables de la característica:
  - Punto de vacío: $\overline{I} = 0$, $\overline{U}_O = \overline{E}$.
  - Punto de cortocircuito: $\overline{U} = 0$, $\overline{I}_{CC} = \dfrac{\overline{E}}{\overline{Z}_f}$.

❖ Representación gráfica de la característica

- Su representación gráfica debe realizarse en el plano complejo, es complicada.

✓ *Balances de potencia y rendimientos*

❖ Regímenes de funcionamiento de la fuente real de tensión

- Tipos:
  - Generador suministrando potencia activa.
  - Generador absorbiendo potencia activa, (rendimiento negativo).
  - Motor absorbiendo potencia activa.

❖ Balance de potencias de potencias del generador

- Potencia aparente compleja útil:

$$\overline{S}_u = \overline{U}\,\overline{I}^* = P_u \pm jQ_u$$

  + P_u, potencia activa útil y Q_u, potencia reactiva útil.

- Potencia aparente compleja generada:

$$\overline{S}_g = \overline{E}\,\overline{I}^* = P_g \pm jQ_g$$

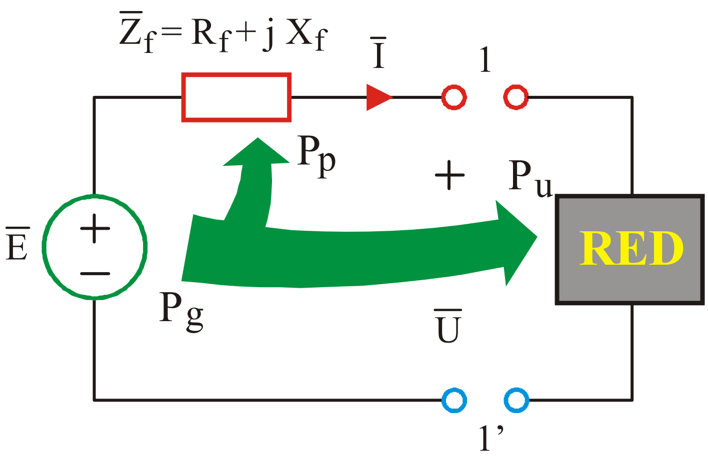
  + P_g, potencia activa generada y Q_g, potencia reactiva generada.

- Potencia aparente compleja perdida:

$$\overline{S}_p = \overline{Z}_f\, I^2 = P_p + jQ_p$$

  + P_p, potencia activa perdida y Q_p, potencia reactiva perdida.

- <u>Según el teorema de Boucherot</u>: $\left\{ \begin{array}{l} P_u = P_g - P_p \\ \pm Q_u = \pm Q_g - Q_p \end{array} \right.$



- Rendimiento:
  - Expresiones generales:

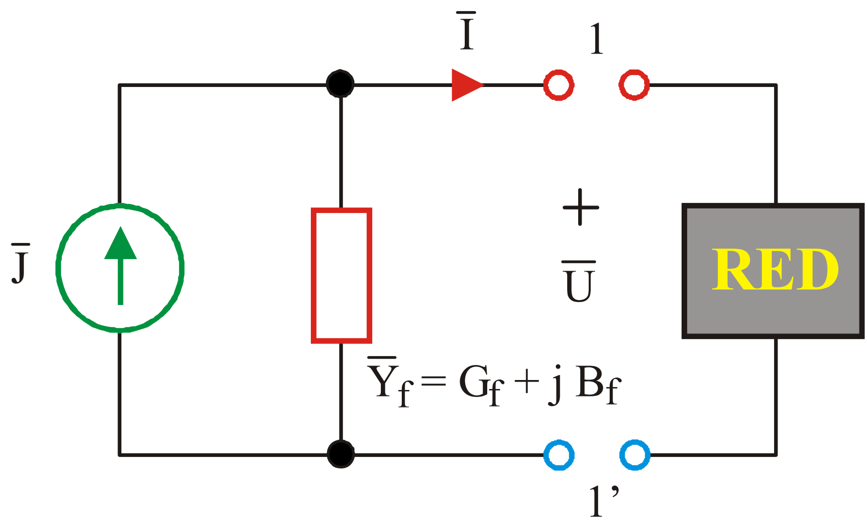
$$\eta_g = 100\frac{P_u}{P_g}$$

✓ *Fuente real de corriente o intensidad*

❖ Parámetros que la definen

- Como generador / motor:
  - Corriente de fuente, $\overline{J}$ (A).
  - Admitancia interna, $Y_f = G_f + jB_f$ (S).
  - Potencia útil máxima (eléctrica / mecánica), $S_{u\,máx}$ *(VA)*.

❖ Símbolo



❖ Ecuación característica: $\bar{I} = f(\bar{U})$

- Aplicando la PLK: $\boxed{\bar{I} = \bar{J} - (G_f + jB_f)\bar{U} = \bar{J} - \bar{Y}_f \bar{U}}$
- Puntos de funcionamiento:
  - Par de valores $(\bar{U}, \bar{I})$, que verifican la característica.
  - Son función de la red externa.
- Puntos notables de la característica:
  - Pto. de vacío: $\bar{I} = 0$, $\bar{U}_O = \dfrac{\bar{J}}{\bar{Y}_f}$.
  - Pto. de cortocircuito: $\bar{U} = 0$, $\bar{I}_{cc} = \bar{J}$.

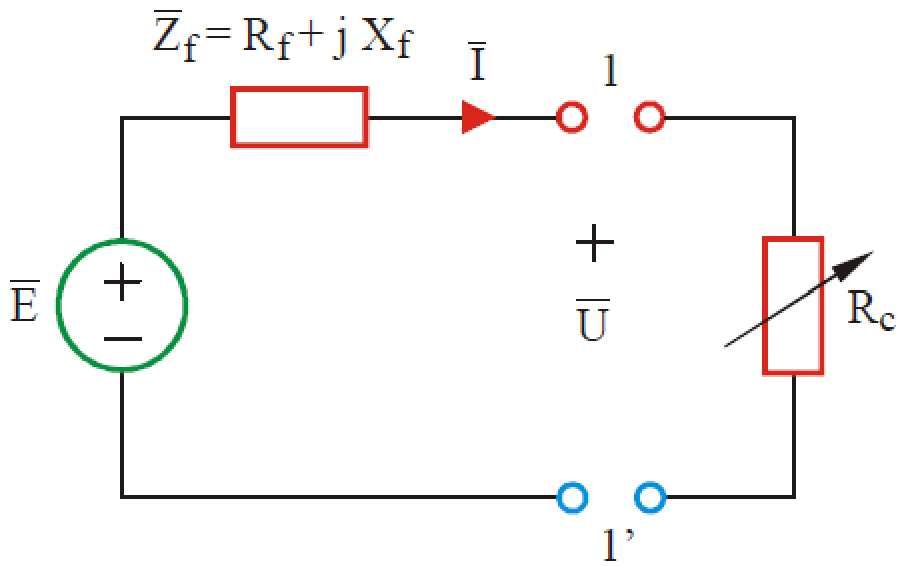
✓ *Teorema de máxima transferencia de potencia*

❖ Introducción

- Aplicado a generadores suministrando potencia activa.
- Análisis del valor de la impedancia que extrae la máxima potencia activa del generador.
- Casos que se pueden presentar, según la parte variable de $\bar{Z}_c = Z_c\angle\varphi_c = R_c \pm jX_c$:

1. Reactancia nula, resistencia variable.
2. Resistencia y reactancia variables.
3. Resistencia variable, reactancia constante.

❖ Caso I: Resistencia variable



- Corriente:

$$I = \frac{E}{\sqrt{(R_f + R_c)^2 + X_f^2}}$$

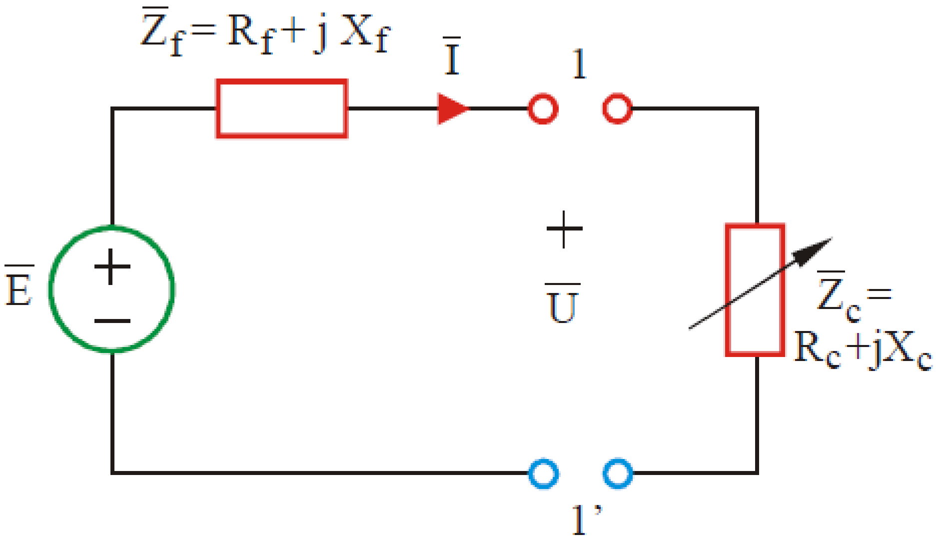
- Potencia de la carga:

$$P_c = R_c\, I^2 = \frac{R_c\, E^2}{(R_f + R_c)^2 + X_f^2}$$

- Condición de extremo: $\dfrac{dP_c}{dR_c} = 0$

- Máximo, para: $R_c = \sqrt{R_f^2 + X_f^2} \Rightarrow \boxed{R_c = Z_f}$

❖ Caso II: Impedancia con resistencia y reactancia variables



- Corriente:

$$I = \frac{E}{\sqrt{(R_f + R_c)^2 + (X_f + X_c)^2}}$$

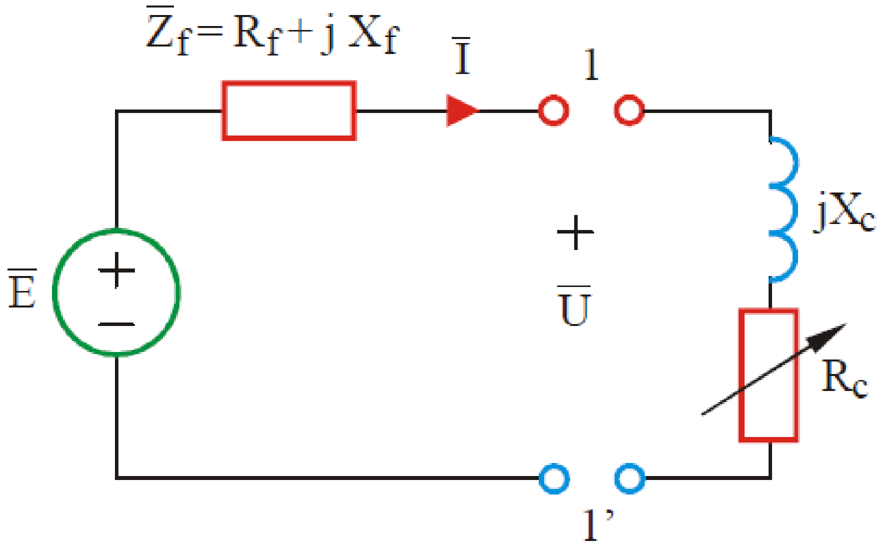
- Potencia de la carga:

$$P_c = R_c I^2 = \frac{R_c\, E^2}{(R_f + R_c)^2 + (X_f + X_c)^2}$$

- Condiciones de extremo: $\begin{cases} \dfrac{\partial P_c}{\partial R_c} = 0 \\ \dfrac{\partial P_c}{\partial X_c} = 0 \end{cases}$

- Máximo, para: $\begin{cases} R_c - R_f = 0 \\ X_c + X_f = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\overline{Z}_c = \overline{Z}_f^{\,*}}$

❖ Caso III: Impedancia con reactancia constante y resistencia variable



- Sumando la reactancia de la carga a la del generador, constituye el Caso I
- Máximo, para: $\boxed{R_c = \sqrt{R_f^2 + (X_f + X_c)^2}}$

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Chua, L.O. et al. LINEAR AND NONLINEAR CIRCUITS. McGraw-Hill Book Company. New York. 1987.
- Eguíluz, L. I. et al. PRUEBAS OBJETIVAS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS. Eunsa. Pamplona. 2001.
- Fallot, M. THÉORIE GÉNÉRALE DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES. Dunod. París. 1960.
- Madrigal, R.I. Teoría moderna de CIRCUITOS ELÉCTRICOS. Ed. Pirámide, S.A. Madrid. 1 977.
- Nilsson, J. W. CIRCUITOS ELÉCTRICOS. Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. U.S.A.. 1995.
- Nilsson, J. W. - Riedel, S. A. CIRCUITOS ELÉCTRICOS. Prentice Hall. México. 2001.
- Parra, V. M. y Otros. TEORÍA DE CIRCUITOS I y II. U.N.E.D. Madrid. 1991.
- Ras, E. TEORÍA DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS. FUNDAMENTOS. Marcombo Boixareu Editores. Barcelona. 1 988.
- Sánchez, P. et al. TEORÍA DE CIRCUITOS. Problemas y pruebas objetivas orientadas al aprendizaje. PEARSON, Prentice Hall. Madrid, 2007.

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-