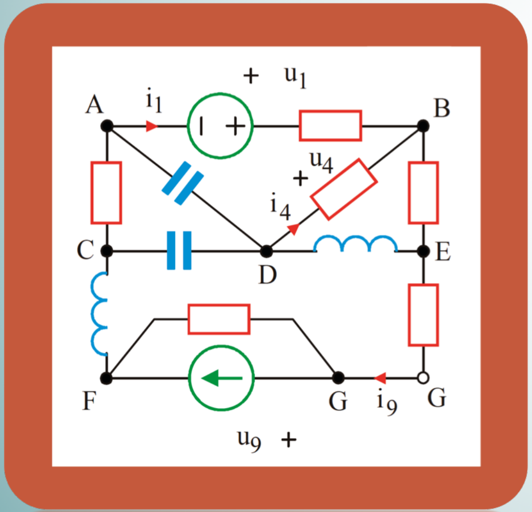
Fundamentos de Ingeniería Eléctrica

U.D. 2: CIRCUITOS EN RÉGIMEN PERMANENTE SINUSOIDAL

Tema 2.4 – Método Simbólico o Complejo



Alberto Arroyo Gutiérrez
José Carlos Lavandero González
Sergio Bustamante Sánchez
Eugenio Sainz Ortiz
Alberto Laso Pérez
Raquel Martínez Torre
Mario Mañana Canteli

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ENERGÉTICA

Grado en Ingeniería Eléctrica y Grado en Ingeniería en Electrónica Industrial y Automática

G412/G280 FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

U.D. 2: Circuitos en Régimen Permanente Sinusoidal

Tema 2.4 – Método Simbólico o Complejo

Tema 2.4 – Método Simbólico o Complejo

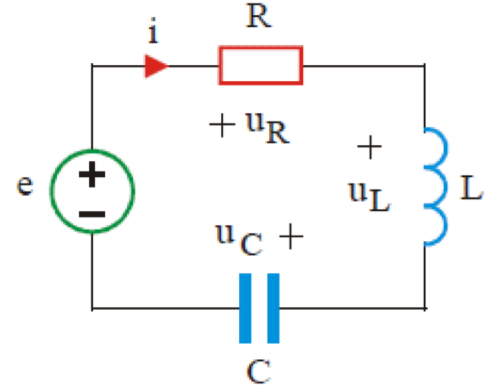
1. Clase Previa
2. Resolución del circuito RLC serie mediante el método de la transformada compleja
3. Impedancias y admitancias complejas
4. Leyes y métodos fasoriales
5. Asociaciones de elementos
6. Ejemplo
7. Resumen de la Clase
8. Clase Siguiente

2

Resolución del Circuito RLC Serie Mediante el Método de la Transformada Compleja

RESOLUCIÓN DEL CIRCUITO RLC SERIE MEDIANTE EL M.T.C

- **Circuito**



- **Forma compleja de excitación**

$$e = \sqrt{2}E\sin(\omega t) \Rightarrow \overline{E} = E\angle 0°$$

- **Solución compleja del régimen permanente**

$$\boxed{\overline{I} = \frac{\overline{E}}{R + j(X_L - X_C)}} \qquad (4)$$

- Operando: $\boxed{\overline{I} = \dfrac{E\angle 0°}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}\angle \arctan\dfrac{X_L - X_C}{R}} = \dfrac{E}{Z}\angle -\varphi = I\angle -\varphi}$

- Valor instantáneo de la solución: aplicando la transformada inversa,

$$\overline{I} = I\angle -\varphi \Rightarrow i = \sqrt{2}I\sin(\omega t - \varphi)$$

3

Impedancias y Admitancias Complejas

- **Impedancia compleja: del denominador de (4),**

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{Z} &= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j(X_L - X_C) = R + jX = \\ &= Z\,e^{j\varphi} = Z\cos\varphi + jZ\operatorname{sen}\varphi = Z\angle\varphi\end{aligned}}$$

  + Observar que $\overline{Z}$ es función de ω.
  + La impedancia $\overline{Z}$, en ningún caso, es un fasor.

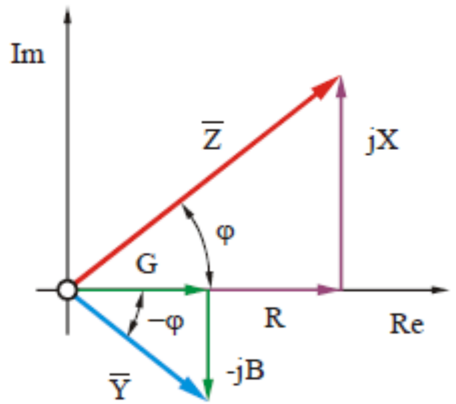
- <u>Impedancia compleja de los elementos pasivos</u>
  + Resistencia: $\boxed{\overline{Z} = R + j0 = R\angle 0°}$
  + Bobina: $\boxed{\overline{Z} = 0 + j\omega L = jX_L = X_L\angle 90°}$
  + Condensador: $\boxed{\overline{Z} = 0 + \frac{1}{j\omega C} = -jX_C = X_C\angle -90°}$

- Observar la equivalencia formal con la impedancia operacional: $D \equiv j\omega$.

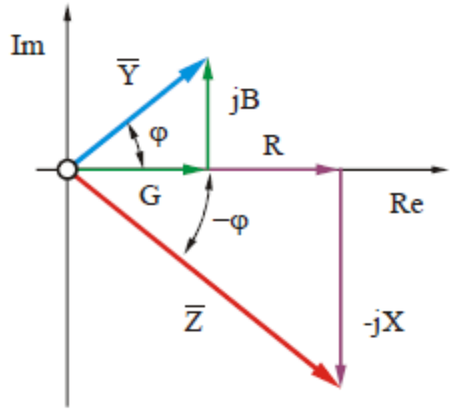
Admitancia compleja

- Definición: $\boxed{\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1\angle 0}{Z\angle\varphi} = \frac{1}{Z}\angle -\varphi}$
- Componentes: $\boxed{\overline{Y} = G + jB}$
  - G, conductancia, medida en siemens (S).
  - B, susceptancia, medida en siemens (S)
- Diagramas de immitancias complejas

+ Red resistiva-inductiva



+ Red resistiva-capacitiva



4

Leyes y Métodos Fasoriales

Leyes de Kirchhoff

- Primera Ley (nudos / cortes):
  - Valores instantáneos: $i_1 + i_2 + ... + i_n = 0$
  - Valores sinusoidales:

$$\sqrt{2}\, I_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \sqrt{2}\, I_2 \sin(\omega t + \varphi_2) + ... + \sqrt{2}\, I_n \sin(\omega t + \varphi_n) = 0$$

  - Valores fasoriales:

$$I_1 \angle \varphi_1 + I_2 \angle \varphi_2 + ... + I_n \angle \varphi_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + ... + \bar{I}_n = 0$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \pm \bar{I}_k = 0}$$

- Segunda Ley (mallas / lazos):
  - De forma semejante a la primera ley: $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \pm \bar{U}_k = 0}$

5

Asociaciones de elementos

Asociación de elementos pasivos

- Aplicando la semejanza formal, $D \equiv j\omega$, a las asociaciones en términos operacionales (tema 1) Resultan:

  + Teorema de Kennelly:

    - Transformación triángulo a estrella:

$$\overline{Z}_a = \frac{\overline{Z}_{ab}\,\overline{Z}_{ca}}{\sum \overline{Z}_\Delta} \quad , \quad \overline{Z}_b = \frac{\overline{Z}_{ab}\,\overline{Z}_{bc}}{\sum \overline{Z}_\Delta} \quad , \quad \overline{Z}_c = \frac{\overline{Z}_{bc}\,\overline{Z}_{ca}}{\sum \overline{Z}_\Delta}$$

donde, $\sum \overline{Z}_\Delta = \overline{Z}_{ab} + \overline{Z}_{bc} + \overline{Z}_{ca}$

  + Transformación de estrella a triángulo:

$$\overline{Z}_{ab} = \frac{\sum \overline{Z}_i \overline{Z}_j}{\overline{Z}_c} \quad , \quad \overline{Z}_{bc} = \frac{\sum \overline{Z}_i \overline{Z}_j}{\overline{Z}_a} \quad , \quad \overline{Z}_{ca} = \frac{\sum \overline{Z}_i \overline{Z}_j}{\overline{Z}_b}$$

donde, $\sum \overline{Z}_i \overline{Z}_j = \overline{Z}_a \overline{Z}_b + \overline{Z}_b \overline{Z}_c + \overline{Z}_c \overline{Z}_a$

6

Ejemplo

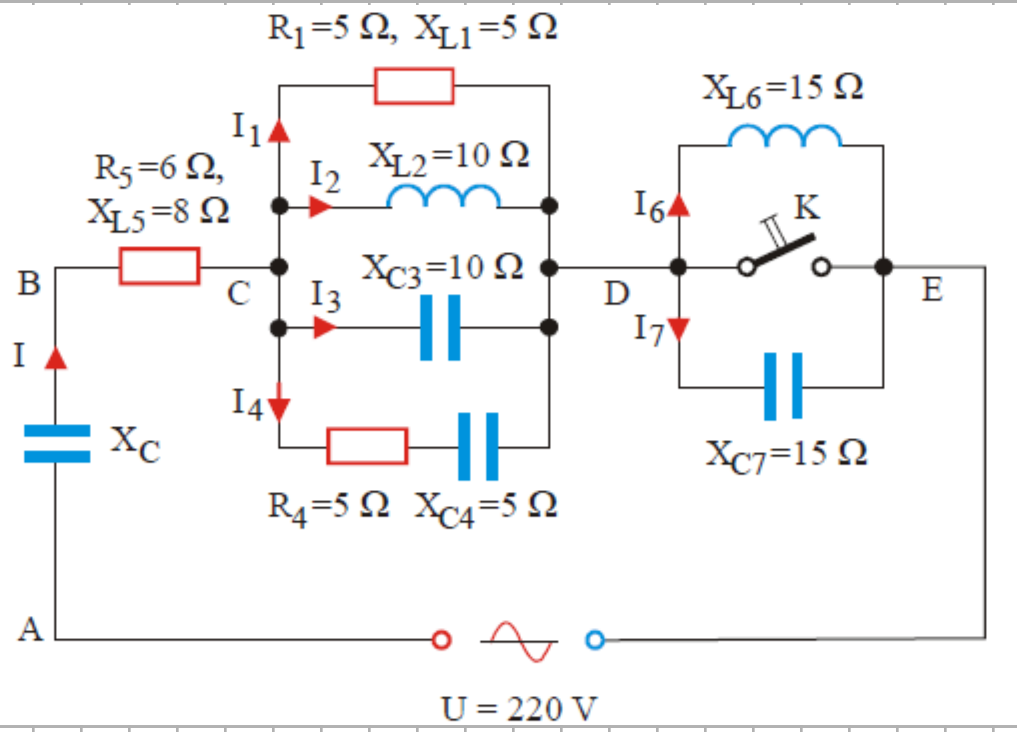
Sobre la red de la figura, **determinar** las tensiones, corrientes parciales y reactancia del condensador X_C, en los siguientes casos:

A. Por el método complejo.

A.1 Con el interruptor K cerrado:

A.1.1 Cuando U en fase con I.

A.2 Con el interruptor K abierto.



+ <u>Apartado B.1</u>: Interruptor K cerrado

$$U_{DE} = 0 \Rightarrow I_6 = I_7 = 0.$$

* *Impedancia equivalente compleja de la red:*

$$\frac{1}{\overline{Z}_{CD}} = \frac{1}{\overline{Z}_1} + \frac{1}{\overline{Z}_2} + \frac{1}{\overline{Z}_3} + \frac{1}{\overline{Z}_4} \Rightarrow \overline{Z}_{CD} = 5 + j0 = 5\angle 0^\circ \ \ \Omega \ ,$$

$$\overline{Z}_{eq} = -jX_C + 6 + j8 + \overline{Z}_{CD} = 11 + j(8 - X_C) \ \ \Omega .$$

- La impedancia equivalente, origina el desfase entre $\overline{U}$ e $\overline{I}$, es decir φ:

$$\tan\varphi = \tan(\overline{U} \ \hat{} \ \overline{I}) = \frac{8 - X_C}{11}$$

* <u>Apartado B.1.1</u>: *U* en fase con *I*.

$$\tan\varphi = 0 = \frac{8 - X_C}{11} \Rightarrow \boxed{X_C = 8 \ \ \Omega} \ ,$$

$$\overline{Z}_{eq} = 11 + j(8 - X_C) = 11 \ \ \Omega \ ,$$

- *Cálculo de tensiones e intensidades:*

$$\overline{I} = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}_{eq}} = \frac{220\angle 0^\circ}{11\angle 0^\circ} = 20\angle 0^\circ \ \ A,$$

$$\overline{U}_{AB} = -jX_C\ \overline{I} = 8\angle -90^\circ \cdot 20\angle 0^\circ = 160\angle -90^\circ \quad V\ ,$$

$$\overline{U}_{BC} = \overline{Z}_5\ \overline{I} = 120 + j160 = 200\angle 53{,}13^\circ \quad V\ ,$$

$$\overline{U}_{CD} = \overline{Z}_{CD}\ \overline{I} = 5\angle 0^\circ \cdot 20\angle 0^\circ = 100\angle 0^\circ \quad V\ ,$$

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{U}_{CD}}{\overline{Z}_1} = \frac{100\angle 0^\circ}{5\sqrt{2}\angle 45^\circ} = 10\sqrt{2}\angle -45^\circ \quad A\ ,$$

$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{U}_{CD}}{\overline{Z}_2} = \frac{100\angle 0^\circ}{10\angle 90^\circ} = 10\angle -90^\circ \quad A\ ,$$

$$\overline{I}_3 = \frac{\overline{U}_{CD}}{\overline{Z}_3} = \frac{100\angle 0^\circ}{10\angle -90^\circ} = 10\angle 90^\circ \quad A\ ,$$

$$\overline{I}_4 = \frac{\overline{U}_{CD}}{\overline{Z}_4} = \frac{100\angle 0^\circ}{5\sqrt{2}\angle -45^\circ} = 10\sqrt{2}\angle 45^\circ \quad A$$

+ Apartado B.2: Interruptor K abierto

  * *Cálculo de la impedancia equivalente, tensiones e intensidades:*

$$\overline{Z}_{DE}=\frac{\overline{Z}_6\cdot\overline{Z}_7}{\overline{Z}_6+\overline{Z}_7}=\frac{j15\cdot(-j15)}{0}\rightarrow\infty \qquad \bar{I}\rightarrow 0\ A \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} U_{AB}=U_{BC}=U_{CD}=0 \\ \overline{U}_{DE}=U=220\angle 0^{\circ}\ \ V \end{cases},$$

$$\bar{I}_6=\frac{\overline{U}_{DE}}{\overline{Z}_6}=\frac{220\angle 0^{\circ}}{15\angle 90^{\circ}}=14{,}\hat{6}\angle -90^{\circ}\ \ A,$$

$$\bar{I}_7=\frac{\overline{U}_{DE}}{\overline{Z}_7}=\frac{220\angle 0^{\circ}}{15\angle -90^{\circ}}=14{,}\hat{6}\angle 90^{\circ}\ \ A.$$