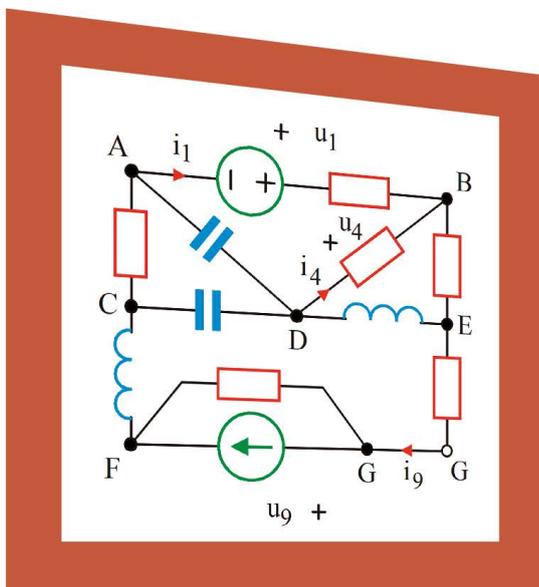


# Fundamentos de Ingeniería Eléctrica

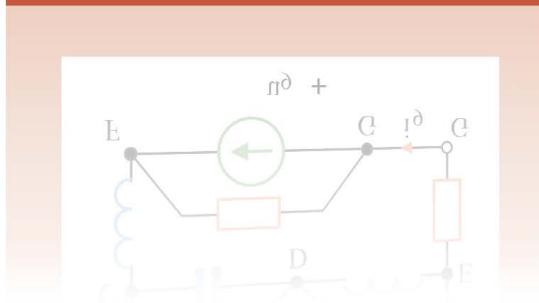
## UD 3. Análisis de la respuesta en frecuencia



Alberto Arroyo Gutiérrez  
José Carlos Lavandero González  
Sergio Bustamante Sánchez  
Eugenio Sainz Ortiz  
Alberto Laso Pérez  
Raquel Martínez Torre  
Mario Mañana Canteli

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

Este material se publica bajo la siguiente licencia:  
Creative Commons BY-NC-SA 4.0





# BT3: ANÁLISIS DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA

## CONTENIDOS

1.	<a href="#"><u>Introducción</u></a> .....	02
2.	<a href="#"><u>Calidad de bobinas y condensadores reales</u></a> ..	05
3.	<a href="#"><u>Estudio del dipolo RLC serie en frecuencia</u></a> ..	08
4.	<a href="#"><u>Estudio del dipolo GCL por dualidad</u></a> .....	15
5.	<a href="#"><u>Atenuación en un circuito</u></a> .....	17
6.	<a href="#"><u>Referencias bibliográficas</u></a> .....	18

-O-O-O-O-O-O-O-O-O-O-O-O-O-O-O-O-



## INTRODUCCIÓN

### ✓ Generalidades

#### ❖ Características del dominio de la frecuencia

- La **immitancia** compleja de la red es función de la pulsación  $\omega$  o de la **frecuencia**.
- En el campo de variación de  $\omega$  existe una serie de conceptos de especial interés: **amortiguación**, **factor de calidad**, **resonancia** y **ancho de banda**.

#### ❖ Fenómeno de resonancia

- Características:
  - + Ocurre en redes que contienen elementos **L** y **C**.
  - + Se origina para una o varias frecuencias de la pulsación de la excitación. Se debe tener en cuenta la aparición de **armónicos**.
  - + En ocasiones, las respuestas -tensiones/corrientes-, pueden ser muy superiores a la excitación.
- Propiedades equivalentes de resonancia:
  - + El **desfase** tensión-intensidad es **nulo**.
  - + La immitancia de la red es **óhmica pura** (resistiva).
  - + El **factor de potencia** de la red vale la **unidad**.
- Tipos de resonancia:
  - + Resonancia **serie** o de tensión.
  - + Resonancia en **paralelo** o de corriente.



- Aplicación de los circuitos resonantes:
  - + Muy **perjudicial** ( $R \ll X_L$  ó  $X_C$ ) en transporte, distribución y consumo de energía eléctrica: sobretensiones y sobreintensidades.
  - + Muy **beneficiosa** ( $R \cong X_L$  ó  $X_C$ ): mejora del factor de potencia.
  - + Fundamental en comunicaciones (telefonía, radio, televisión, etc.), equipos de medida y convertidores D.C./D.C., amplificación de señales débiles, supresión de señales no deseadas (filtros), etc.

### ✓ Factor de calidad y ancho de banda

#### ❖ Factor de calidad, Q

- Significado:
  - + Es un factor que evalúa el poder de **almacenamiento** de energía de una red, frente a las **pérdidas**.
  - + También ayuda a saber si pueden existir **sobretensiones** o **sobrecorrientes** en la red. Por ello, también puede recibir el nombre de factor de sobretensión o de sobrecorriente.
- Definición general:

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energía máxima almacenada}}{\text{Energía disipada por periodo}}$$

- + Atención: ¡no confundir la simbología con la potencia reactiva Q!



❖ Ancho de banda,  $B$

• Definición general:

+ Intervalo de frecuencias  $[\omega_1, \omega_2]$ , tal que:

$$P[\omega_1, \omega_2] \geq \frac{P_{m\acute{a}x}}{2} = \frac{R|I_{m\acute{a}x}|^2}{2}$$

+  $P_{m\acute{a}x}$  = Máxima transferencia de potencia

+ Magnitud del ancho de banda:  $B_\omega = \omega_2 - \omega_1$





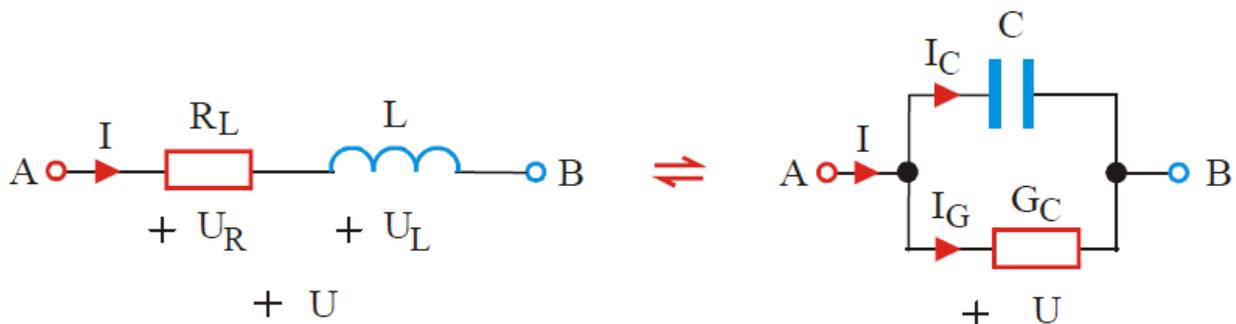
## ☞ CALIDAD DE BOBINAS Y CONDENSADORES REALES

### ✓ Introducción

- Objetivo: evaluar el poder de almacenamiento frente a las pérdidas o disipación de energía en una bobina real  $L$  ( $R$  y  $X_L$ ) o en un condensador real  $C$  ( $R$  y  $X_C$ ).

### ❖ Circuitos equivalentes de bobina y condensador reales

- Bobina real:
- Condensador real:



### ❖ Resistencia y conductancia de pérdidas

En una bobina  $L$  o condensador  $C$  real, se desea que el efecto de almacenamiento ( $X_L$  o  $X_C$ ) predomine sobre el efecto de las pérdidas ( $R$ ).

Es decir:

- Bobina:

$$\left. \begin{array}{l} \omega L \gg R_L \\ U_L \gg U_R \end{array} \right\}$$



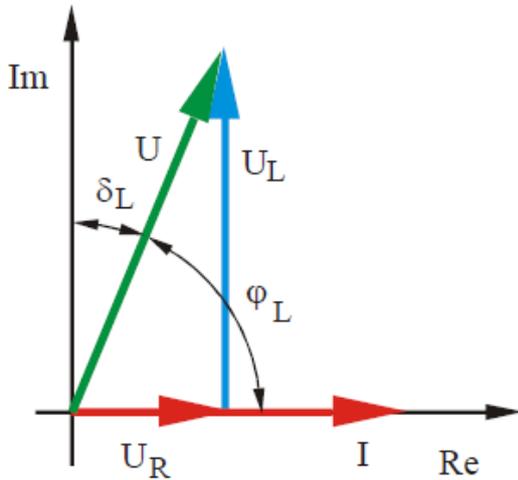
- Condensador:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega C \gg G_C \\ I_C \gg I_G \end{array} \right.$$

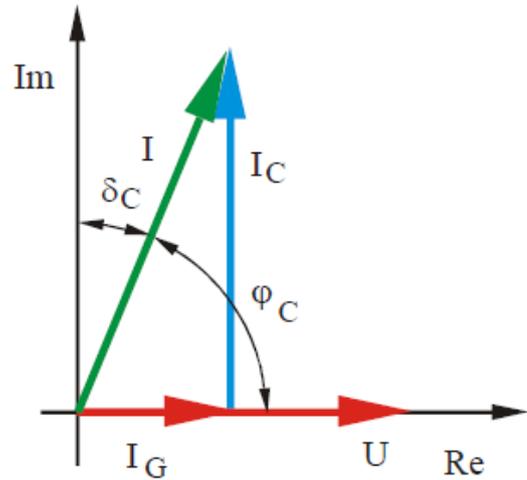


### ❖ Diagramas fasoriales

- Bobina:



- Condensador:



### ✓ Ángulo de pérdidas y factor de calidad en bobinas y condensadores reales

- Ambos conceptos, son recogidos en los catálogos técnicos de los **fabricantes**.
  - + El **ángulo de pérdidas** define las pérdidas de la impedancia real.
  - + El **factor de calidad** evalúa el poder de almacenamiento frente a la disipación de energía.

### ❖ Ángulo de pérdidas ( $\tan \delta$ )

- Bobina:

$$\tan \delta_L = \frac{U_R}{U_L} = \frac{R_L}{\omega L} = \frac{P}{Q_L}$$

$$\tan \delta_L = \frac{1}{\tan \varphi_L}$$

- Condensador:

$$\tan \delta_C = \frac{I_G}{I_C} = \frac{G_C}{\omega C} = \frac{P}{Q_C}$$

$$\tan \delta_C = \frac{1}{\tan \varphi_C}$$



❖ Factor de calidad

- Bobina:

$$Q_L = 2\pi \frac{\frac{1}{2} L \hat{I}^2}{R_L I^2 T} = \omega \frac{\frac{1}{2} L 2 I^2}{R_L I^2} = \frac{\omega L}{R_L} = \frac{U_L}{U_R} = \frac{Q_L}{P} = \frac{1}{\tan(\delta)}$$

- Condensador:

$$Q_C = 2\pi \frac{\frac{1}{2} C \hat{U}^2}{G_C U^2 T} = \omega \frac{\frac{1}{2} C 2 U^2}{G_C U^2} = \frac{\omega C}{G_C} = \frac{I_C}{I_G} = \frac{Q_L}{P} = \frac{1}{\tan(\delta)}$$



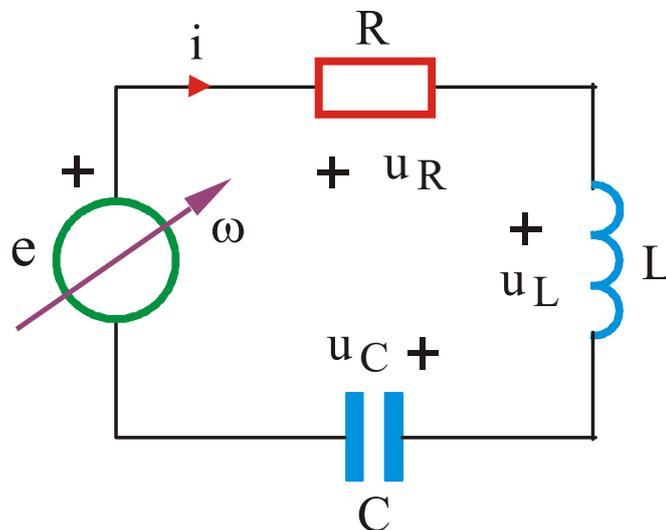


## ESTUDIO DEL DIPOLO RLC SERIE EN FRECUENCIA

✓ Datos de partida y características del punto de resonancia

❖ Datos de partida

- Circuito



- Excitación/impedancia

$$e = \sqrt{2} E \sin(\omega t), \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{E} = E \angle 0^\circ = E = \text{cte.} \\ \omega = \text{variable} \end{array} \right.,$$

$$\bar{Z} = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = \bar{Z}(\omega)$$

❖ Punto de resonancia

- Condición:  $\bar{E} \wedge \bar{I} = 0^\circ \Rightarrow \begin{cases} X_{Lr} = X_{Cr} \\ \bar{Z}_r = R \end{cases}$



- Pulsación y frecuencia de resonancia ( $\omega_r$ ):

$$X_{Lr} = X_{Cr} \Rightarrow \omega_r L = \frac{1}{\omega_r C} \Rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

- Corriente en resonancia ( $\omega_r$ ):  $\bar{I}_r = \frac{E}{R}$

- Factor de calidad en resonancia ( $\omega_r$ ):

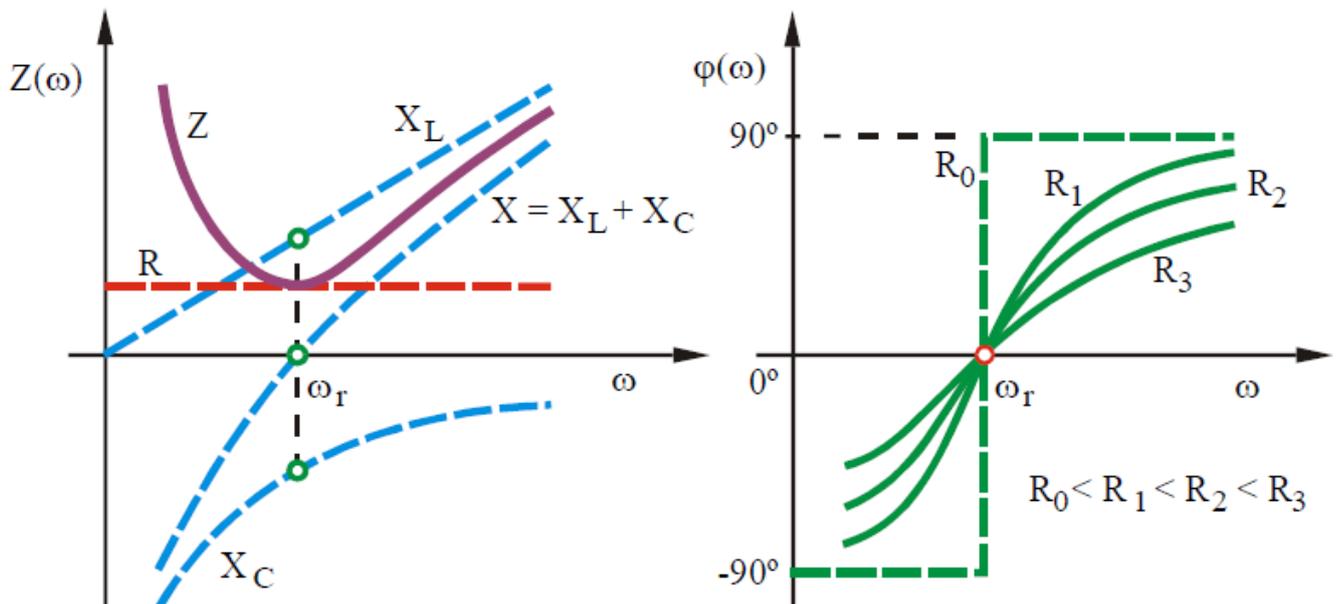
$$Q_r = \frac{X_{Lr}}{R} = \frac{X_{Cr}}{R} = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

## ✓ Lugares geométricos de immitancias

### ❖ Variación de la impedancia con la frecuencia

- Lugar geométrico de  $\bar{Z}(\omega) = Z(\omega) \angle \varphi(\omega)$ :

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}; \quad \varphi(\omega) = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$





## ✓ Ancho de banda, B

- Definición:  $P[\omega_1, \omega_2] \geq \frac{P_{m\acute{a}x}}{2} = \frac{R I_{m\acute{a}x}^2}{2}$ .

+  $P_{m\acute{a}x} = P_r = R I_r^2$ .

- Corriente en extremos del intervalo  $[\omega_1, \omega_2]$ :

$$P_1 = P_2 = \frac{P_r}{2} = \frac{R I_r^2}{2} = R \left( \frac{I_r}{\sqrt{2}} \right)^2 \Rightarrow I_1 = I_2 = \frac{I_r}{\sqrt{2}}$$

- Impedancia compleja de los extremos  $\omega_1, \omega_2$ :

- + Módulo de las impedancias:

$$Z_1 = Z_2 = \frac{E}{I_r / \sqrt{2}} = \sqrt{2} R$$

- + Del triangulo de impedancias:

$$Z_1^2 = R^2 + X^2 \Rightarrow 2R^2 = R^2 + X^2 \Rightarrow R^2 = X^2 \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X = R \\ \varphi = \pm 45^\circ \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{Z}_1 = R - jR, \text{ para } \omega_1 < \omega_r \\ \bar{Z}_2 = R + jR, \text{ para } \omega_2 > \omega_r \end{array} \right.$$

- Determinacion de la pulsación de los extremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} X = R \\ \varphi = \pm 45^\circ \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X_{C1} - X_{L1} = R \\ X_{L2} - X_{C2} = R \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\omega_1 C} - \omega_1 L = R \\ \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = R \end{array} \right. \Rightarrow$$

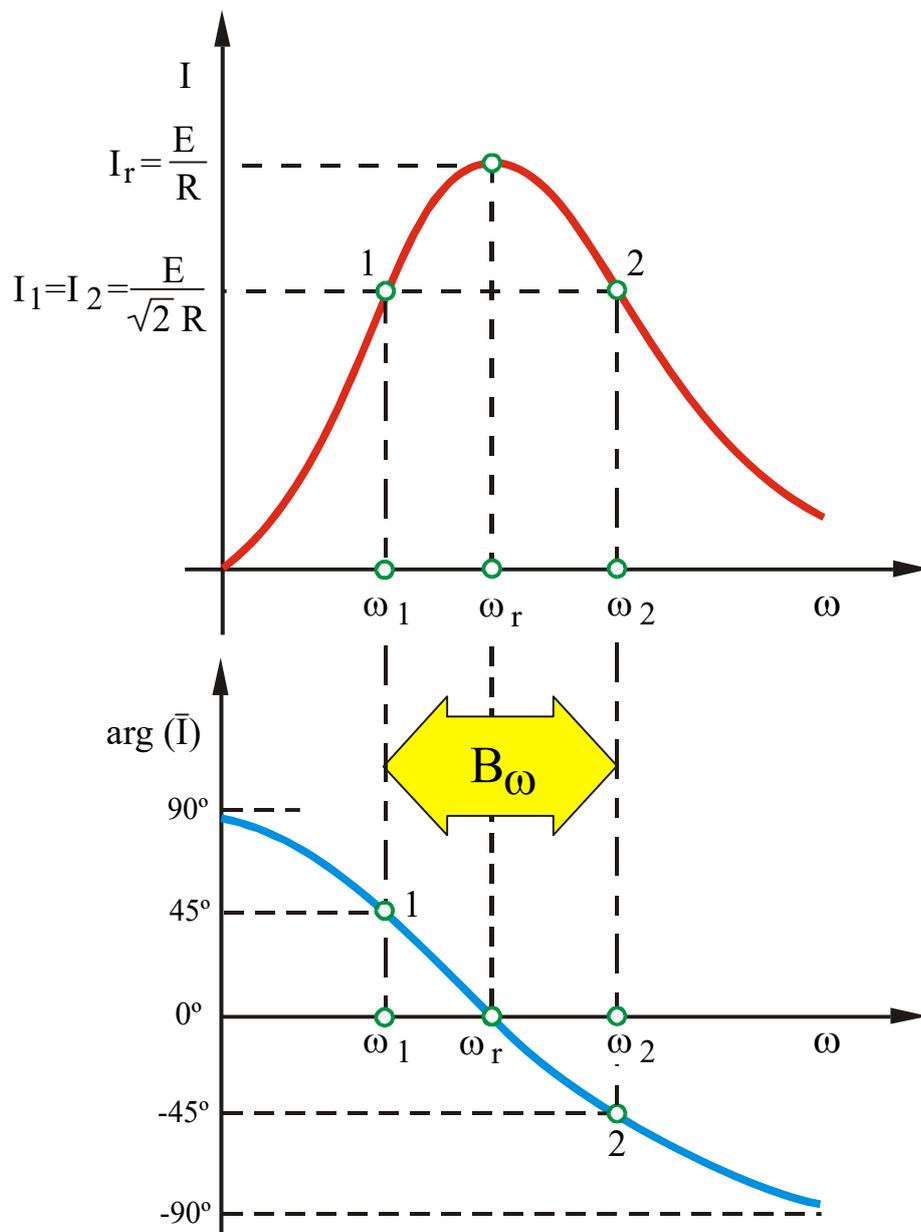


# FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

## Elementos de circuitos lineales

$$\begin{cases} \omega_1^2 + 2\alpha \omega_1 - \omega_r^2 = 0 \\ \omega_2^2 - 2\alpha \omega_2 - \omega_r^2 = 0 \end{cases}, \text{ donde } \alpha = \text{amortiguamiento} = \frac{R}{2L}$$

+ Resolviendo: 
$$\begin{cases} \omega_1 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \omega_r^2} \\ \omega_2 = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \omega_r^2} \end{cases} \quad (\omega_1 < \omega_r < \omega_2).$$





- Magnitud del ancho de banda,  $B$

$$B_{\omega} = \omega_2 - \omega_1 = 2\alpha = \frac{R}{L}$$

## ✓ Estudio de la resonancia serie o de tensión

### ❖ Análisis de tensiones e intensidad

- Impedancia

$$\bar{Z}_r = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \Big|_{\omega=\omega_r} = R + j0 = R \angle 0^\circ.$$

- Corriente

$$\bar{I}_r = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_r} = \frac{E \angle 0^\circ}{R \angle 0^\circ} = \frac{E}{R} \angle 0^\circ = I_r \angle 0^\circ.$$

- Tensiones

$$\bar{U}_{Rr} = R \bar{I}_r = R \angle 0^\circ I_r \angle 0^\circ = \bar{E}.$$

+ El factor de calidad como factor de sobretensión:

$$\bar{U}_{Lr} = jX_{Lr} \bar{I}_r = jX_{Lr} \frac{E}{R} = Q_r E \angle 90^\circ \Rightarrow \boxed{U_{Lr} = Q_r E},$$

$$\bar{U}_{Cr} = -jX_{Cr} \bar{I}_r = -jX_{Cr} \frac{E}{R} = Q_r E \angle -90^\circ \Rightarrow \boxed{U_{Cr} = Q_r E},$$

$$\bar{U}_{Lr} + \bar{U}_{Cr} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{E} = \bar{U}_{Rr} + \bar{U}_{Lr} + \bar{U}_{Cr} = \bar{U}_{Rr}$$



### ❖ Propiedades de la resonancia

- Cuando  $Q_r > 1$ , las tensiones de bobina y condensador son mayores que la de alimentación ( $Q_r =$  factor de sobretensión).
- A la frecuencia de resonancia, bobina y condensador en serie, equivalen a un cortocircuito.
- En resonancia, las energías máximas almacenadas por el condensador y la bobina son idénticas:

$$\begin{aligned}\hat{W}_{Cr} &= \frac{1}{2} C \hat{U}_{Cr}^2 = \left| \hat{U}_{Cr} = \hat{U}_{Lr} = \omega_r L \hat{I}_r \right| = \frac{1}{2} C \omega_r^2 L^2 \hat{I}_r^2 = \\ &= \left| \omega_r^2 = \frac{1}{LC} \right| = \frac{1}{2} C \frac{1}{LC} L^2 \hat{I}_r^2 = \frac{1}{2} L \hat{I}_r^2 = \hat{W}_{Lr}\end{aligned}$$

- A lo largo del tiempo, la energía total almacenada por el circuito permanece constante, e igual, a la máxima.
  - + Demostración: sean los valores instantáneos de la corriente en bobina y tensión de condensador:

$$i_r(t) = \hat{I}_r \sin(\omega t)$$

$$u_{Cr}(t) = \hat{U}_{Cr} \sin(\omega t - 90^\circ) = -\hat{U}_{Cr} \cos(\omega t).$$

- + La energía total almacenada, será:

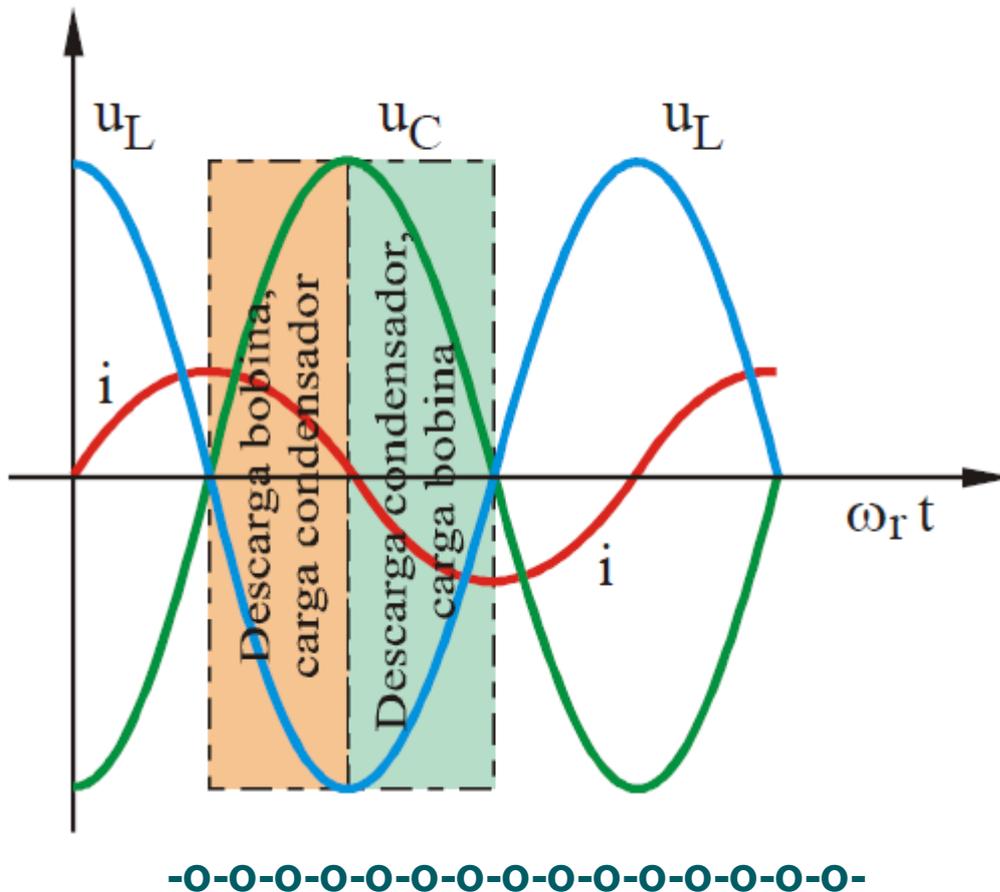
$$\begin{aligned}w_r(t) &= \frac{1}{2} L i_r^2 + \frac{1}{2} C u_{Cr}^2 = \\ &= \frac{1}{2} L \hat{I}_r^2 \sin^2(\omega t) + \frac{1}{2} C \hat{U}_{Cr}^2 \cos^2(\omega t) = \\ &= \left| \hat{W}_{Cr} = \hat{W}_{Lr} \right| = \frac{1}{2} L \hat{I}_r^2 = \frac{1}{2} C \hat{U}_{Cr}^2\end{aligned}$$



## FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

### Elementos de circuitos lineales

- En consecuencia, en resonancia, cada cuarto de periodo se origina la carga y descarga total de cada elemento almacenador, con un transvase constante de energía entre condensador y bobina, de forma que la energía total almacenada por ambos, en cada instante, es la misma.





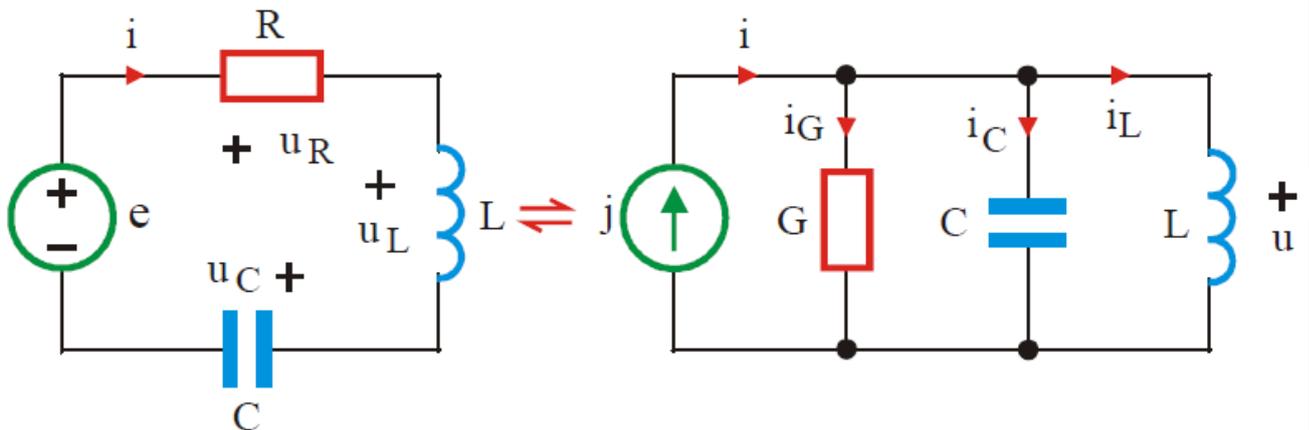
## ESTUDIO DEL DIPOLO GLC DERIVACIÓN POR DUALIDAD

### ✓ Introducción

#### ❖ Dipolo, también llamado

- Red antirresonante. El conjunto  $LC$ , en resonancia, **bloquea el paso de la corriente** a su través.

#### ❖ Circuitos duales



### ✓ Desarrollo de las expresiones duales

#### ❖ Fuentes e immitancias

$$\left\{ \begin{array}{l} e = \sqrt{2} E \sin(\omega t) \\ \bar{E} = E \angle 0^\circ = E = cte. \\ \omega = \text{variable} \\ \bar{Z}(\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} j = \sqrt{2} J \sin(\omega t) \\ \bar{J} = J \angle 0^\circ = J = cte. \\ \omega = \text{variable} \\ \bar{Y}(\omega) = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \end{array} \right.$$

#### ❖ Resonancia

- Formulaciones



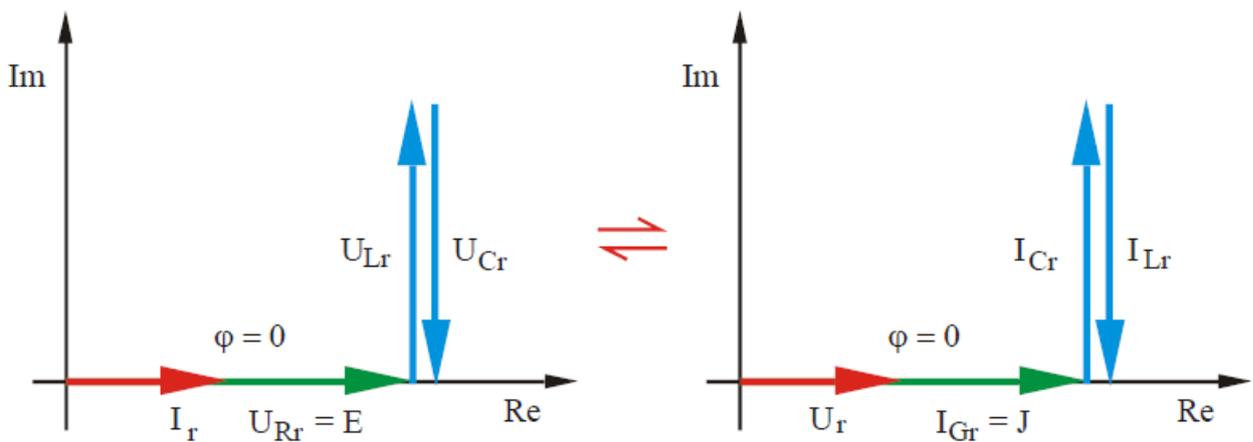
# FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

## Elementos de circuitos lineales

$$\left\{ \begin{array}{l} X_L = X_C \Rightarrow \bar{Z} = R \\ \omega_{rs}^2 = (LC)^{-1} \\ \bar{I}_r = E/R \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} B_C = B_L \Rightarrow \bar{Y} = G \\ \omega_{rd}^2 = (LC)^{-1} \\ \bar{U}_r = J/G \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{U}_{Lr} = jQ_{rs}E \\ \bar{U}_{Cr} = -jQ_{rs}E \\ Q_{rs} = \frac{U_{Lr}}{E} = \frac{U_{Cr}}{E} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{I}_{Cr} = jQ_{rd}J \\ \bar{I}_{Lr} = -jQ_{rd}J \\ Q_{rd} = \frac{I_{Cr}}{J} = \frac{I_{Lr}}{J} = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}} \end{array} \right.$$

- Diagramas fasoriales





## 📁 ATENUACIÓN EN UN CIRCUITO

✓ La atenuación, A:

- Es el valor de una determinada magnitud -tensión, corriente, potencia- respecto de una referencia.

✓ Unidades de la atenuación

❖ En unidades porcentuales:

$$A(\%) = 100 \frac{I}{I_r} \quad , \quad A(\%) = 100 \frac{P}{P_r}$$

❖ En unidad Neper (Np):

$$A(Np) = \ln \left( \frac{I}{I_r} \right) \quad , \quad A(Np) = \ln \sqrt{\frac{P}{P_r}} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{P}{P_r} \right)$$

❖ En unidad decibelios (dB):

$$A(dB) = 20 \lg \left( \frac{I}{I_r} \right) \quad , \quad A(dB) = 10 \lg \left( \frac{P}{P_r} \right)$$

### Ejemplo 3.1.

Determinar la atenuación, en decibelios, en los extremos del ancho de banda, para los dipolos RLC o GCL:

Tomando como referencia  $I_r$ ,  $I_1 = I_2 = \frac{I_r}{\sqrt{2}}$ , luego:

$$A_1(dB) = A_2(dB) = 20 \lg \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -3 \text{ dB}$$

El ancho de banda definido es de 3 dB.



## **REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- ❖ **Chua, L.O. et al.** LINEAR AND NONLINEAR CIRCUITS. McGraw-Hill Book Company. New York. 1987.
- ❖ **Eguíluz, L. I. et al.** PRUEBAS OBJETIVAS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS. Eunsa. Pamplona. 2001.
- ❖ **Fallot, M.** THÉORIE GÉNÉRALE DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES. Dunod. París. 1960.
- ❖ **Madrigal, R.I.** Teoría moderna de CIRCUITOS ELÉCTRICOS. Ed. Pirámide, S.A. Madrid. 1977.
- ❖ **Nilsson, J. W.** CIRCUITOS ELÉCTRICOS. Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. U.S.A.. 1995.
- ❖ **Nilsson, J. W. - Riedel, S. A.** CIRCUITOS ELÉCTRICOS. Prentice Hall. México. 2001.
- ❖ **Parra, V. M. y Otros.** TEORÍA DE CIRCUITOS I y II. U.N.E.D. Madrid. 1991.
- ❖ **Ras, E.** TEORÍA DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS. FUNDAMENTOS. Marcombo Boixareu Editores. Barcelona. 1988.
- ❖ **Sánchez, P. et al.** TEORÍA DE CIRCUITOS. Problemas y pruebas objetivas orientadas al aprendizaje. PEARSON, Prentice Hall. Madrid, 2007.
- ❖ **Thompson, H.A.** ALTERNATING-CURRENT AND TRANSIENT CIRCUIT ANALYSIS. McGraw-Hill Book Company. New York. 1955.