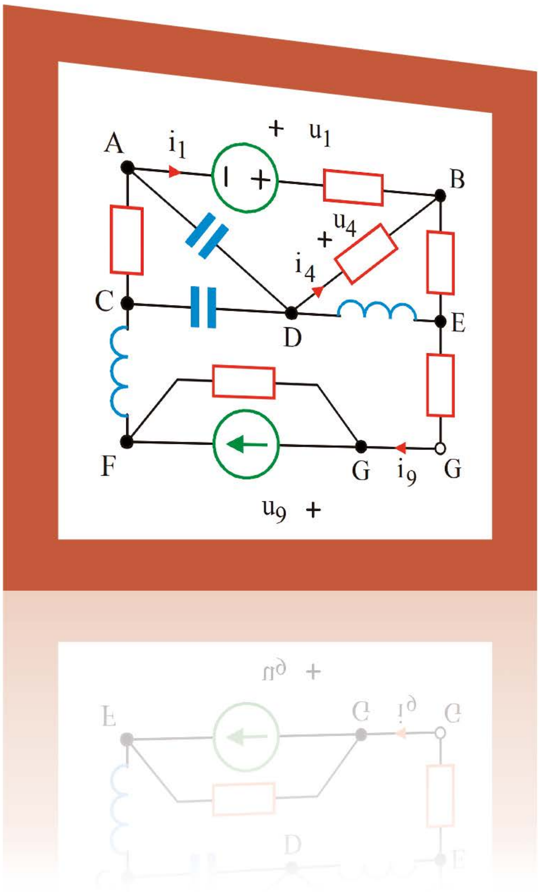
Fundamentos de Ingeniería Eléctrica

UD 4. Métodos de análisis



Alberto Arroyo Gutiérrez
José Carlos Lavandero González
Sergio Bustamante Sánchez
Eugenio Sainz Ortiz
Alberto Laso Pérez
Raquel Martínez Torre
Mario Mañana Canteli

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

BT4.1: MÉTODOS DE ANÁLISIS

CONTENIDOS

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

INTRODUCCIÓN

✓ *Generalidades*

❖ Problema y solución

- Las redes reales pueden ser complejas y muy extensas en comparación con los circuitos de la asignatura.
- Los Métodos de Análisis (MA) resuelven tal complejidad.

❖ Campo de aplicación

- Redes de elementos *parámetros concentrados*. No, en redes con elementos de parámetros distribuidos, p.e. líneas de transporte.
- Elementos pasivos lineales e invariables con el tiempo.

❖ Clasificación general de los MA

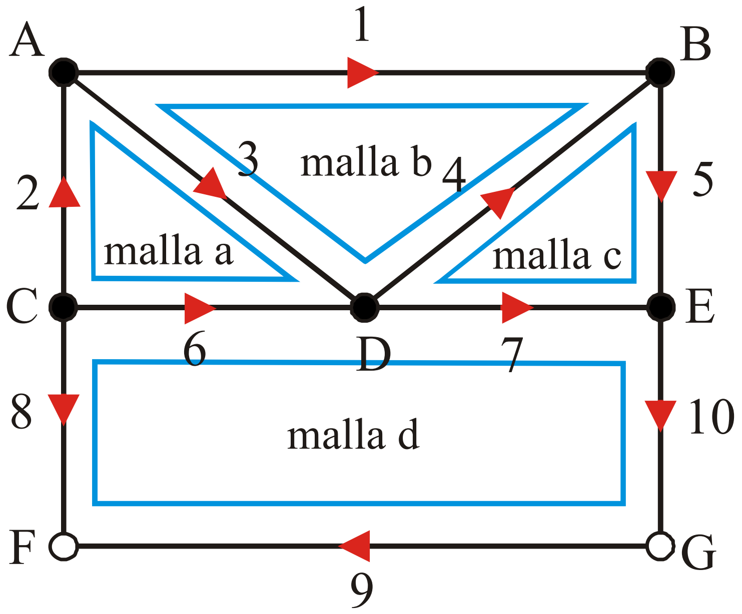
- Método de Kirchhoff: basado en la escritura de las ecuaciones de Kirchhoff (método inicial o primitivo)
- Métodos circulares: basados en la escritura, únicamente, de las ecuaciones de la SLK:
  - M.A. por lazos.
  - M.A. por lazos básicos.
  - M.A. por mallas (MIM).
- Métodos nodales: basados en la escritura, únicamente, de las ecuaciones de la PLK:
  - M.A. por cortes -grupos de corte-.

+ M.A. por cortes -grupos de corte- básicos.
+ M.A. por nudos (MTN).

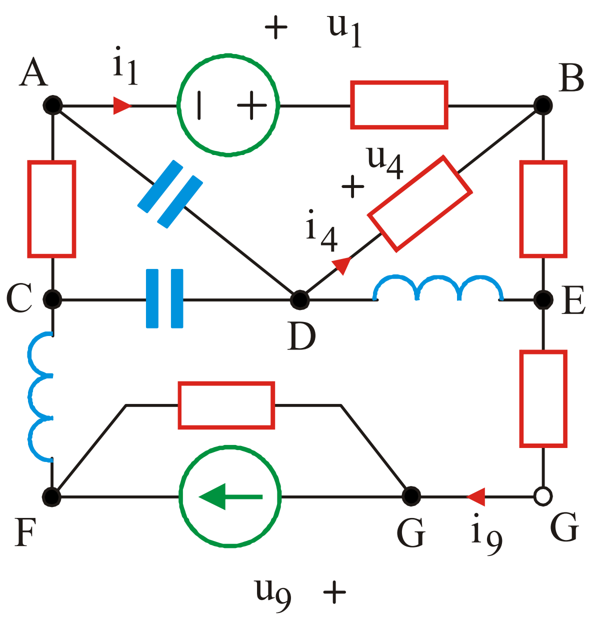
✓ *Introducción a la topología de redes*

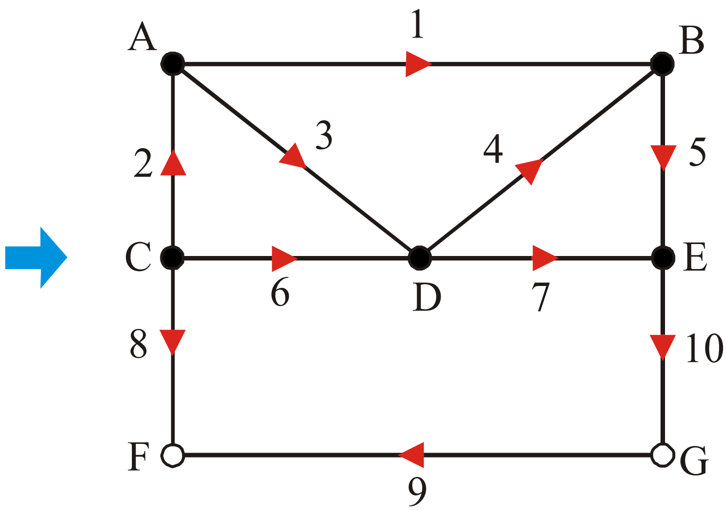
❖ Introducción

- Rama: subconjunto de una red representado por un arco o segmento de recta.
- Nudo: extremos de las ramas; también, punto de conexión de dos o más ramas. Se representa mediante un círculo visible.
  + Nudo principal: punto de conexión de tres o más ramas (relleno de negro).
  + Nudo secundario: punto de conexión de dos ramas (relleno de blanco).
- Grafo: estructura gráfica de una red, donde las ramas se representan por segmentos y los nudos por puntos.
  + Grafo plano: aquél, que representado en el plano, sus ramas no se cruzan.
  + Grafo espacial: todo grafo que no es plano.
- Camino: subconjunto ordenado de ramas. En cada nudo del camino inciden dos ramas, salvo en los extremos.
  + Lazo: camino cerrado.
  + Malla: camino cerrado que no encierra rama alguna en su interior.
- Ejemplo de red con mallas:



- Ejemplo de red y su grafo equivalente:





-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

MÉTODO DE KIRCHHOFF

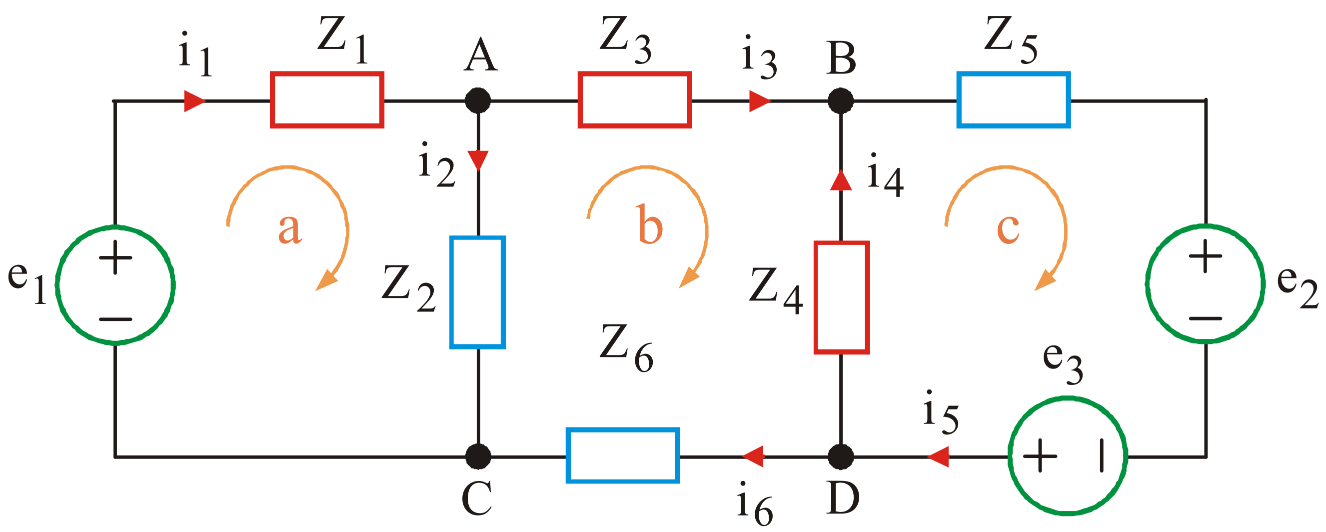
✓Introducción

- Consiste en el planteamiento de las ecuaciones de Kirchhoff de una red (únicamente las linealmente independientes):
  - PLK: *n* (n = número de nudos sin contar el de tierra).
  - SLK: *r-n* (r = número de ramas).
- Válido, únicamente, para redes planas.
- Las incógnitas del método son las corrientes de rama.

✓Deducción del método

❖ Preliminares

- Sobre la red dada, representar las incógnitas, corrientes de rama, $i_1, \cdots, i_6$ (nombre y sentido).



- Tomamos como tierra el nudo C.

❖ Escritura ecuaciones PLK

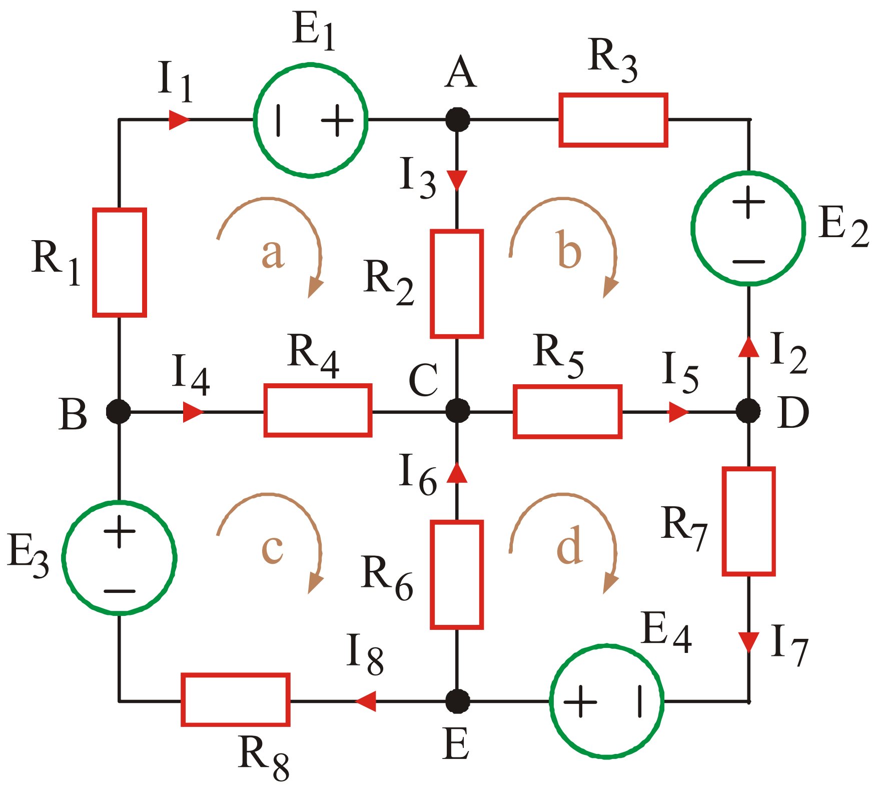
- Total nudos *(n+1 = 4)*.
- Ecuaciones linealmente independientes: *n (n = 3)*.
  - Nudo A: $i_1 - i_2 - i_3 = 0$
  - Nudo B: $i_3 + i_4 - i_5 = 0$ (1)
  - Nudo D: $i_5 - i_4 - i_6 = 0$

❖ Escritura ecuaciones SLK

- Total de ramas (*r* = *6*).
- Ecuaciones linealmente independientes: *r-n* (*r–n=3)* ⇒ 3 mallas.
- Nombrar y elegir un sentido de recorrido de las mallas (a, b y c, horario)
  - Malla a: $e_1 - Z_1 i_1 - Z_2 i_2 = 0$
  - Malla b: $-Z_3 i_3 + Z_4 i_4 - Z_6 i_6 + Z_2 i_2 = 0$ (2)
  - Malla c: $-Z_5 i_5 - e_2 + e_3 - Z_4 i_4 = 0$

Ejemplo 4.1.

Plantear las ecuaciones de análisis de la red de corriente continua de la figura, mediante las leyes de Kirchhoff.



❖ Solución

- Ecuaciones de la PLK *(n = 4):*
  - Nudo A: $I_1 + I_2 - I_3 = 0$
  - Nudo B: $I_8 - I_1 - I_4 = 0$
  - Nudo C: $I_3 + I_4 + I_6 - I_5 = 0$
  - Nudo D: $I_5 - I_2 - I_7 = 0$
- Ecuaciones de la SLK *(r – n = 8 - 4 = 4)*:
  - Malla a: $-R_1 I_1 + E_1 - R_2 I_3 + R_4 I_4 = 0$
  - Malla b: $R_3 I_2 - E_2 + R_5 I_5 + R_2 I_3 = 0$
  - Malla c: $-R_4 I_4 + R_6 I_6 - R_8 I_8 + E_3 = 0$
  - Malla d: $-R_5 I_5 - R_7 I_7 + E_4 - R_6 I_6 = 0.$

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

MÉTODOS DE MAXWELL

✓ *Introducción*

❖ Tipos de métodos

- Método de intensidades de malla (MIM).
  - Las incógnitas son las corrientes ficticias que recorren las mallas (***r-n***).
- Método de tensión de nudos (MTN).
  - Las incógnitas son las tensiones de los nudos respecto del nudo de referencia (***n***).

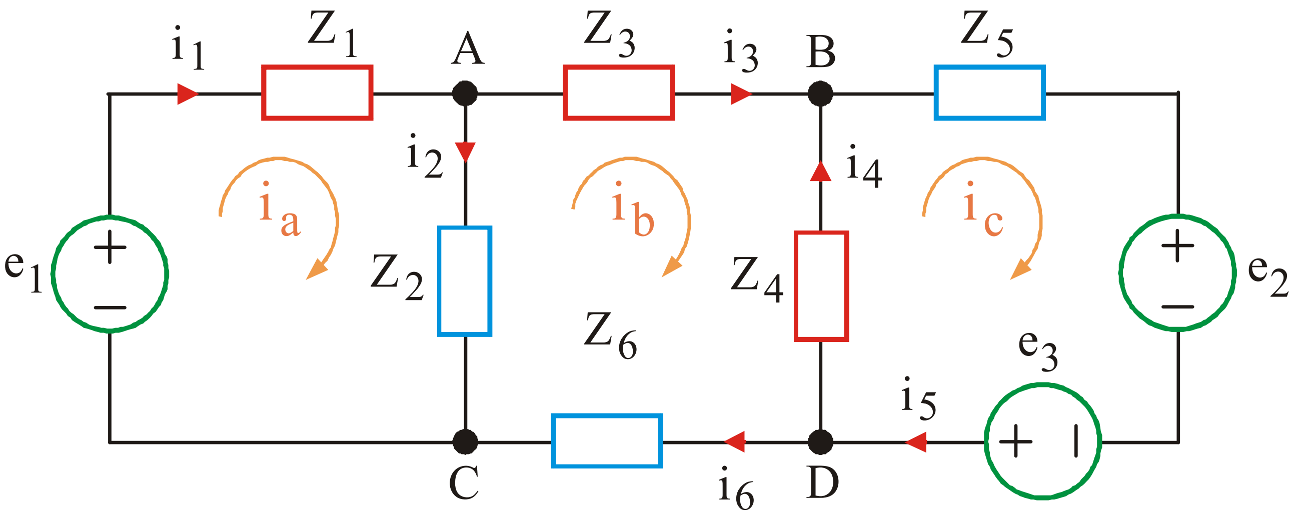
✓ *Método de intensidades de malla (MIM)*

❖ Características

- Únicamente se plantean ***r-n*** ecuaciones de la SLK en las mallas.
- Método válido, únicamente, para redes planas.
- Adecuado cuando las fuentes de la red son de tensión.

❖ Deducción del método

- Preliminares: sobre la red dada, de 4 nudos y 6 ramas, representar las incógnitas que son las corrientes de malla i_a, i_b e i_c (nombre y sentido). Son corrientes ficticias.



- Escritura de las ecuaciones de la SLK
  - Malla a: $e_1 - Z_1 i_1 - Z_2 i_2 = 0$
  - Malla b: $-Z_3 i_3 + Z_4 i_4 - Z_6 i_6 + Z_2 i_2 = 0$ (3)
  - Malla c: $-Z_5 i_5 - e_2 + e_3 - Z_4 i_4 = 0$
- Intensidades de rama (i_1, …, i_6) en función de las de malla (i_a, …, i_c)
  - Ramas por las que sólo circula una corriente de rama: idéntico valor absoluto de la corriente de malla. Si coinciden en sentido, mismo signo.

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 = i_a \\ i_3 = i_6 = i_b \\ i_5 = i_c \end{array} \right. \qquad (4)$$

  - Ramas por las que circulan dos, o más, corrientes de malla: corriente de rama suma algebraica de corrientes de malla.

$$\left\{ \begin{array}{l} i_2 = i_a - i_b \\ i_4 = i_c - i_b \end{array} \right. \qquad (5)$$

- Sustituyendo (4) y (5) en (3):

$$\left\{\begin{array}{c} e_1 - Z_1 i_a - Z_2(i_a - i_b) = 0 \\ -Z_3 i_b - Z_4(i_b - i_c) - Z_6 i_b - 2(i_b - i_a) = 0 \\ -Z_5 i_c - e_2 + e_3 - Z_4(i_c - i_b) = 0 \end{array}\right. \qquad (6)$$

- Ordenando las ecuaciones (6):

$$\left\{\begin{array}{lllllll} (Z_1+Z_2) i_a & - & Z_2 \; i_b & - & 0 \; i_c & = & e_1 \\ -Z_2 \; i_a & + & (Z_2+Z_3+Z_4+Z_6) \; i_b & - & Z_4 \; i_c & = & 0 \\ 0 \; i_a & - & Z_4 \; i_b & + & (Z_4+Z_5) \; i_c & = & e_3 - e_2 \end{array}\right.$$

- Forma matricial:

$$\boxed{\begin{pmatrix} (Z_1+Z_2) & -Z_2 & 0 \\ -Z_2 & (Z_2+Z_3+Z_4+Z_6) & -Z_4 \\ 0 & -Z_4 & (Z_4+Z_5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \\ e_3 - e_2 \end{pmatrix}}$$

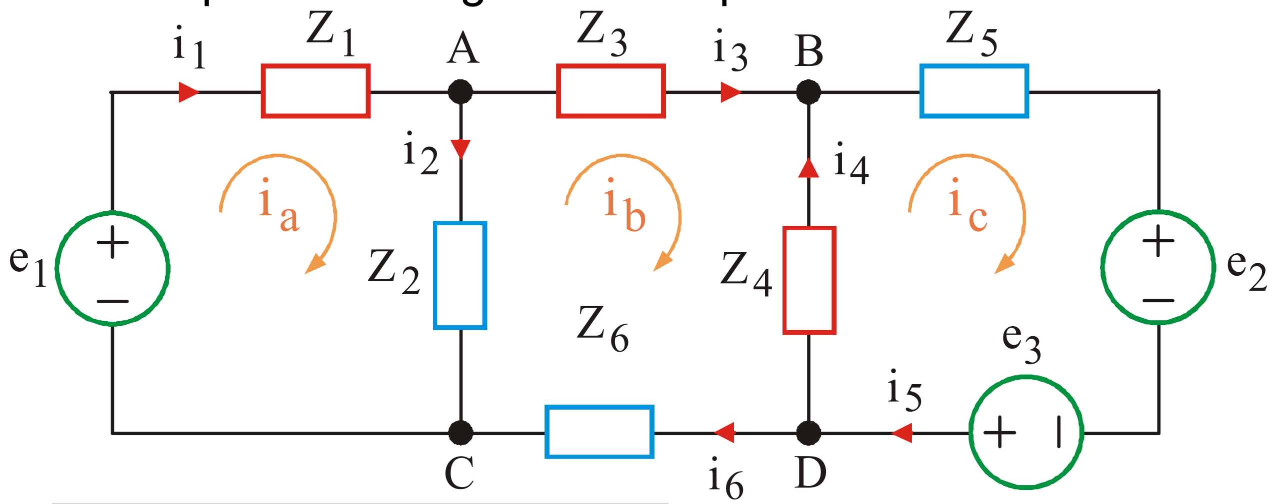
  - Expresa la ley de Ohm en forma compacta:

$$\boxed{(Z^m)(i^m) = (e^m)}$$

- Significado de las matrices:
  - Vector (e^m) = vector columna, suma algebraica de las fuentes de tensión de las mallas. Generador positivo (+) y motor negativo (-).
  - Vector (i^m) = vector columna, intensidades de malla incógnita.
  - Matriz (Z^m) = cuadrada y simétrica, matriz de impedancias de malla.
    - Z_{kk} = impedancias propias de la malla; siempre son positivas (+).

- $Z_{kq} = Z_{qk}$, impedancias compartidas entre dos mallas. Signo (+), si coinciden intensidades de malla; signo (-), cuando son de sentido contrario.

- Comprobación siguiendo los pasos del **MIM**:



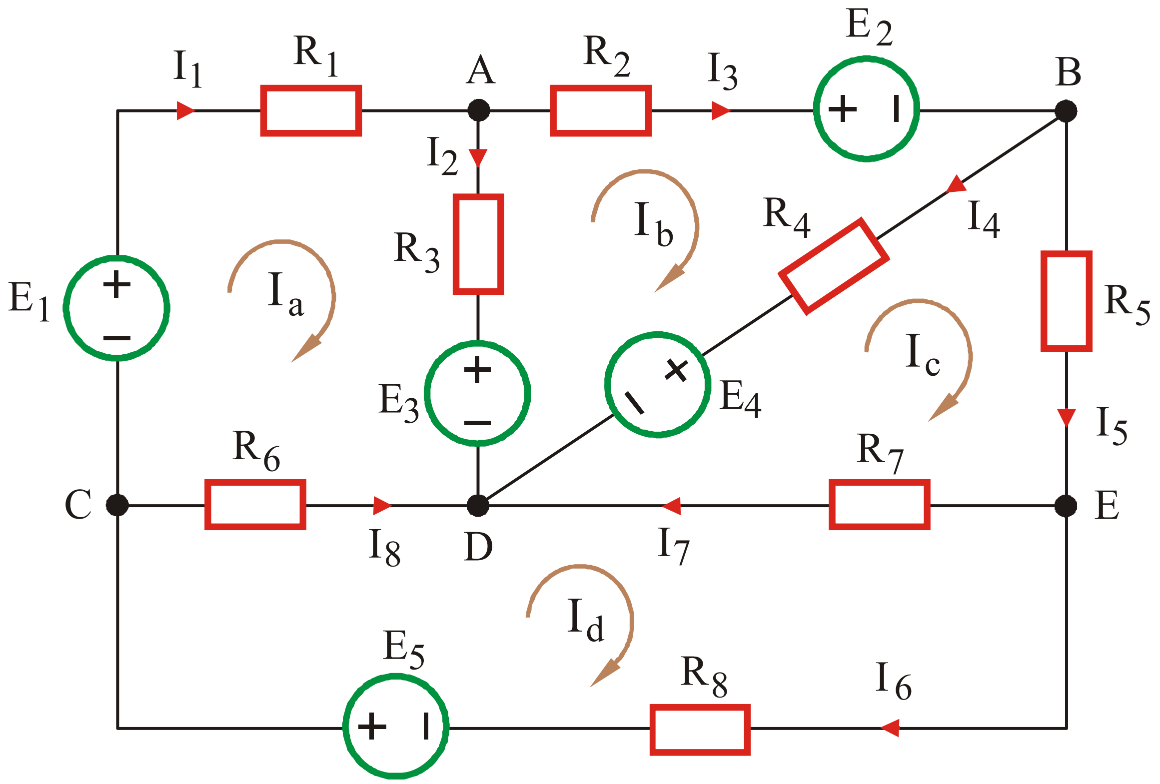
- Pasos para aplicar el MIM:

1. Calcular el número de incógnitas (r-n), que son las corrientes de las mallas.
2. Ver si son todas incógnitas. ¿Existen fuentes ideales de corriente?
   - Externas: quitan incógnitas ✓.
   - Internas: introducen incógnitas ✗.
3. Plantear las ecuaciones sólo de las mallas que son incógnitas.
   - Izquierda de la igualdad: impedancias.
   - Derecha de la igualdad: 1) fuentes de tensión y 2) la tensión de las fuentes de corriente internas.

$$\begin{cases} (Z_1+Z_2)\,i_a - Z_2\,i_b - 0\,i_c = e_1 \\ -Z_2\,i_a + (Z_2+Z_3+Z_4+Z_6)\,i_b - Z_4\,i_c = 0 \\ 0\,i_a - Z_4\,i_b + (Z_4+Z_5)\,i_c = e_3 - e_2 \end{cases}$$

Ejemplo 4.2.

Escribir, directamente, la forma matricial del método de intensidades de malla de la red de corriente continua de la figura.



❖ Solución

- Forma matricial directa:

$$\begin{pmatrix} R_1+R_3+R_6 & -R_3 & 0 & -R_6 \\ -R_3 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ 0 & -R_4 & R_4+R_5+R_7 & -R_7 \\ -R_6 & 0 & -R_7 & R_6+R_7+R_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1-E_3 \\ E_3-E_4-E_2 \\ E_4 \\ E_5 \end{pmatrix}$$

- Las intensidades de rama, resultan:

$$I_1 = I_a, \quad I_2 = I_a - I_b, \quad I_3 = I_b, \quad I_4 = I_b - I_c$$

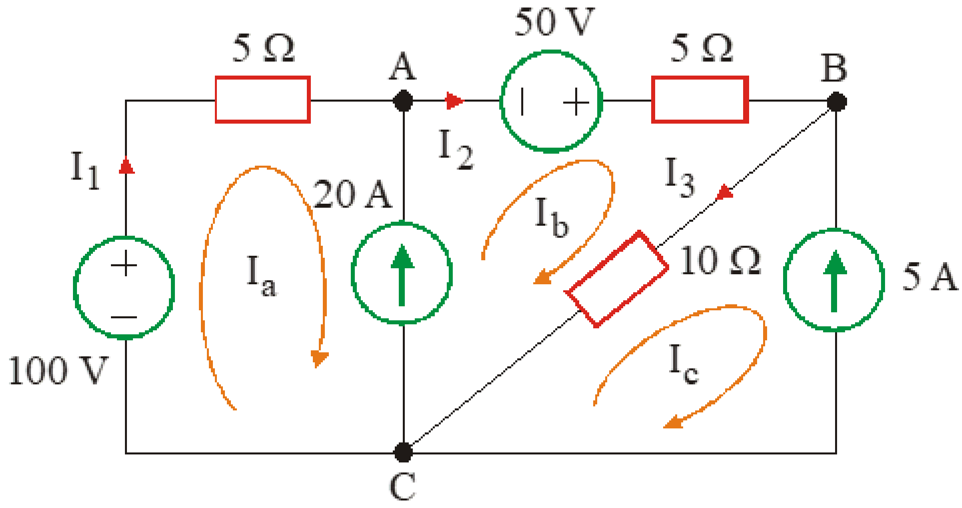
$$I_5 = I_c, \quad I_6 = I_d, \quad I_7 = I_c - I_d, \quad I_8 = I_d - I_a$$

❖ Casos particulares y extensión del MIM

- Redes con fuentes reales de corriente:
  - La transformación previa de las fuentes reales de corriente es adecuada puesto que eliminas una malla, aunque no necesaria.
- Redes con fuentes ideales de corriente:
  - Fuente ideal de corriente dispuesta en rama externa $\Rightarrow$ la corriente de la malla, que incluye la fuente, queda determinada por el valor de la propia fuente.
  - Fuente ideal de corriente en rama interna, es decir, compartida por dos mallas $\Rightarrow$ plantear las ecuaciones de mallas tomando como variable la tensión de la fuente de corriente $\Rightarrow$ Véase Ejemplo 4.3.

Ejemplo 4.3.

Calcular las corrientes de rama i_1 , i_2 e i_3, del circuito de D.C. representado en la figura, aplicando el MIM.



❖ Solución

- Pasos del MIM:

1. Calcular el número de incógnitas (r-n), que son las corrientes de las mallas: (5 – 2 = 3) I_a, I_b e I_c.

2. Ver si son todas incógnitas. ¿Hay fuentes de corriente?
   - Externas (5 A): quita la incógnita $I_c = -5$ A ✓
   - Internas (20 A): introduce la incógnita U_{AC} ✗

3. Plantear las ecuaciones sólo de las mallas que son incógnitas.
   - malla a: $5\,I_a = 100 - U_{ac}$
   - malla b: $15\,I_b - 10\,I_c = 50 + U_{ac}$
   - Ecuación de apoyo: $I_b - I_a = 20$

- Resolviendo, resulta:

$$I_a = -10\ A\ ,\qquad I_b = 10\ A\ ,\quad U_{ac} = 150\ V$$

- Corrientes de rama:

$$I_1 = I_a = -10\ A\,,\ I_2 = I_b = 10\ A\,,\ I_3 = I_b - I_c = 15\ A$$

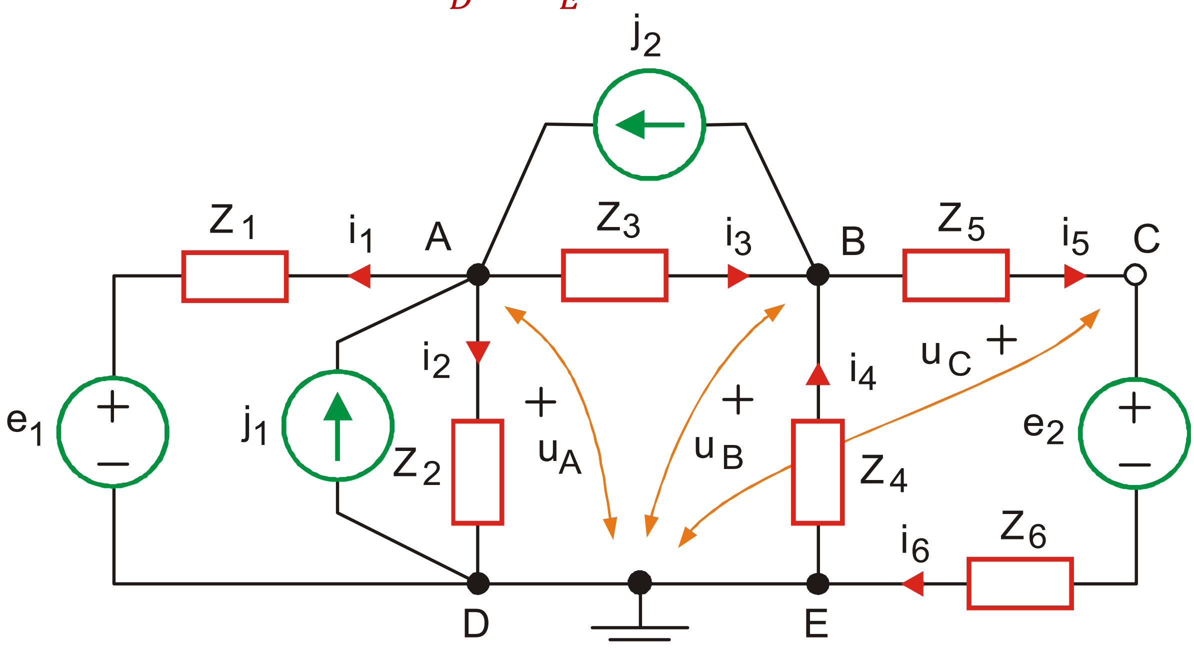
✓Método de tensión de nudos (MTN)

❖ Características

- Únicamente se plantean ***n*** ecuaciones de la PLK en los nudos.
- Método válido para redes planas y espaciales.
- Adecuado cuando las fuentes de la red son de corriente.

❖ Deducción del método

- Preliminares: sobre la red dada, con 4 nudos y 8 ramas, representar: a) los nudos principales cuyas tensiones son las incógnitas (principales u_A y u_B aunque si se desea se pueden usar también los secundarios u_C) y b) el nudo de tierra u_D = u_E = 0 V.



- Escritura de las ecuaciones de la PLK: en todos los nudos menos en el de tierra.
  - Nudo A: $i_1 + i_2 + i_3 = j_1 + j_2$
  - Nudo B: $-i_3 - i_4 + i_5 = -j_2$ (7)
  - Nudo C: $-i_5 + i_6 = 0$

- Intensidades de rama (i_1, …, i_6) en función de las tensiones de nudo (u_A, …, u_C)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{u_A-e_1}{Z_1}+\frac{u_A}{Z_2}+\frac{u_A-u_B}{Z_3} &= j_1+j_2 \\ -\frac{u_A-u_B}{Z_3}+\frac{u_B}{Z_4}+\frac{u_B-u_C}{Z_5} &= -j_2 \\ -\frac{u_B-u_C}{Z_5}+\frac{u_C-e_2}{Z_6} &= 0 \end{aligned}\right. \tag{8}$$

- Ordenando las ecuaciones (8):

$$\left\{\begin{array}{llll} u_A\left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}\right) & -u_B\left(\frac{1}{Z_3}\right) & 0 & = j_1+j_2+\frac{e_1}{Z_1} \\ -u_A\left(\frac{1}{Z_3}\right) & +u_B\left(\frac{1}{Z_3}+\frac{1}{Z_4}+\frac{1}{Z_5}\right) & -u_C\left(\frac{1}{Z_5}\right) & = -j_2 \\ 0 & -u_B\left(\frac{1}{Z_5}\right) & +u_C\left(\frac{1}{Z5}+\frac{1}{Z_6}\right) & = \frac{e_2}{Z_6} \end{array}\right.$$

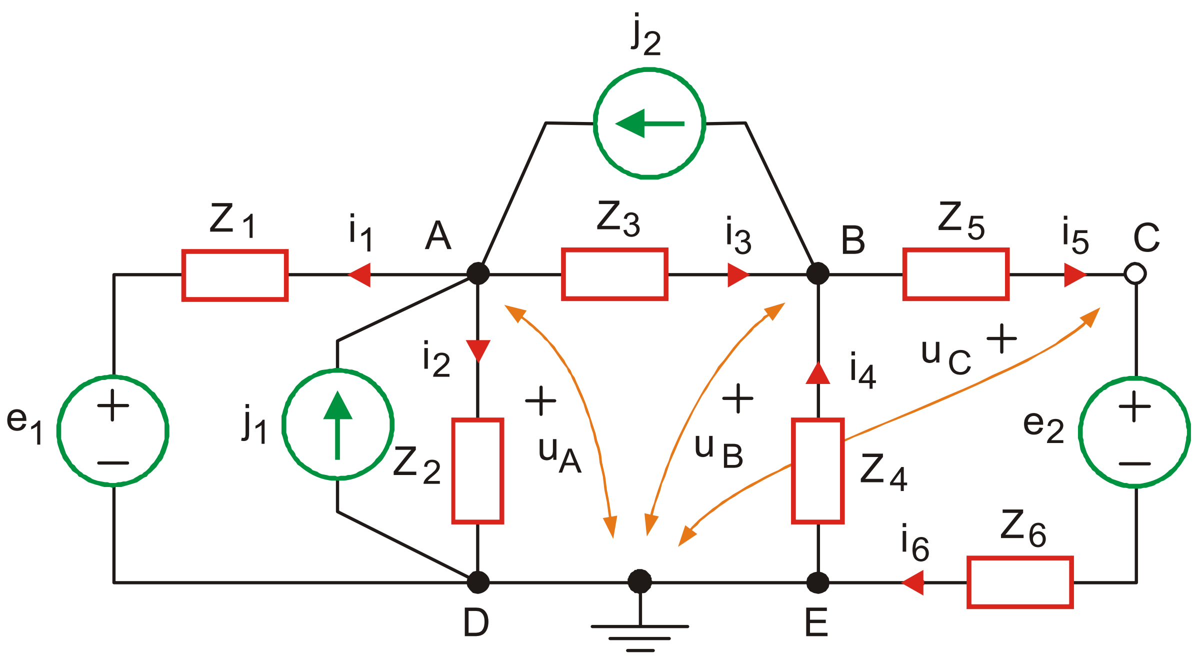
- Ecuación matricial del MTN:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3} & -\frac{1}{Z_3} & 0 \\ -\frac{1}{Z_3} & \frac{1}{Z_3}+\frac{1}{Z_4}+\frac{1}{Z_5} & -\frac{1}{Z_5} \\ 0 & -\frac{1}{Z_5} & \frac{1}{Z_5}+\frac{1}{Z_6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1+j_2+\frac{e_1}{Z_1} \\ -j_2 \\ \frac{e_2}{Z_6} \end{pmatrix}}$$

+ Expresa la ley de Ohm en forma compacta:

$$\boxed{(Y^n)(u^n)=(j^n)}$$

- Significado de las matrices:
  - Vector (j^n) = vector columna, suma algebraica de las fuentes de corriente ideales concurrentes en el nudo. Las entrantes, positivas (+), las salientes, negativas (-). También, las fuentes de corriente procedentes de la transformación de fuentes reales de tensión.
  - Vector (u^n) = vector columna de las tensiones de los nudos incógnita.
  - Matriz (Y^n) = cuadrada y simétrica, matriz de admitancias de nudo de la red.
    - Y_{kk} = admitancia propia del nudo, siempre son positivas (+).
    - $Y_{kq} = Y_{qk}$ = admitancias compartidas entre dos nudos. Siempre son negativas (-).
- Comprobación siguiendo los pasos del **MTN**:



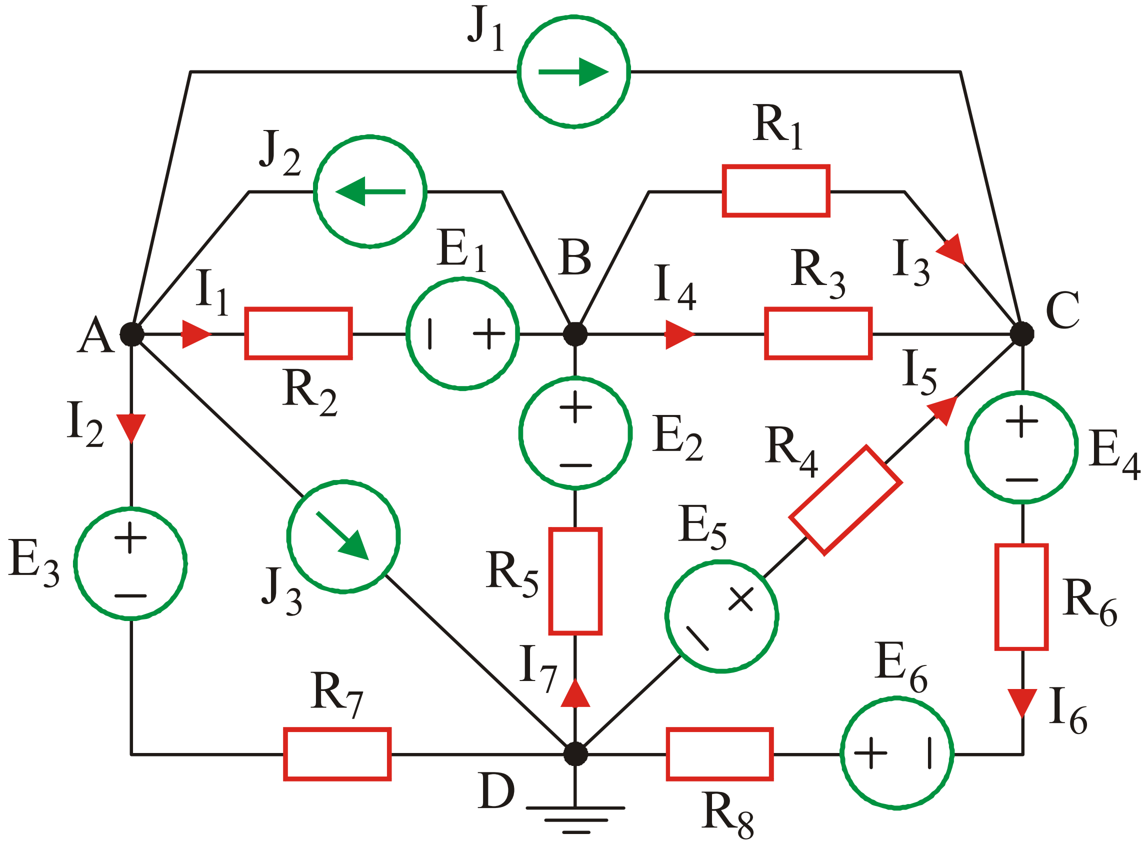
- Pasos para aplicar el MTN:

1. Calcular el número de incógnitas (n), que son las tensiones de los nudos principales exceptuando la tierra (si se desea también secundarios).
2. Ver si son todas incógnitas. ¿Existen fuentes ideales de tensión?
   - Conectan nudos con tierra ✓.
   - No conectan nudos con tierra ✗.
3. Plantear las ecuaciones sólo de los nudos que son incógnitas.
   - Izquierda de la igualdad: admitancias.
   - Derecha de la igualdad: fuentes de corriente, fuentes reales de tensión convertibles en fuentes reales de corriente y la corriente de las fuentes ideales de tensión que no conecten nudos a tierra.

$$\left\{\begin{array}{lllll} u_A\left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}\right) & -u_B\left(\frac{1}{Z_3}\right) & 0 & = & j_1+j_2+\frac{e_1}{Z_1} \\ -u_A\left(\frac{1}{Z_3}\right) & +u_B\left(\frac{1}{Z_3}+\frac{1}{Z_4}+\frac{1}{Z_5}\right) & -u_C\left(\frac{1}{Z_5}\right) & = & -j_2 \\ 0 & -u_B\left(\frac{1}{Z_5}\right) & +u_C\left(\frac{1}{Z5}+\frac{1}{Z_6}\right) & = & \frac{e_2}{Z_6} \end{array}\right.$$

Ejemplo 4.4.

Sobre el circuito de la figura, excitado en continua, calcular las intensidades de rama, aplicando el método de análisis de tensión de nudos.



Solución

- Forma matricial directa:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_7} & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_3} \\ 0 & -\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6+R_8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_2-J_1-J_3+\frac{E_3}{R_7}-\frac{E_1}{R_2} \\ -J_2+\frac{E_2}{R_5}+\frac{E_1}{R_2} \\ J_1+\frac{E_5}{R_4}+\frac{E_4-E_6}{R_6+R_8} \end{pmatrix}$$

- Intensidades de rama:

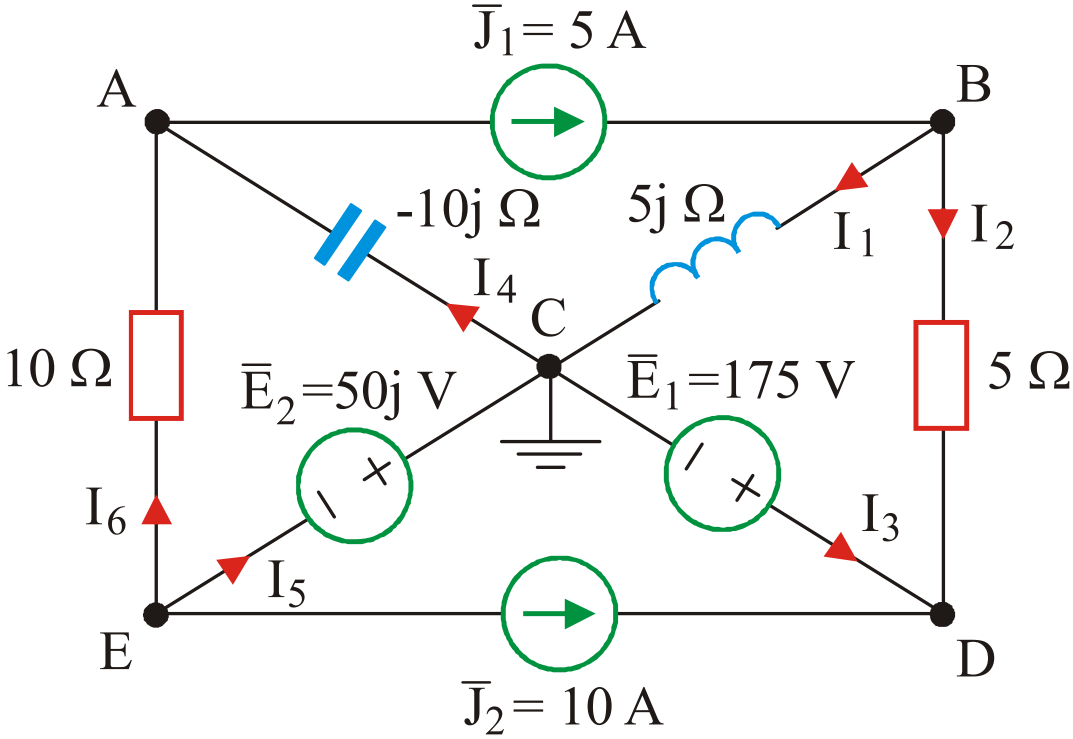
$$I_1 = \frac{U_A - U_B + E_1}{R_2},\ I_2 = \frac{U_A - E_3}{R_7},\ I_3 = \frac{U_B - U_C}{R_1},$$
$$I_4 = \frac{U_B - U_C}{R_3},\ I_5 = \frac{E_5 - U_C}{R_4},\ I_6 = \frac{U_C + E_6 - E_4}{R_6 + R_8},$$
$$I_7 = \frac{E_2 - U_B}{R_5}.$$

❖ Casos particulares y extensión del método

- Admitancias en serie con fuente ideal de corriente: no deben incluirse en ninguno de los términos de la matriz de admitancias de la red.
- Redes con fuentes reales de tensión: la transformación de las fuentes reales de tensión no es necesaria.
- Redes con fuentes ideales de tensión:
  - Existe una sola fuente ideal de tensión conectada entre un nudo y tierra ⇒ la tensión del nudo queda determinada por la fuente (quita incógnita) ✓.
  - Existen varias fuentes ideales de tensión, conectadas entre nudos consecutivos y tierra ⇒ las tensiones de los nudos quedan determinadas por las fuentes (quita incógnitas) ✓.
  - Coexisten en la red una, o varias, fuentes ideales de tensión, no conectadas al nudo de tierra ⇒ plantear las ecuaciones de nudos tomando como nueva incógnita la corriente de la fuente ideal de tensión ✗.

Ejemplo 4.5.

Calcular las intensidades de rama de la red de A.C. de la figura, utilizando el MTN.



❖ Solución

Pasos del MTN:

1. Calcular el número de incógnitas (n), que son las tensiones de los nudos principales: (4) U_A, U_B, U_D y U_E.
2. Ver si son todas incógnitas. ¿Existen fuentes ideales de tensión?
   - Conectadas a tierra (E_1 y E_2): quitan las incógnitas $\overline{U}_E = -\overline{E}_2 = -50j$ V y $\overline{U}_D = +\overline{E}_1 = 175$ V.
   - No conectadas a tierra: ninguna.
3. Plantear las ecuaciones sólo de los nudos que son incógnitas.

- Nudo A : $\overline{U}_A\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{-10j}\right)-\overline{U}_E\left(\frac{1}{10}\right)=-5$
- Nudo B : $\overline{U}_B\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5j}\right)-\overline{U}_D\left(\frac{1}{5}\right)=5$

- Resolviendo:

$$\overline{U}_A = -50 = 50\angle 180^o\ V\ ,$$
$$\overline{U}_B = 100+100j = 100\sqrt{2}\angle 45^o\ V\ .$$

- Intensidades de rama:

$$\bar{I}_1 = \frac{\overline{U}_B}{5j} = \frac{100\sqrt{2}\angle 45^o}{5\angle 90^o} = 20\sqrt{2}\angle -45^o\ A = 20-20j\ A\ ,$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\overline{U}_B-\overline{U}_D}{5} = \frac{100+100j-175}{5} = -15+20j\ A = 25\angle 126{,}87^o A$$

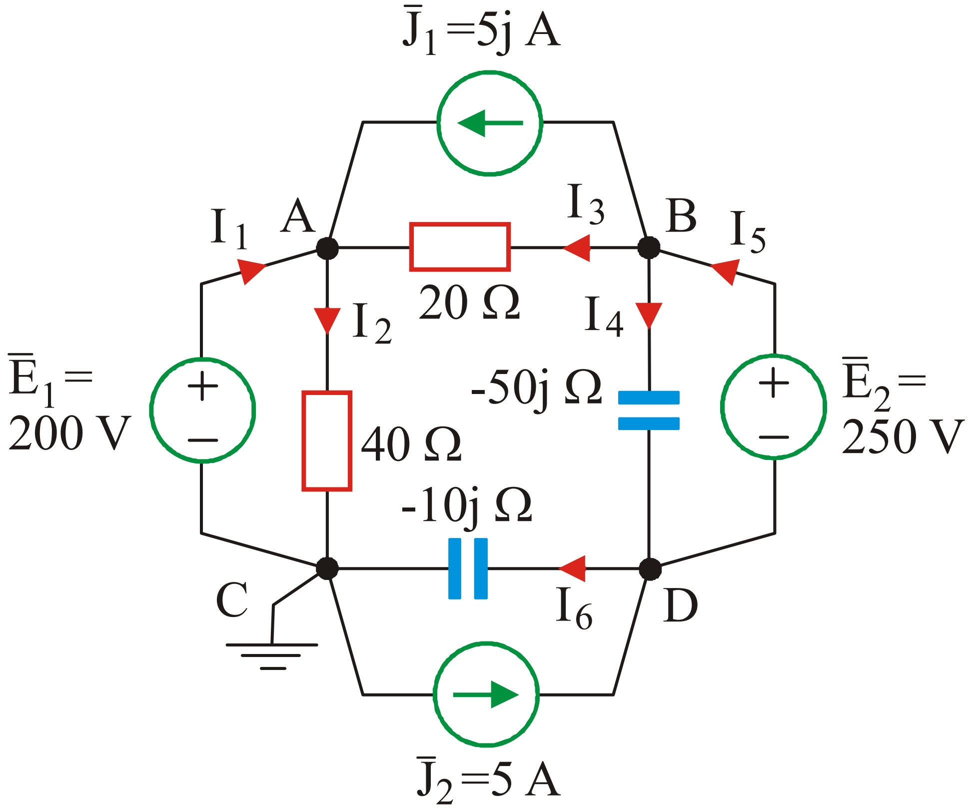
$$\bar{I}_4 = \frac{-\overline{U}_A}{-10j} = \frac{50\angle 0^o}{10\angle -90^o} = 5\angle 90^o = 5j\ A\ ,$$

$$\bar{I}_5 = -10-\bar{I}_6 = -10-5+5j = -15+5j = 5\sqrt{10}\angle 161{,}56^o\ A$$

$$\bar{I}_6 = \frac{\overline{U}_E-\overline{U}_A}{10} = \frac{-50j+50}{10} = 5-5j = 5\sqrt{2}\angle -45^o\ A\ .$$

Ejemplo 4.6.

Sobre la red de corriente alterna de la figura, calcular las intensidades de rama, utilizando el método de tensión de nudos.



❖ Solución

Pasos del MTN:

1. Calcular el número de incógnitas (n), que son las tensiones de los nudos principales: (3) U_A, U_B y U_D.
2. Ver si son todas incógnitas. ¿Existen fuentes ideales de tensión?
   - Conectadas a tierra (E_1): quita la incógnita $\bar{U}_A = +\bar{E}_1 = 200$ V.
   - No conectadas a tierra (E_2): introduce la incógnita $\bar{I}_5$

3. Plantear las ecuaciones sólo de los nudos que son incógnitas.

   - Nudo B:

$$-\overline{U}_A\left(\frac{1}{20}\right)+\overline{U}_B\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{-50j}\right)-\overline{U}_D\left(\frac{1}{-50j}\right)=-5j+\overline{I}_5$$

   - Nudo D:

$$-\overline{U}_A(0)-\overline{U}_B\left(\frac{1}{-50j}\right)+\overline{U}_D\left(\frac{1}{-10j}+\frac{1}{-50j}\right)=5-\overline{I}_5$$

   - Ecuación de apoyo:

$$\overline{U}_B-U_D=\overline{E}_2=250=250\angle 0^o\quad V$$

- Resolviendo el sistema:

$$\overline{U}_B=300\quad V,\ \overline{U}_D=50\quad V,\ \overline{I}_5=5\ A.$$

- Intensidades de rama:

$$\overline{I}_1=\overline{I}_2-\overline{J}_1-\overline{I}_3=5-5j-5=-5j=5\angle-90^o\,A\ ,$$

$$\overline{I}_2=\frac{\overline{U}_A}{40}=\frac{200}{40}=5=5\angle 0^o\quad A,$$

$$\overline{I}_3=\frac{\overline{U}_B-\overline{U}_A}{20}=\frac{300-200}{20}=5=5\angle 0^o\quad A,$$

$$\overline{I}_4=\frac{\overline{E}_2}{-50j}=\frac{250\angle 0^o}{50\angle-90^o}=5\angle 90^o=5j\quad A,$$

$$\overline{I}_6=\frac{\overline{U}_D}{-10j}=\frac{50}{10}=5=5\angle 0^o\quad A.$$

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

ANÁLISIS DE REDES CON FUENTES DEPENDIENTES

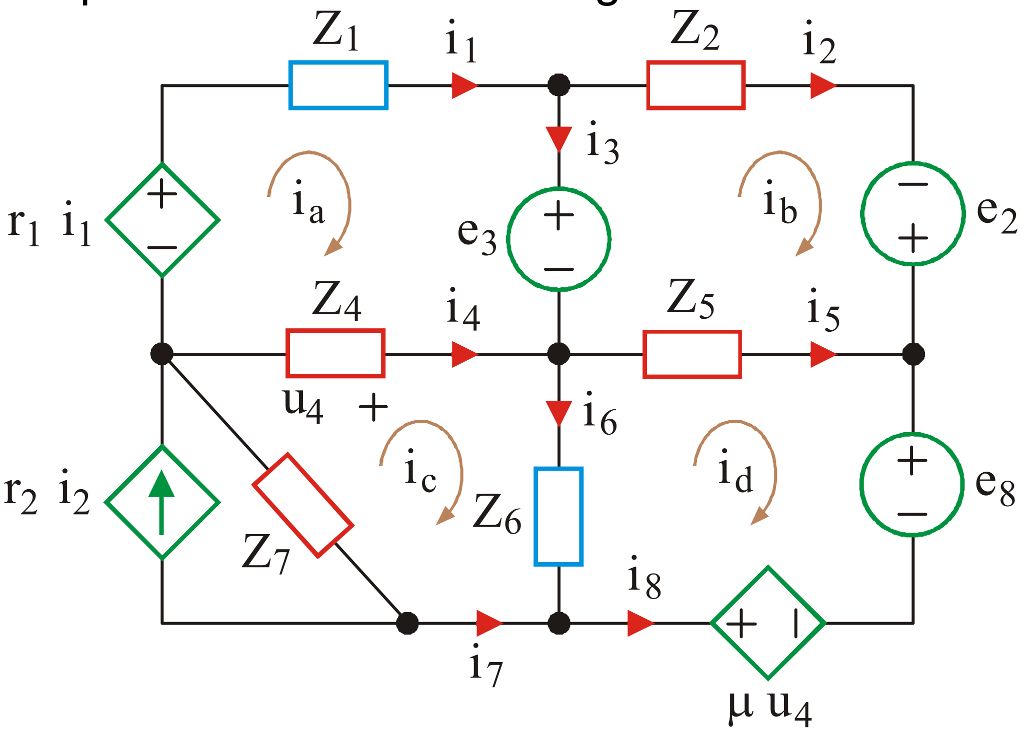
✓ *Problema que se plantea en el análisis de redes que poseen fuentes dependientes*

❖ Características

- Por cada fuente dependiente o controlada, debe formularse una ecuación más. Ello es debido, a que la variable de control, debe ser puesta en función de las variables del método que se esté aplicando.
- Se originan matrices/ecuaciones de immitancias no simétricas, dando lugar a las llamadas redes pasivas no bilaterales.

Ejemplo 4.7.

Resolver por el MIM la red de la figura



❖ Solución

Pasos del MIM:

1. Calcular el número de incógnitas (r-n), que son las corrientes de las mallas: (8 – 4 = 4) I_a, I_b, I_c e I_d.

2. Ver si son todas incógnitas. ¿Existen fuentes ideales de corriente?
   + Externas: ninguna.
   + Internas: ninguna.

3. Plantear las ecuaciones sólo de las mallas que son incógnitas.

$$\begin{pmatrix} Z_1+Z_4 & 0 & -Z_4 & 0 \\ 0 & Z_2+Z_5 & 0 & -Z_5 \\ -Z_4 & 0 & Z_4+Z_6+Z_7 & -Z_6 \\ 0 & -Z_5 & -Z_6 & Z_5+Z_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1\, i_1 - e_3 \\ e_2 + e_3 \\ Z_7\, r_2\, i_2 \\ \mu\, u_4 - e_8 \end{pmatrix}$$

- Relacionando las tensiones y corrientes de rama con las corrientes de malla (incógnitas del método):
  - $i_1 = i_a$, $i_2 = i_b$, $i_4 = i_c - i_a$.
  - $u_4 = Z_4(-i_4) = Z_4(i_a - i_c)$.

- Sustituyendo y pasando al primer miembro resulta la forma matricial:

$$\begin{pmatrix} Z_1 + Z_4 - r_1 & 0 & -Z_4 & 0 \\ 0 & Z_2 + Z_5 & 0 & -Z_5 \\ -Z_4 & -Z_7\, r_2 & Z_4 + Z_6 + Z_7 & -Z_6 \\ -\mu Z_4 & -Z_5 & \mu Z_4 - Z_6 & Z_5 + Z_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_3 \\ e_2 + e_3 \\ 0 \\ -e_8 \end{pmatrix}$$

La matriz de impedancias de malla ha perdido su simetría.

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

INTRODUCCIÓN A TEOREMAS DE CIRCUITOS

✓*Utilidad de los teoremas de circuitos*

- Teoremas: son procedimientos particulares de análisis, diferentes de los métodos generales MIM y MTN que simplifican la resolución de ciertos circuitos.

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

FUNCIONES DE RED

✓Introducción

❖ Funciones de entrada

- Conjunto de impedancias y/o admitancias que caracterizan la excitación/respuesta entre un par de terminales de una red.

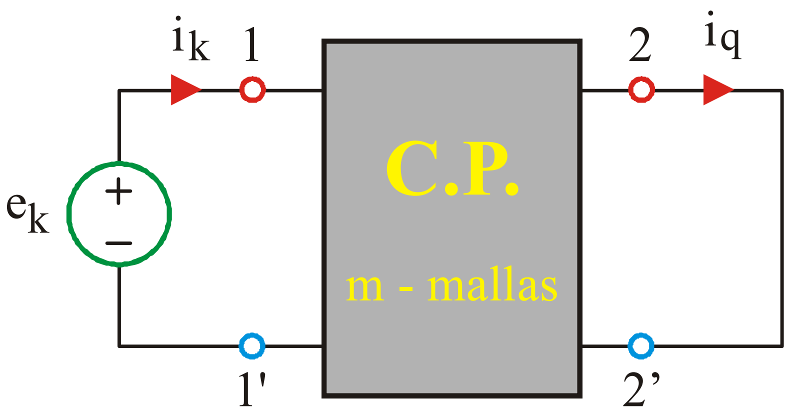
❖ Funciones de transferencia

- Conjunto de impedancias y/o admitancias que caracterizan la excitación/respuesta entre dos pares de terminales de una red.

✓Impedancias de entrada y transferencia

❖ Definiciones

- Considérese el circuito pasivo (C.P.) de la figura, alimentado mediante una fuente ideal de tensión, e_k , conectada en la malla k.



Se definen la:

- Impedancia de entrada de la malla *k* ($Z_{e,k}$) o entre los terminales *1-1'* ($Z_{11'}$):

$$\boxed{Z_{e,k} = \frac{e_k}{i_k}}$$

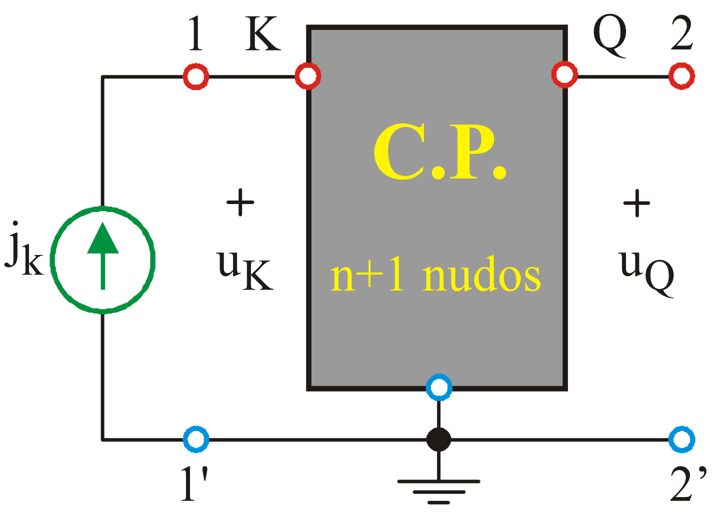
- Impedancia de transferencia de la malla k a la q ($Z_{t,kq}$) o de los terminales 1-1' a los 2-2' ($Z_{11' \to 22'}$):

$$\boxed{Z_{t,kq} = \frac{e_k}{i_q}}$$

✓ *Admitancias de entrada y transferencia*

❖ Definiciones

- Considérese el circuito pasivo (CP) de la figura, alimentado mediante una fuente ideal de corriente, j_k , conectada entre el nudo K y de referencia.



Se definen la:

- Admitancia de entrada del nudo *K*, *($Y_{e,K}$)* o entre los terminales *1-1'* *($Y_{11'}$)*:

$$\boxed{Y_{e,K} = \frac{j_K}{u_K}}$$

- Admitancia de transferencia del nudo K al Q ($Y_{t,KQ}$) o de los terminales 1-1' a los 2-2' ($Z_{11' \to 22'}$):

$$\boxed{Y_{t,KQ} = \frac{j_K}{u_Q}}$$

- Pasos para calcular la impedancia o admitancia de entrada:

1. Hacer el circuito pasivo del circuito original. Para ello se sustituyen las fuentes independientes por:
   - Las de tensión por un cortocircuito.
   - Las de corriente por un circuito abierto.
   - Las fuentes dependientes deben incluirse.

2. Añadir una fuente ficticia:
   - Si es una impedancia: una fuente de tensión ficticia e_k entre los nudos que se indiquen, con el (+) en el primero de ellos (i_k como generador).
   - Si es una admitancia: una fuente de corriente ficticia j_k entre los bornes que se indiquen con la punta de la flecha en el primero de ellos (u_k como generador).

3. Calcular la relación:
   - Si es impedancia calcular la relación $\frac{e_k}{i_k}$.
   - Si es admitancia calcular la relación $\frac{j_k}{u_k}$.

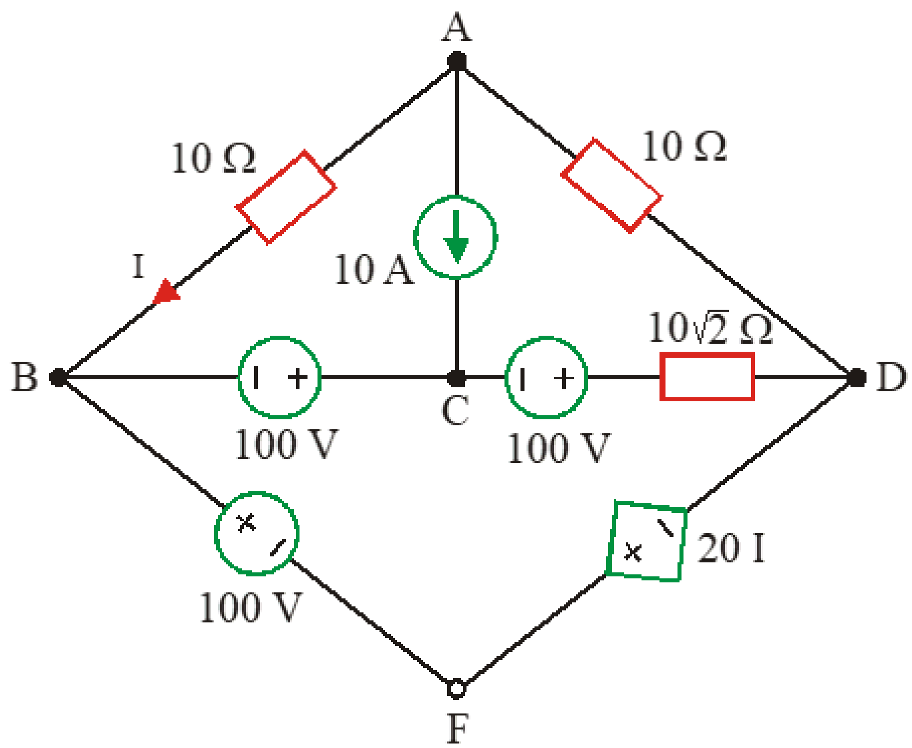
- Pasos para calcular la impedancia o admitancia de transferencia:

1. Hacer el circuito pasivo del circuito original. Para ello se sustituyen las fuentes independientes por:
   - Las de tensión por un cortocircuito.
   - Las de corriente por un circuito abierto.
   - Las fuentes dependientes deben incluirse.
2. Añadir una fuente ficticia
   - Si es una impedancia: una fuente de tensión ficticia e_k entre los nudos que se indiquen con el (+) en el primero de ellos y una corriente i_q del primer al segundo nudo.
   - Si es una admitancia: una fuente de corriente ficticia j_k entre los bornes que se indiquen con la punta de la flecha en el primero de ellos y una tensión u_q con el (+) en el primero de los nudos.
3. Calcular la relación:
   - Si es impedancia calcular la relación $\frac{e_k}{i_q}$.
   - Si es admitancia calcular la relación $\frac{j_k}{u_q}$.

Ejemplo 4.8.

Sobre el circuito de la figura, calcular:

1. La resistencia de entrada entre los terminales AD y la conductancia de transferencia entre las ramas AD y AB.
2. Sobre el circuito pasivo de la red, se conecta a los bornes AD una fuente ideal de corriente, de valor $j(t) = 30\sqrt{2}\ sin\ (200\ t + 30^o)\ \ A$. Calcular las potencias aparentes complejas generada por la fuente conectada y consumida por la resistencia de 10 Ω de la rama AB.

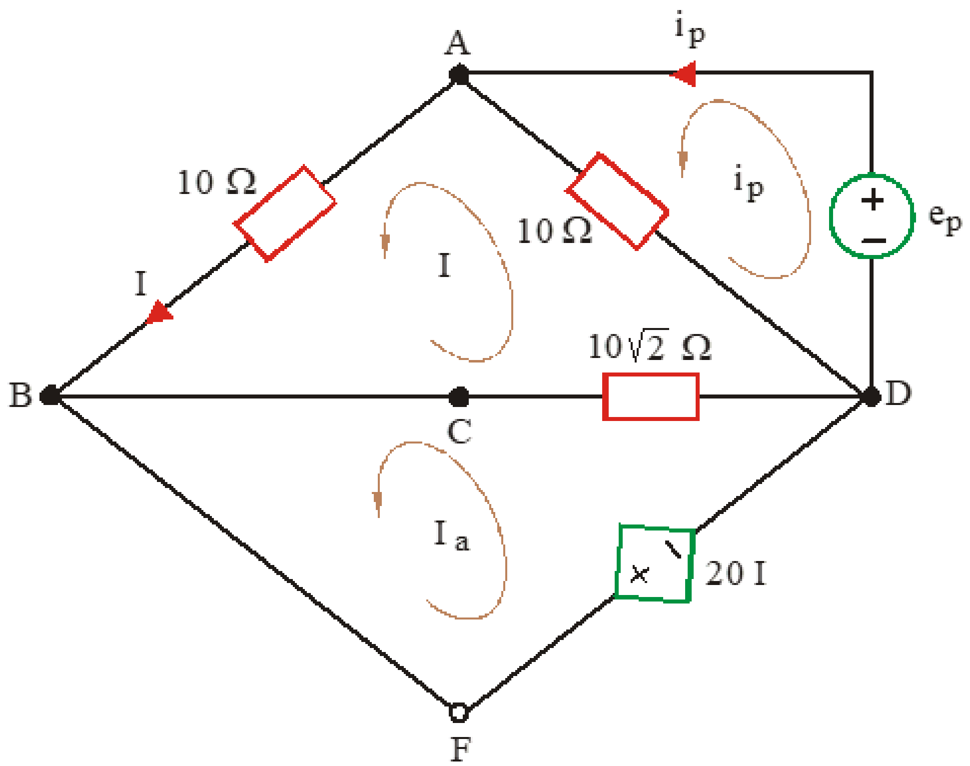


❖ Solución

Apartado 1.1 Resistencia de entrada en bornes AD: $R_{e,AD}$.

1. Hacer el circuito pasivo del circuito original. Para ello se sustituyen las fuentes independientes por:
   - Las de tensión por un cortocircuito.
   - Las de corriente por un circuito abierto.
   - Las fuentes dependientes deben incluirse.

2. Añadir una fuente ficticia:
   - Si es una impedancia: una fuente de tensión ficticia e_p entre los nudos que se indiquen, con el (+) en el primero de ellos (A) e i_p como generador.



3. Calcular la relación $\dfrac{e_p}{i_p}$ aplicando el MIM.

Pasos del MIM:

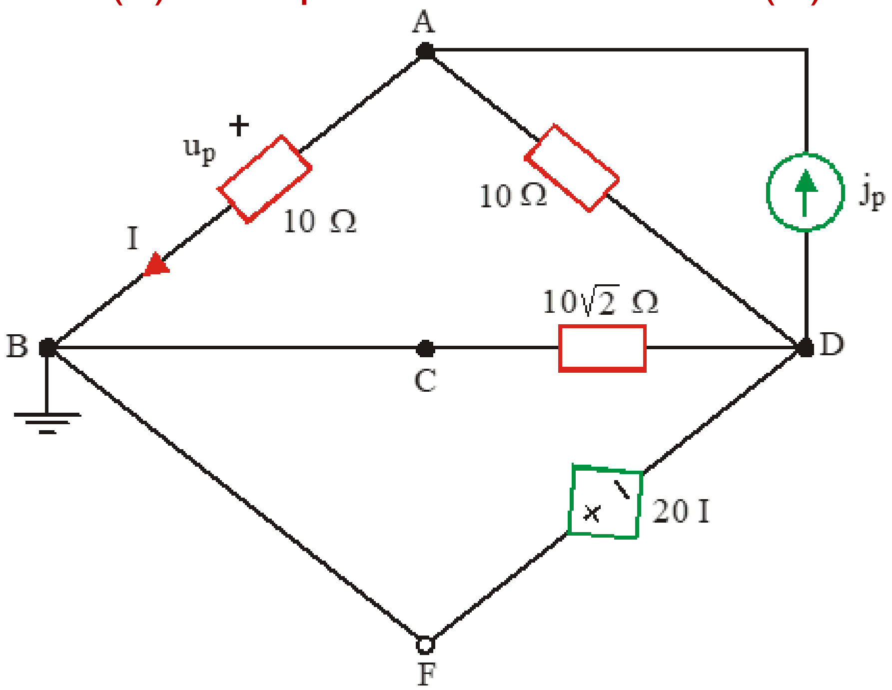
1. Calcular el número de incógnitas (r-n), que son las corrientes de las mallas: (6 – 3 = 3) I_a, I_p e I.
2. Ver si son todas incógnitas. ¿Existen fuentes ideales de corriente?
   - Externas: ninguna.
   - Internas: ninguna.
3. Plantear las ecuaciones sólo de las mallas que son incógnitas.

$$\begin{cases} 10\, i_p - 10\, I = e_p \\ -10\, i_p + (20 + 10\sqrt{2})\, I - 10\sqrt{2}\, I_a = 0 \\ -10\sqrt{2}\, I + 10\sqrt{2}\, I_a = -20\, I \end{cases}$$

+ Resolviendo, $\boxed{R_{e,AD} = \dfrac{e_p}{i_p} = 7{,}5\ \ \Omega}$

Apartado 1.2 Conductancia de transferencia entre los bornes AD y AB: $G_{t,AD \to AB}$.

1. Hacer el circuito pasivo del circuito original. Para ello se sustituyen las fuentes independientes por:
   + Las de tensión por un cortocircuito.
   + Las de corriente por un circuito abierto.
   + Las fuentes dependientes deben incluirse.
2. Añadir una fuente ficticia:
   + Si es una admitancia: una fuente de corriente ficticia j_p entre los bornes que se indiquen con la punta de la flecha en el primero de ellos (A) y una tensión u_p con el (+) en el primero de los nudos (A).



3. Calcular la relación $\frac{j_k}{u_q}$ aplicando el MTN.

Pasos del MTN:

1. Calcular el número de incógnitas (n), que son las tensiones de los nudos principales: (2) U_A y U_D.
2. Ver si son todas incógnitas. ¿Existen fuentes ideales de tensión?
   - Conectadas a tierra ($20I$): quita la incógnita $\overline{U}_D = -20I$ V.
   - No conectadas a tierra: ninguna.
3. Plantear las ecuaciones sólo de los nudos que son incógnitas.

+ $u_p\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right) - u_D\left(\frac{1}{10}\right) = j_p$

+ Ecuación de apoyo: $I = \frac{u_p}{10}$

+ Resolviendo, $\boxed{G_{t,AD-AB} = \frac{j_p}{u_p} = 0{,}4 \ \ S}$

Apartado 2.

1. Potencia suministrada por la fuente *j(t)*:

$\overline{J} = 30\angle 30^o \ \ A$, $\qquad R_{e,AD} = \frac{\overline{U}_J}{\overline{J}} = 7{,}5 \ \ \Omega$,

$\overline{U}_J = 7{,}5\ \overline{J} = 225\angle 30^o \ \ V$, $\overline{S}_J = \overline{U}_J\ \overline{J}^* = 6.750\angle 0^o \ \ VA$

2. <u>Potencia consumida por la resistencia rama AB:</u>

$$\bar{J} = 30\angle 30^o \;\; A\,, \quad G_{t,AD-AB} = \frac{\bar{J}}{\bar{U}_{AB}} = 0{,}4 \;\; S\,,$$

$$\bar{U}_{AB} = \frac{\bar{J}}{0{,}4} = 75\angle 30^o \;\; V\,, \quad \bar{S}_R = \frac{U_{AB}^2}{\bar{Z}^*} = 562{,}5\angle 0^o \;\; VA$$

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

TEOREMA DE RECIPROCIDAD

✓Introducción

❖ Objeto y límite de aplicación

- Objeto: cálculo de una cierta respuesta (tensión o intensidad) de una red, cuando se conocen otras.
- Condiciones de aplicación: la red debe ser pasiva lineal, bilaterales, tiempo-invariante y sin energía inicial.

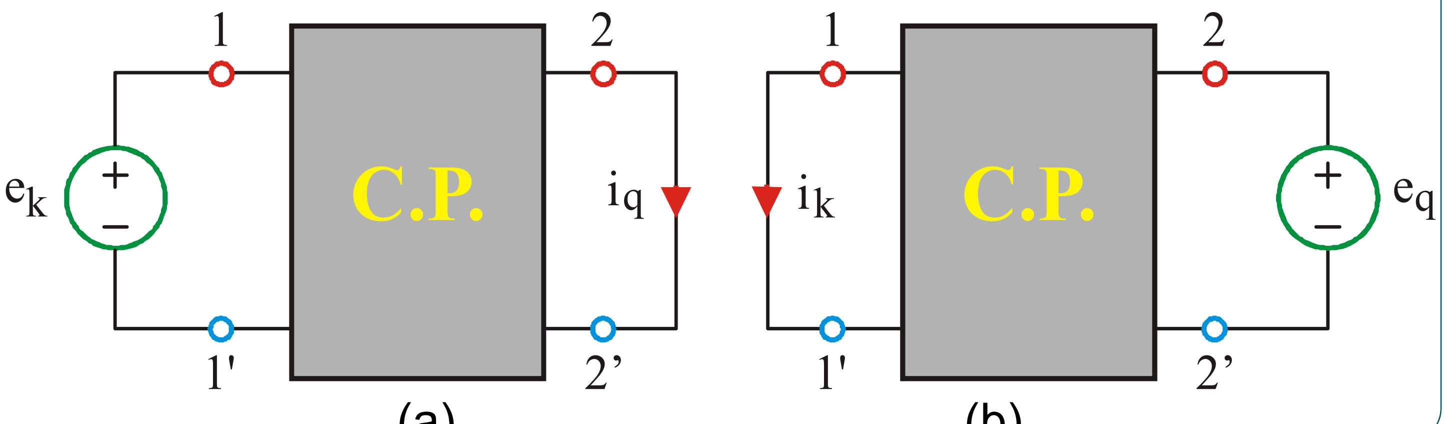
✓Definición y variantes

❖ Definición

- En toda red pasiva bilateral alimentada por una sola fuente independiente (de tensión o de corriente), la relación entre la excitación aplicada entre dos terminales y la respuesta obtenida en otros dos terminales (distintos de los anteriores), permanece constante al intercambiar la excitación por la respuesta.

❖ Variantes

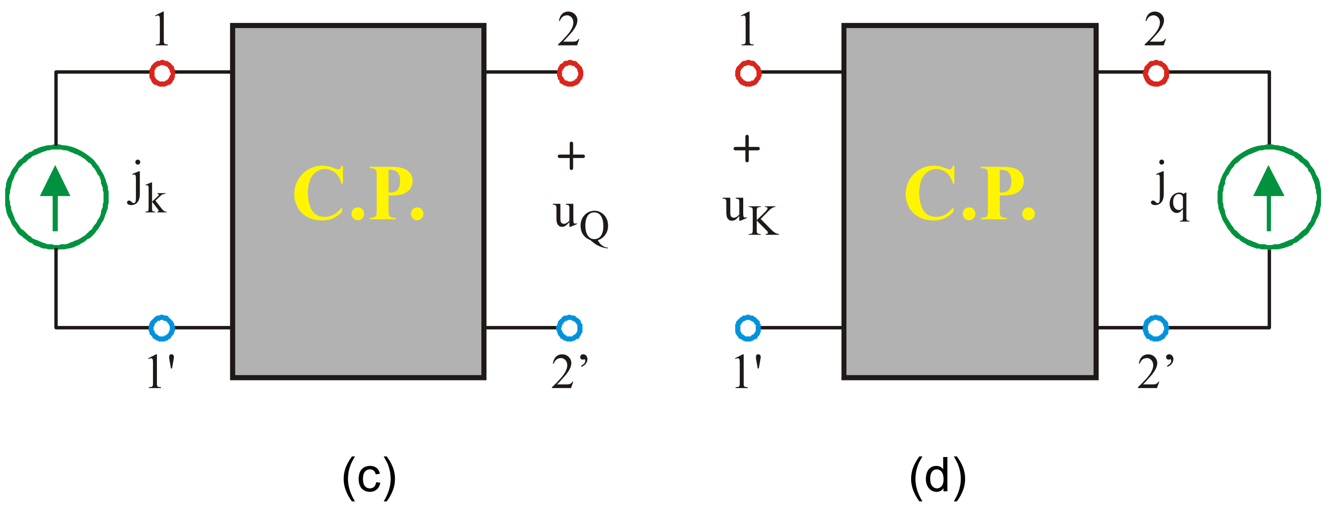
- Primera variante: fuente de tensión–corriente de rama.
  + Dadas las redes pasivas bilaterales (a) y (b).



(a) (b)

- Se verifica: $\boxed{\dfrac{e_k}{i_q} = \dfrac{e_q}{i_k}}$

- <u>Segunda variante:</u> fuente de corriente-tensión de rama
  - Dadas las redes pasivas bilaterales (c) y (d).



- Se verifica: $\boxed{\dfrac{j_k}{u_Q} = \dfrac{j_q}{u_K}}$

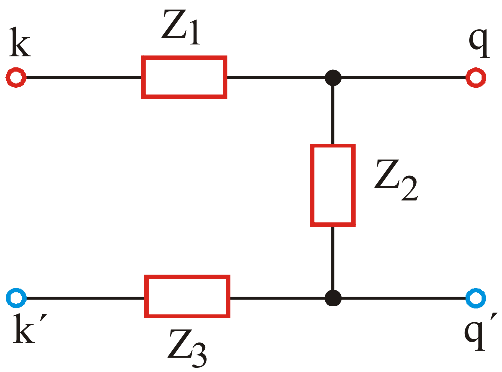
❖ Advertencia

- <u>En general:</u> no puede ser aplicado a relaciones excitación/respuesta de la misma dimensión.

$$\boxed{\frac{e_k}{u_q} \neq \frac{e_q}{u_k}} \quad , \quad \boxed{\frac{j_q}{i_k} \neq \frac{j_k}{i_q}}$$

Ejemplo 4.9.

Comprobar, sobre el cuadripolo pasivo de la figura, la primera forma del teorema de reciprocidad, así como la advertencia correspondiente.



❖ Solución:

- Probando la primera forma

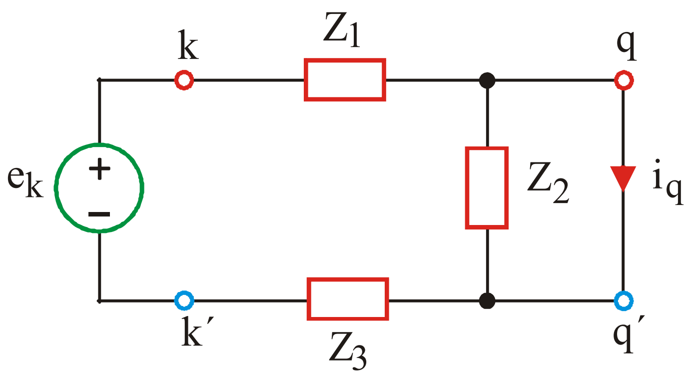


Figura (a)

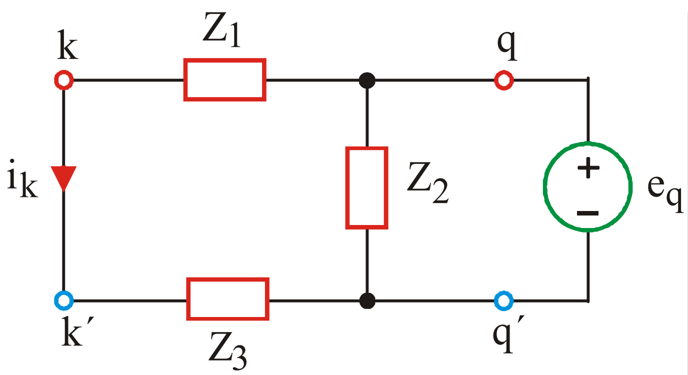


Figura (b)

+ En la red de la figura (a):

$$i_q = \frac{e_k}{Z_1 + Z_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{e_k}{i_q} = Z_1 + Z_3 \qquad \text{(i)}$$

+ En la figura (b):

$$i_k = \frac{e_q}{Z_1 + Z_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{e_q}{i_k} = Z_1 + Z_3 \qquad \text{(ii)}$$

- Por tanto, $\dfrac{e_k}{i_q} = \dfrac{e_q}{i_k}$

- Probando la advertencia

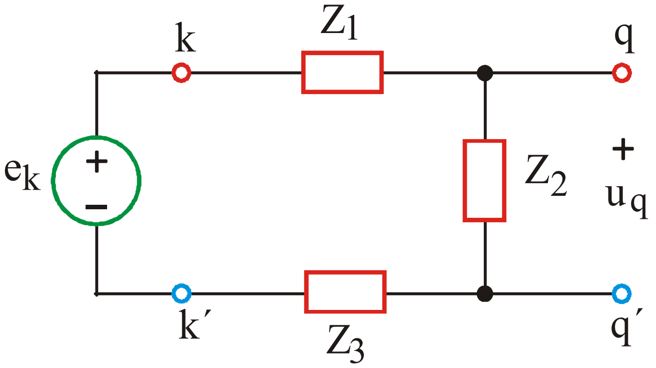


Figura (c)

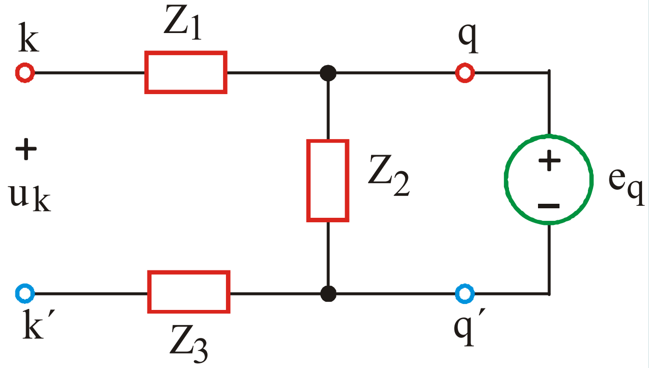


Figura (d)

- En la red de la figura (c):

$$i_k = \frac{e_k}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \Rightarrow u_q = Z_2 \cdot i_k = \frac{Z_2 \cdot e_k}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \Rightarrow$$

$$\frac{e_k}{u_q} = \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3 \cdot}{Z_2} \qquad \text{(iii)}$$

- En la figura (d):

$$u_k = e_q \quad \Rightarrow \quad \frac{e_q}{u_k} = 1 \qquad \text{(iv)}$$

- Por tanto, $\dfrac{e_k}{u_q} \neq \dfrac{e_q}{u_k}$

TEOREMA DE SUPERPOSICIÓN

✓ *Enunciado*

❖ Objeto

- Cálculo de la respuesta (tensión o intensidad) de una red lineal, cuando existen varias fuentes de excitación.

❖ Definición

- La respuesta de un circuito lineal con varias fuentes independientes, es igual a la suma algebraica de las respuestas, cuando actúa cada una de ellas por separado.

❖ Corolario

- Atención: la potencia no es una magnitud lineal. No puede calcularse por el Teorema de Superposición.
- El teorema permite la resolución, o análisis, de redes con fuentes de distinta pulsación ω o frecuencia *f*.

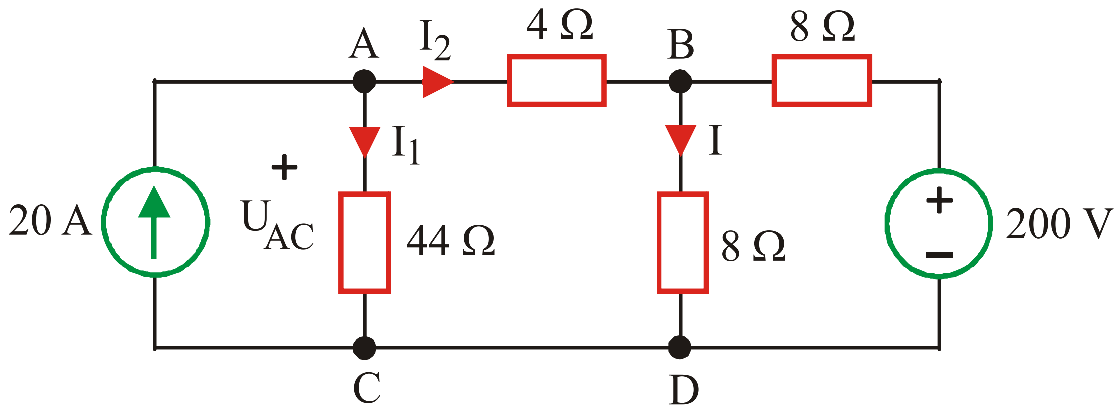
- Pasos para aplicar el método de superposición:

1. Si las fuentes independientes del circuito tienen:
   - La misma frecuencia, se puede proceder de dos maneras:
     - Se construirán tantos subcircuitos como fuentes independientes tenga la red o bien,
     - Se construirán tantos subcircuitos como grupos de fuentes independientes se deseen realizar.

     En ambas casos, el conjunto de subcircuitos contendrá todas las fuentes, pero sin repetir ninguna.
   - Distintas frecuencias se construirán tantos subcircuitos como frecuencias diferentes existan.
2. Transformación de las fuentes independientes de cada subcircuito.
   - De tensión, se sustituyen por un cortocircuito.
   - De corriente, se sustituyen por un circuito abierto.
   - Si el circuito presenta fuentes dependientes, éstas deberán estar presentes en todos los subcircuitos.
3. Resolver cada subcircuito (MIM, MTN, etc.)
4. Las respuestas del circuito original serán las sumas de las respuestas de cada subcircuito.

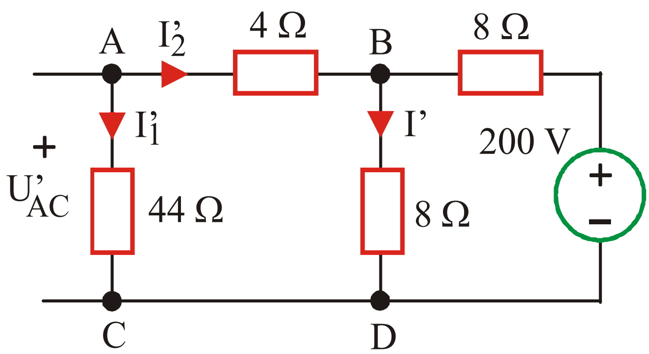
Ejemplo 4.10.

Sobre el circuito de la figura, excitado en D.C., calcular la corriente *I* y la tensión U_{AC}, aplicando el teorema de superposición.



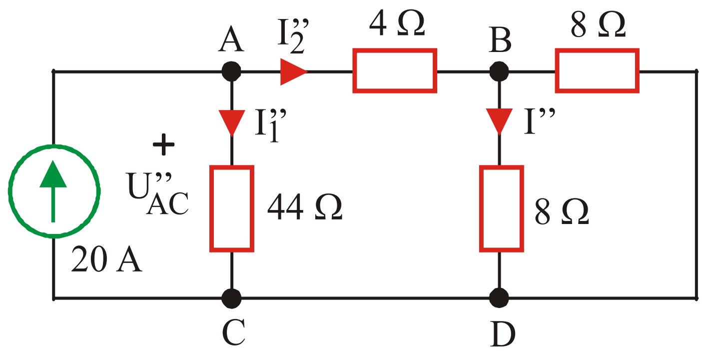
❖ Solución

1. Existen 2 fuentes independientes (20 A y 200 V), con lo que crearemos 2 subcircuitos derivados del original.
2. Subcircuitos:
   - Subcircuito (a), se mantiene 200 V y se convierte 20 A en un circuito abierto.
   - Subcircuito (b), se mantiene 20 A y se convierte 200 V en un cortocircuito.
   - No existen fuentes dependientes.



Subcircuito (a)

+



Subcircuito (b)

3. Resolución:

+ Subcircuito (a) por el MTN (nudos C y D tierra)

  - Ecuación del nudo B´:

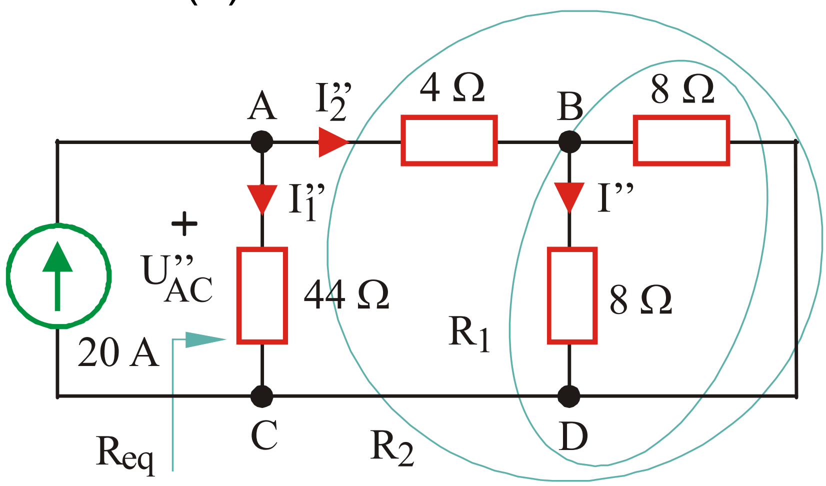
$$U'_B\left(\frac{1}{4+44}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=\frac{200}{8},\ U'_B=\frac{1200}{13}=92{,}3\ V.$$

  - Otras corrientes – tensiones:

$$I'=\frac{U_{B'}}{8}=\frac{150}{13}=11{,}53\ A;\quad I'_1=\frac{V'_B}{44+4}=\frac{25}{13}=1{,}92A$$

$$U'_{AC}=44\ I'_1=\frac{1.100}{13}=84{,}61\ V.$$

+ Subcircuito (b) asociando resistencias.



1) Paralelo: $R_1=\frac{8}{2}=4\ \Omega$, 2) Serie: $R_2=4+4=8\ \Omega$

y 3) Paralelo: $R_{eq}=\frac{8\cdot 44}{8+44}=\frac{88}{13}=6{,}76\ \Omega.$

  - Otras corrientes – tensiones:

$$U''_{AC} = R_{eq}\,20 = \frac{1760}{13} = 135{,}38\ V$$

$$I''_2 = \frac{U''_{AC}}{R_2} = \frac{220}{13} = 16{,}92\ A$$

$$U''_{BD} = R_1 I_2 = \frac{880}{13} = 67{,}69\ V$$

$$I'' = \frac{U''_{BD}}{8} = \frac{110}{13} = 8{,}46\ A$$

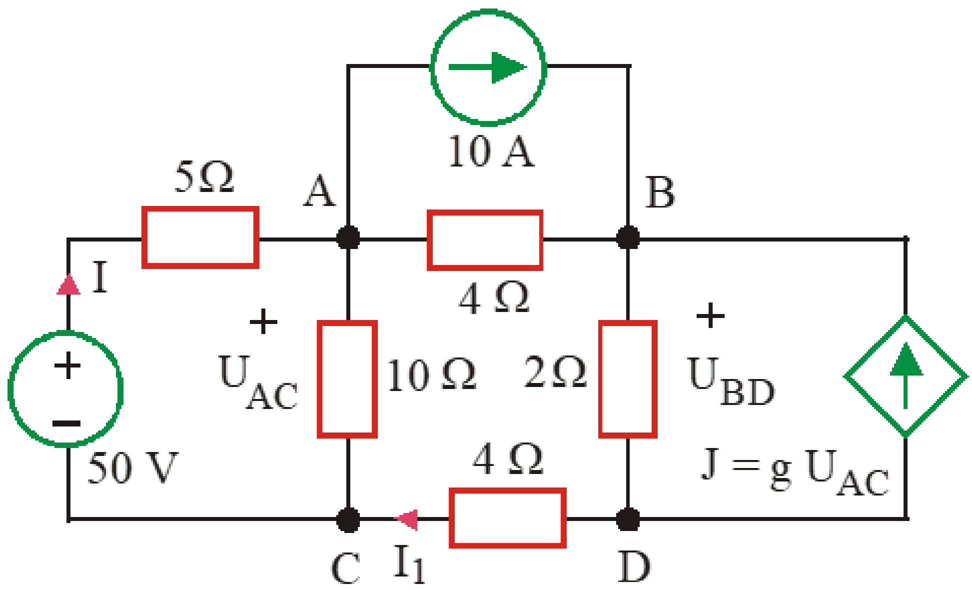
4. Aplicando el teorema del Superposición, resulta:

$$I = I' + I'' = \frac{150}{13} + \frac{110}{13} = 20\ A$$

$$U_{AC} = U'_{AC} + U''_{AC} = \frac{1.100}{13} + \frac{1.760}{13} = 220\ V.$$

Ejemplo 4.11.

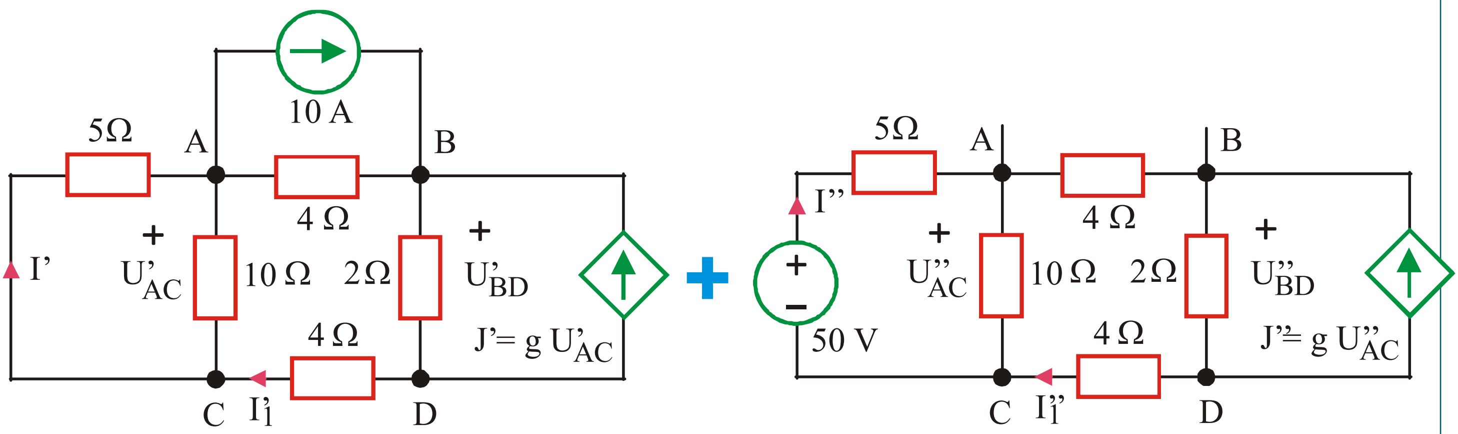
Si el circuito de la figura está excitado en D.C. y g = 0,5 S, calcular, aplicando el teorema de Superposición, la potencia consumida por la resistencia de 5 Ω y la potencia suministrada por la fuente de corriente dependiente.



❖ Solución

1. Existen 2 fuentes independientes (10 A y 50 V), con lo que crearemos 2 subcircuitos derivados del original.

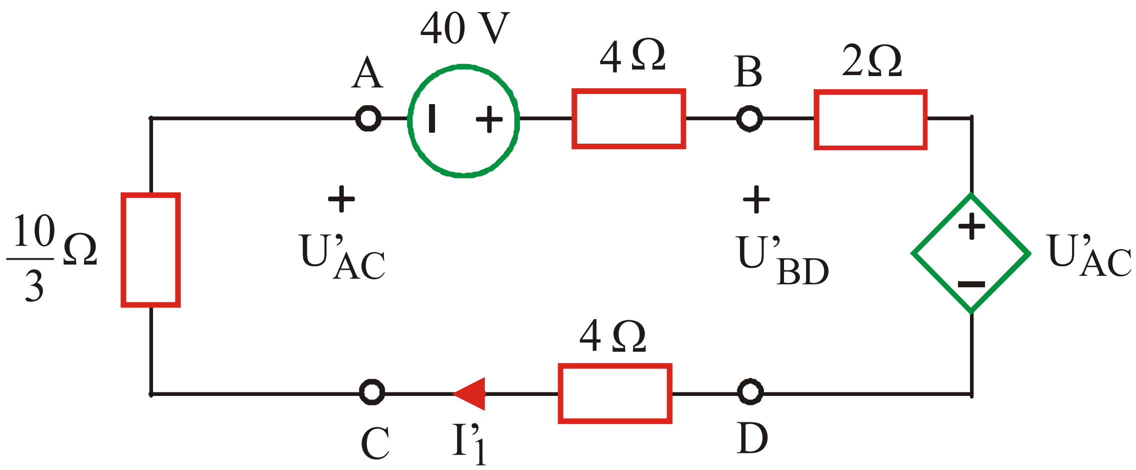
2. Subcircuitos:
   - Subcircuito (a), se mantiene 10 A y se convierte 50 V en un cortocircuito.
   - Subcircuito (b), se mantiene 50 V y se convierte 10 A en un circuito abierto.
   - Existe una fuente dependiente: $J = gU_{AC}$ que deberá estar presente en los 2 subcircuitos.



Subcircuito (a) Subcircuito (b)

3. Resolución:

- Subcircuito (a) asociando y transformando fuentes y resistencias



- Aplicando SLK, resulta el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} U'_{AC} + 40 - (4+2+4)I'_1 - U'_{AC} = 0 \\ U'_{AC} + \dfrac{10}{3} I'_1 = 0 \end{cases}$$

- Resolviendo: $U'_{AC} = -\dfrac{40}{3}\ V,\quad I'_1 = 4\ A.$

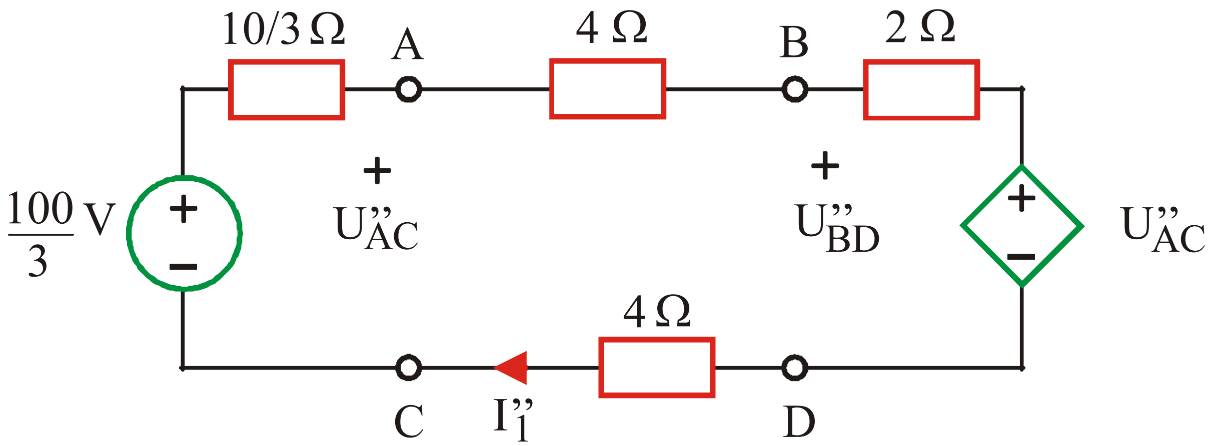
- Otros resultados:

$$J' = 0{,}5\left(-\frac{40}{3}\right) = -\frac{20}{3}\ A$$

$$U'_{BD} = 2I'_1 + U'_{AC} = -\frac{16}{3}\ V$$

$$I' = -\frac{V'_{AC}}{5} = \frac{8}{3} A$$

- Subcircuito (b) por transformación de fuentes:



- Aplicando SLK, resulta el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} U''_{AC} - (4+2+4)I''_1 - U''_{AC} = 0 \\ U''_{AC} + \dfrac{10}{3} I''_1 - \dfrac{100}{3} = 0 \end{cases}$$

- Resolviendo: $U''_{AC} = \dfrac{100}{3}\ V$; $I''_1 = 0\ A$.
- Otros resultados:

$$J'' = 0{,}5\ U''_{AC} = \frac{50}{3}\ A$$

$$U''_{BD} = U''_{AC} = \frac{100}{3}\ V$$

$$I'' = \frac{-U''_{AC} + 50}{5} = \frac{10}{3}\ A$$

4. Aplicando el teorema del Superposición, resulta:

$$I = I' + I'' = \frac{8}{3} + \frac{10}{3} = 6\ A$$

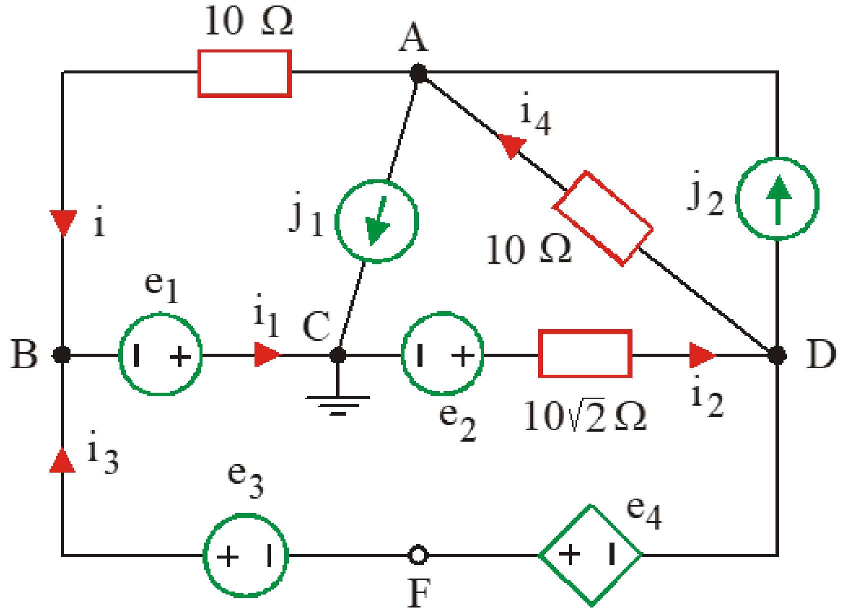
$$U_{BD} = U'_{BD} + U''_{BD} = -\frac{16}{3} + \frac{100}{3} = 28\ V$$

$$J = J' + J'' = -\frac{20}{3} + \frac{50}{3} = 10\ A$$

$$P(5\,\Omega) = 5\,I^2 = 180\ W\,;\ P(J) = U_{BD}\ J = 280\ W$$

Ejemplo 4.12.

En el circuito de la figura, son: $j_1(t) = 10 \ A$, $e_1(t) = e_2(t) = e_3(t) = 100 \ V$, $e_4(t) = 20 \ i(t) \ V$ y $j_2(t) = 30\sqrt{2} \ sin\ (200\ t + \pi / 6) \ A$. Calcular las tensiones de los nudos y las corrientes de rama.



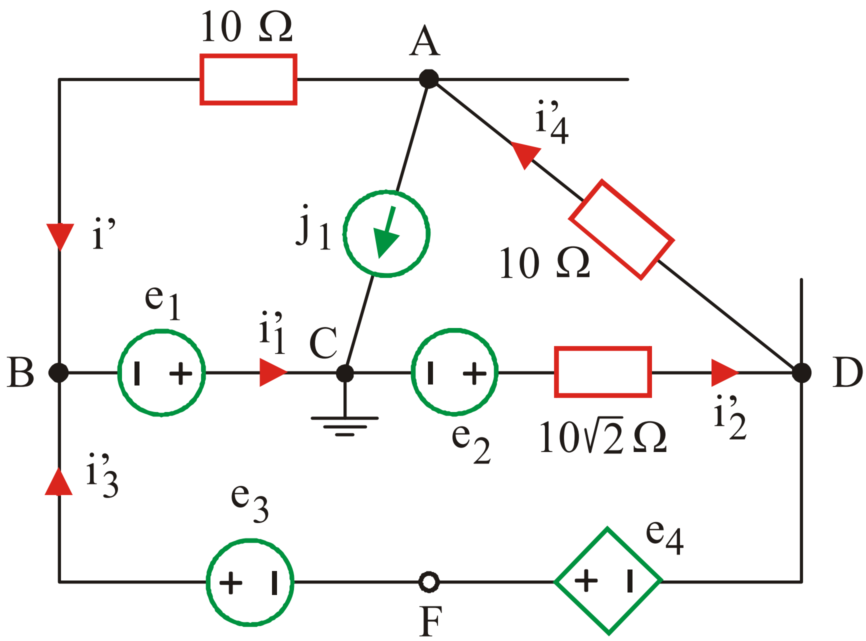
❖ Solución

1. Existen 2 frecuencias diferentes DC y AC (ω = 200 rad/s), con lo que crearemos 2 subcircuitos derivados del original.

2. Subcircuitos:
   - Subcircuito (a), se mantienen las fuentes de DC (J_1, E_1, E_2 y E_3) y se convierte J_2 en un circuito abierto.
   - Subcircuito (b), se mantiene las fuentes de AC J_2 y se convierten J_1 en un circuito abierto y E_1, E_2 y E_3 en cortocircuitos.
   - Existe una fuente dependiente: e_4 que deberá estar presente en los 2 subcircuitos.

3. Resolución:

+ Subcircuito (a) DC (ω = 0 rad/s) por el MTM



Subcircuito (a)

- Directamente, $\begin{cases} U'_B = -E_1 = -100 \;\; V \\ U'_F = U'_B - E_3 = -200 \;\; V \\ U'_D = U'_F - E_4 = -200 - 20\,I' \end{cases}$

- Ecuación del nudo A:

$$U'_A\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right) - U'_B\left(\frac{1}{10}\right) - U'_D\left(\frac{1}{10}\right) = -10$$

- Ecuación de apoyo: $I' = \dfrac{U'_A - U'_B}{10}$

- Resolviendo: $\begin{cases} U'_A = -150 \;\; V \\ U'_D = -100 \;\; V \, . \\ I' = -5 \;\; A \end{cases}$

- Corrientes de rama:

$$I'_2 = \frac{E_2 - U'_D}{10\sqrt{2}} = 10\sqrt{2} = 14{,}14\ \ A;$$

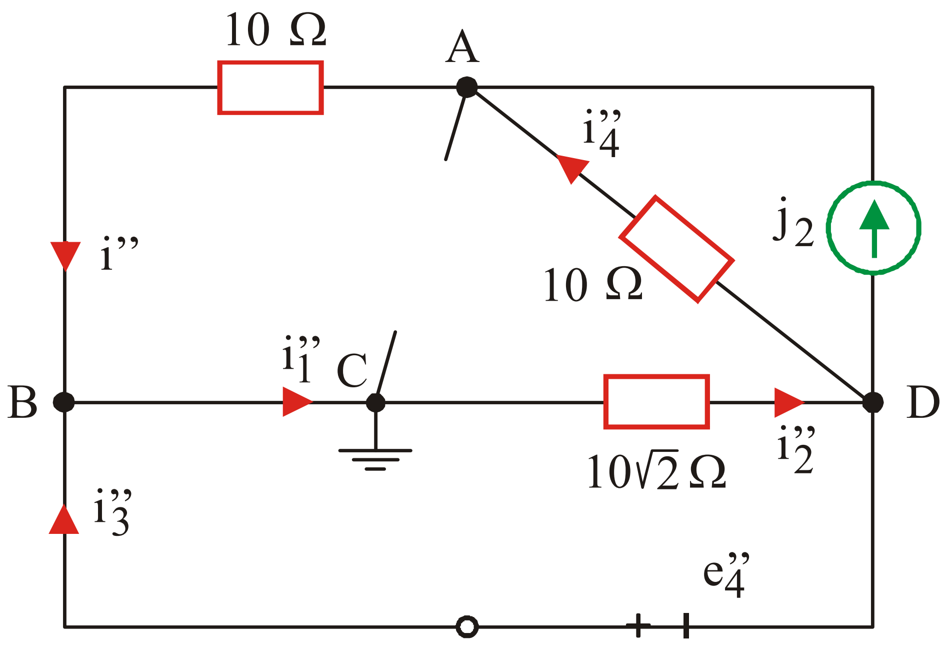
$$I'_4 = \frac{U'_D - U'_A}{10} = 5\ \ A;$$

$$I'_3 = I'_2 - I'_4 = 9{,}14\ \ A \quad \text{e} \quad I'_1 = I' + I'_3 = 4{,}14\ \ A$$

- Resumen de resultados del subcircuito (a):

$$\begin{cases} u'_A = U'_A = -150\ \ V \\ u'_B = U'_B = -100\ \ V \\ u'_C = U'_C = 0\ \ V \\ u'_D = U'_D = -100\ \ V \\ u'_F = U'_F = -200\ \ V \end{cases} , \quad \begin{cases} i' = I' = -5\ \ A \\ i'_1 = I'_1 = 4{,}14\ \ A \\ i'_2 = I'_2 = 14{,}14\ \ A \\ i'_3 = I'_3 = 9{,}14\ \ A \\ i'_4 = I'_4 = 5\ \ A \end{cases}$$

+ Subcircuito (b) AC (ω = 200 rad/s) por el MTN



Subcircuito (b)

- Directamente, $\begin{cases} \overline{U}''_B = \overline{U}''_F = 0 \ \ V \\ \overline{U}''_D = \overline{U}''_F - \overline{E}''_4 = -20\ \overline{I}'' \end{cases}$

- Ecuación del nudo A:

$$\overline{U}''_A \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10} \right) - \overline{U}''_D \left(\frac{1}{10} \right) = 30\angle 30^o$$

- Ecuación de apoyo: $\overline{I} = \dfrac{\overline{U}''_A}{10}$

- <u>Resolviendo</u>: $\begin{cases} \overline{U}''_A = 75\angle 30^o \ \ V \\ \overline{U}''_D = 150\angle -150^o \ \ V \\ \overline{I}'' = 7{,}5\angle 30^o \ \ A \end{cases}$

- Las corrientes de rama:

$$\overline{I}''_1 = \overline{I}''_2 = \frac{-\overline{U}''_D}{10\sqrt{2}} = \frac{15}{\sqrt{2}}\angle 30^o \ \ A,$$
$$\overline{I}''_4 = \frac{\overline{U}''_D - \overline{U}''_A}{10} = 22{,}5\angle -150^o \ \ A,$$
$$\overline{I}''_3 = \overline{I}''_1 - \overline{I}'' = 3{,}11\angle 30^o \ \ A.$$

- Resumen de resultados del subcircuito (b):

$$\begin{cases} u''_A = 75\sqrt{2}\ sin\,(200\ t + 30^o\,) \ \ V \\ u''_B = u''_C = u''_F = 0 \ \ V \\ u''_D = 150\sqrt{2}\ sin\,(200\ t - 150^o\,) \ \ V \end{cases}$$

$$\begin{cases} i'' = 7{,}5\sqrt{2}\ sin\ (200\ t + 30^o\ )\ \ A \\ i''_1 = i''_2 = 15\ sin\ (200\ t + 30^o\ )\ \ A \\ i''_3 = 4{,}40\ sin\ (200\ t + 30^o\ )\ \ A \\ i''_4 = 22{,}5\sqrt{2}\ sin\ (200\ t - 150^o\ )\ \ A \end{cases}$$

4. <u>Aplicando el teorema del Superposición, resulta:</u>

$$\begin{cases} u_A(t) = u'_A + u''_A = -150 + 75\sqrt{2}\ sin\ (200\ t + 30^o\ )\ \ V \\ u_B(t) = u'_B + u''_B = -100\ \ V \\ u_D(t) = u'_D + u''_D = -100 + 150\sqrt{2}\ sin\ (200\ t - 150^o\ )\ \ V \\ u_F(t) = u'_F + u''_F = -200\ \ V \end{cases}$$

$$\begin{cases} i(t) = i' + i'' = -5 + 7{,}5\sqrt{2}\ sin\ (200\ t + 30^o\ )\ \ A \\ i_1(t) = i'_1 + i''_1 = 4{,}14 + 15\ sin\ (200\ t + 30^o\ )\ \ A \\ i_2(t) = i'_2 + i''_2 = 10\sqrt{2} + 15\ sin\ (200\ t + 30^o\ )\ \ A \\ i_3(t) = i'_3 + i''_3 = 9{,}14 + 4{,}40\ sin\ (200\ t + 30^o\ )\ \ A \\ i_4(t) = i'_4 + i''_4 = 5 + 22{,}5\sqrt{2}\ sin\ (200\ t - 150^o\ )\ \ A \end{cases}$$

TEOREMAS DE FUENTES EQUIVALENTES

✓ *Introducción*

❖ Objeto

- Cálculo del circuito equivalente de una red activa lineal y de parámetros concentrados de dos terminales.
- El circuito dado y su equivalente, presentan la misma tensión y corriente entre terminales.

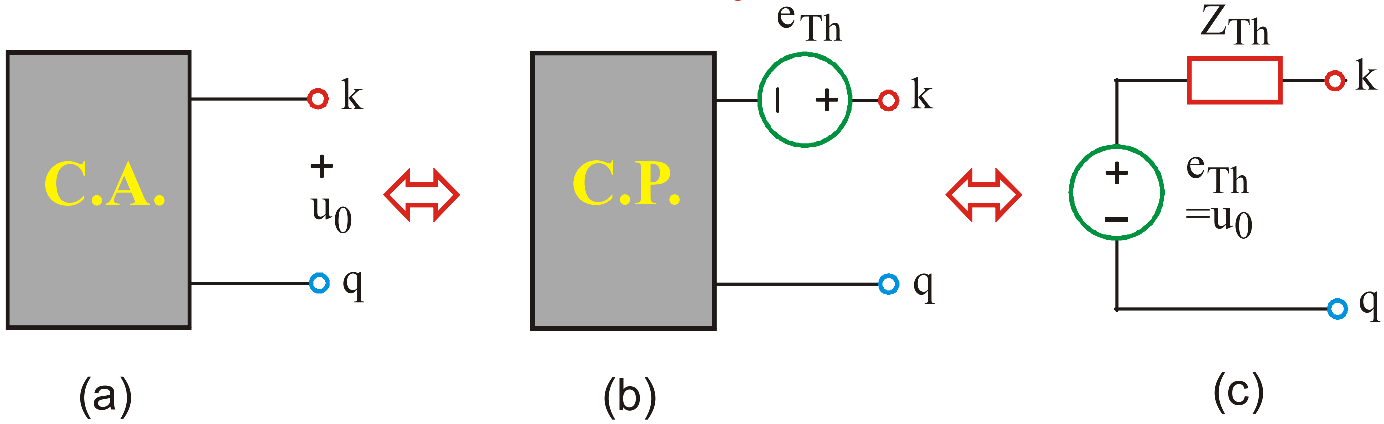
❖ Tipos de circuitos equivalentes

- Fuente real de tensión: teorema de Thevenin
- Fuente real de corriente: teorema de Norton.

✓ *Teorema de Thévenin*

❖ Definición

- Toda red activa, entre dos de sus terminales, es equivalente, a su circuito pasivo en serie con una fuente ideal de tensión, cuya f.e.m. vale la tensión a circuito abierto de la red activa original.



- C.A. = circuito activo (elementos activos y pasivos).
- C.P = circuito pasivo (sólo elementos pasivos, excepto si existen fuentes dependientes).
- u_0 = tensión a circuito abierto.
- $\boxed{e_{Th} = u_0}$ = fuente ideal de tensión.
- $\boxed{Z_{Th} = Z_{e,kq}}$ = impedancia de entrada del circuito pasivo.

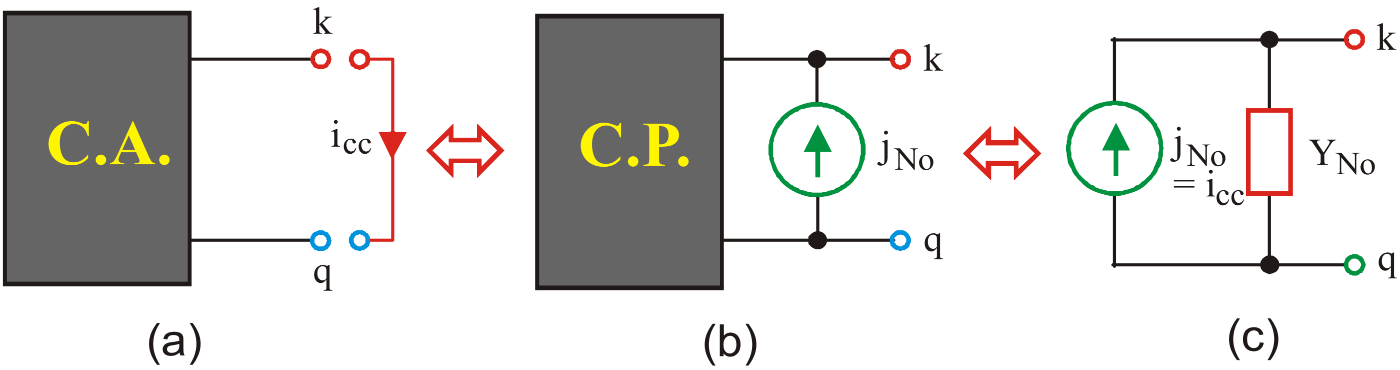
- <u>Pasos para aplicar el Teorema de Thevenin:</u>

1. Resolver el circuito original para calcular la tensión en vacío $u_0$entre los terminales que se pidan.
2. Representar el C.P. del original entre los terminales que pida. Para ello se transformarán las fuentes independientes:
   - De tensión, se sustituyen por un cortocircuito.
   - De corriente, se sustituyen por un circuito abierto.
   - Si el circuito presenta fuentes dependientes, éstas deberán estar presentes en el C.P.
3. Resolver el C.P. para calcular $Z_{e,kq} = Z_{Th}$
   - Si no posee fuentes dependientes asociando impedancias.
   - Si posee fuentes dependientes mediante los métodos conocidos (MIM, MTN, etc.)
4. Representar el circuito equivalente de Thevenin.
5. Transformar la fuente real de tensión en una fuente real de corriente para obtener también el Circuito Equivalente de Norton.

✓ Teorema de Norton

❖ Definición

- Toda red activa, entre dos de sus terminales, es equivalente, a su circuito pasivo en derivación con una fuente ideal de corriente, de valor la corriente de cortocircuito de la red activa original.



+ i_{cc} = corriente de cortocircuito.
+ $\boxed{j_{No} = i_{cc}}$ = fuente ideal de corriente.
+ $\boxed{Y_{No} = Y_{e,kq}}$ = admitancia de entrada del circuito pasivo.

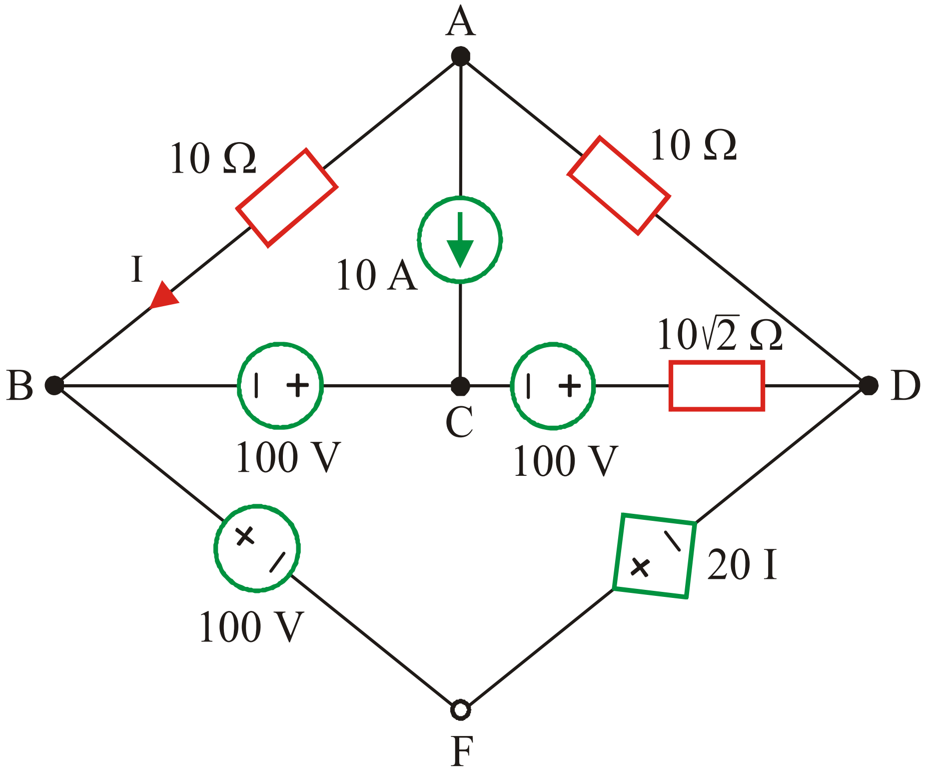
- Pasos para aplicar el Teorema de Norton:

1. Cortocircuitar en el circuito original los terminales entre los que se pide calcular el circuito equivalente de Norton para calcular la corriente de cortocircuito I_{cc}.
2. Representar el C.P. del original entre los terminales que pida. Para ello se transformarán las fuentes independientes:
   + De tensión, se sustituyen por un cortocircuito.
   + De corriente, se sustituyen por un circuito abierto.
   + Si el circuito presenta fuentes dependientes, éstas deberán estar presentes en el C.P.

3. Resolver el C.P. para calcular $Z_{e,kq} = Z_{Th}$ y $Y_{No} = \frac{1}{Z_{Th}}$.
   - Si no posee fuentes dependientes asociando impedancias.
   - Si posee fuentes dependientes mediante los métodos conocidos (MIM, MTN, etc.)
4. Representar el circuito equivalente de Norton.
5. Transformar la fuente real de corriente en una fuente real de tensión para obtener también el Circuito Equivalente de Thevenin.

Ejemplo 4.13.

Determinar los circuitos equivalentes de Thévenin y Norton entre los terminales D y A del circuito de la figura.



❖ Solución

1. Resolver el circuito original para calcular la tensión en vacío U_{DA} mediante el MTN.

   - Referencia el nudo *B:* $U_B = 0 \ \ V$

$$\begin{cases} U_F = -100 \ \ V \\ U_C = 100 \ \ V \\ U_D = U_F - 20\, I \\ U_A\left(\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10}\right) - U_D\left(\dfrac{1}{10}\right) = -10 \\ I = U_A / 10 \end{cases}$$

   - Resolviendo, resulta:

$$U_A = -50 \;\; V \, , \, U_D = 0 \;\; V \, , \, I = -5 \;\; A \, .$$

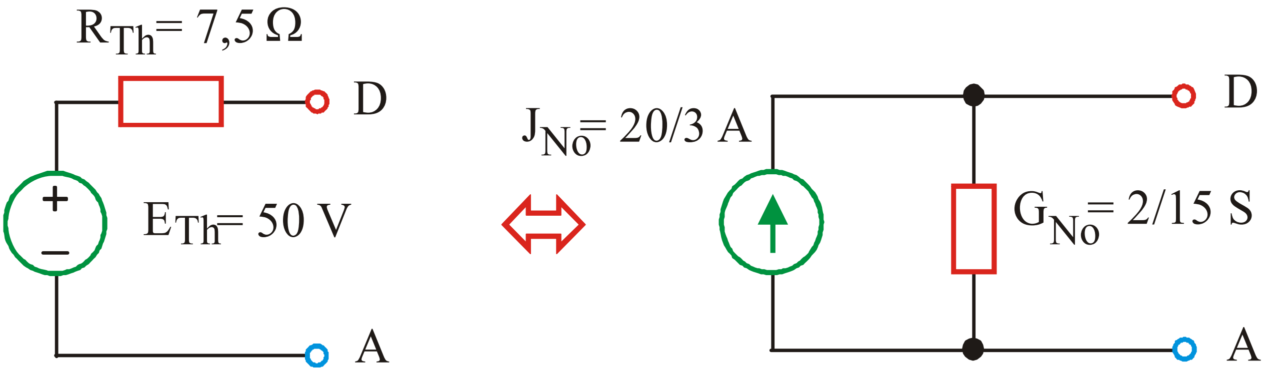
- La f.e.m. de la fuente Thévenin, vale:

$$\boxed{E_{Th} = U_D - U_A = 50 \;\; V}.$$

2. Representar el C.P. del original entre los terminales que D y A. Para ello se transformarán las fuentes independientes:
   - De tensión, se sustituyen por un cortocircuito.
   - De corriente, se sustituyen por un circuito abierto.
   - El circuito presenta una fuente dependiente (20I) que deberá estar incluida en el C.P.
3. Resolver el C.P. para calcular $Z_{e,DA} = Z_{Th}$
   - Al poseer fuentes dependientes mediante los métodos conocidos (MIM, MTN, etc.)
   - La resistencia equivalente (o de entrada) $R_{e,DA}$ se calculó en el *Ejemplo 4.8*, y su valor es:

$$\boxed{R_{Th} = R_{e,DA} = 7.5 \; \Omega}$$

4. Representar el circuito equivalente de Thevenin.



5. Transformar la fuente real de tensión en una fuente real de corriente para obtener también el Circuito Equivalente de Norton.

$$J_{No} = \frac{E_{Th}}{R_{Th}} = 6{,}\widehat{6} \quad A, \quad G_{No} = \frac{1}{R_{Th}} = 0{,}1\widehat{3} \quad S$$

TEOREMA COMPENSACIÓN O DE FRANK Y SU DUAL

✓Introducción

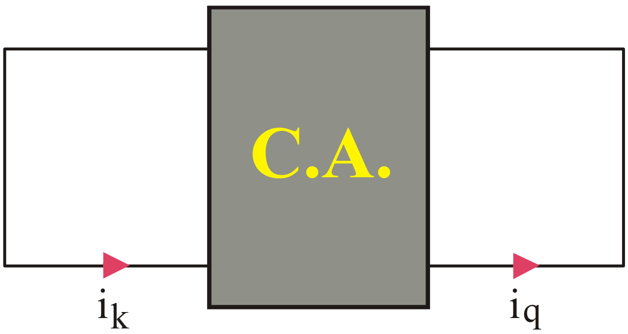
❖ Objeto

- Determinar los incrementos de intensidad originados en las diferentes ramas de un circuito activo lineal, cuando en una de las mismas, se produce una variación de su impedancia. Todo ello, sin necesidad de un nuevo análisis de la red completa, siempre que se conozcan las corrientes de la red original.

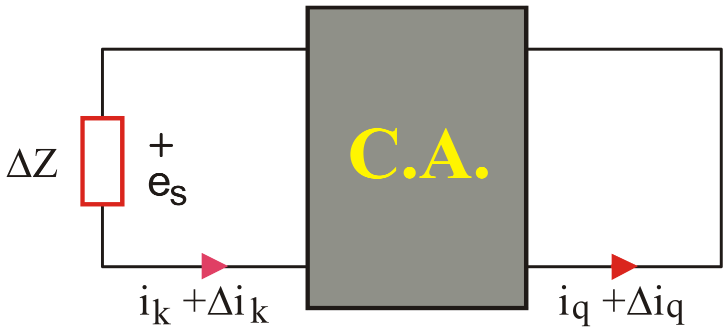
✓Enunciado

❖ Premisas

- Se posee un C.A. (a) cuyas corrientes de rama i_k, i_q, etc. son conocidas.



(a)



(b)

- Se produce en el C.A.(a) una variación de impedancia ΔZ (positiva o negativa) que da lugar al C.A. (b)
- De este modo, aparecen en las ramas del C.A. (b) unos incrementos de corriente (positivos o negativos)

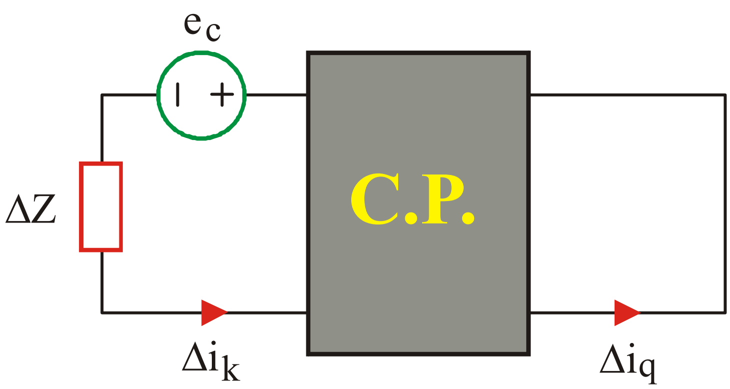
+ Las nuevas intensidades de rama, son: $\begin{cases} i_k + \Delta i_k \\ i_q + \Delta i_q \end{cases}$

- La caída de tensión en ΔZ, vale: $e_s = \Delta Z(i_k + \Delta i_k)$

❖ Enunciado del teorema

- Los incrementos de corriente se determinan sobre el C.P. (b) que contendrá una fuente ideal de tensión e_c dispuesta en serie en la rama en la que se ha producido la variación de impedancia. El valor de e_c es:

$$\boxed{e_c = \Delta Z\ i_k}\ ,$$

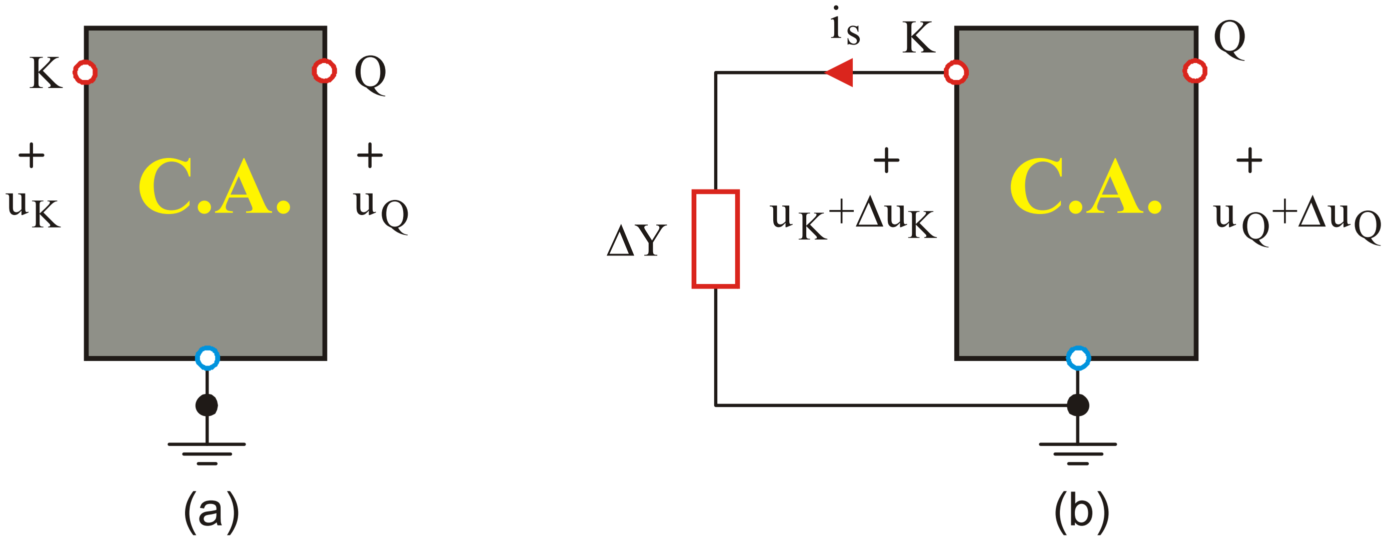


(c)

✓ Teorema dual

❖ Premisas

- Se posee un C.A. (a) cuyas tensiones de nudo u_K, u_Q, etc. son conocidas.

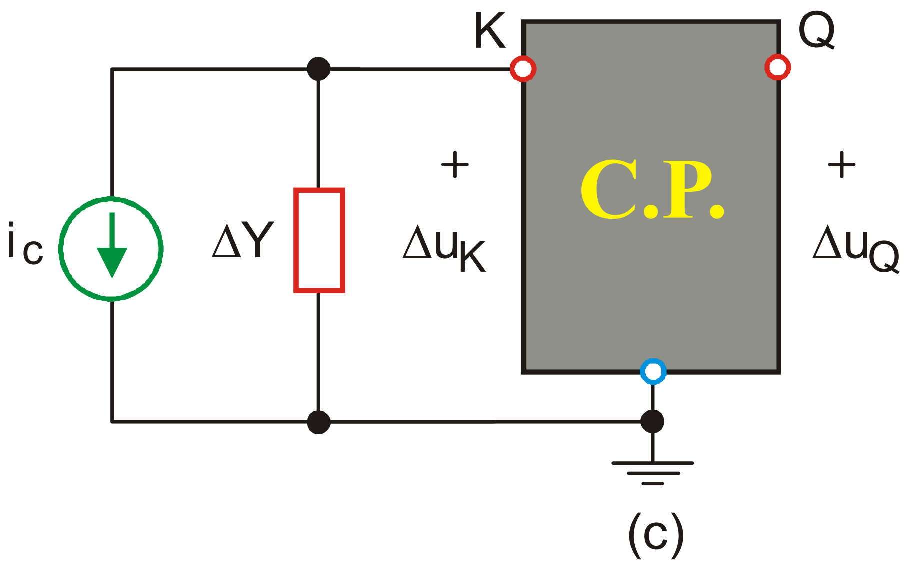


- Se produce en el C.A.(a) una variación de admitancia ΔY (positiva o negativa) que da lugar al C.A. (b)
- De este modo, aparecen en los nudos C.A. (b) unos incrementos de tensión (positivos o negativos)
  - Las nuevas tensiones de nudo, son: $\left\{\begin{array}{l} u_K+\Delta u_K \\ u_Q+\Delta u_Q \end{array}\right.$
- La corriente a través ΔY, vale: $i_s = \Delta Y(u_K+\Delta u_K)$

❖ Enunciado del teorema

- Los incrementos de tensión de los nudos se determinan sobre el C.P. (b) que contendrá una fuente ideal de corriente i_C, dispuesta en paralelo con la variación de admitancia. El valor de i_C es:

$$\boxed{i_C = \Delta Y\ u_K},$$



- <u>Pasos para la aplicación del Teorema de Frank o Dual:</u>

1. <u>Decidir si utilizar el Teorema de Frank o el Dual.</u>
   - Si existe ΔZ utilizar el Teorema de Frank.
   - Si existe ΔY utilizar el Teorema Dual.
2. <u>Resolver el circuito original</u> para calcular las tensiones, y corrientes originales y la fuente de compensación:
   - Fuente de tensión si es el T. Frank: $e_c = i_{orig.} \cdot \Delta Z$
   - Fuente de corriente si es el T. Dual: $j_c = u_{orig.} \cdot \Delta Y$
3. <u>Representar el C.P.</u> del original añadiendo la fuente de compensación e_c o j_c en serie o en paralelo con la rama en la que se ha producido la variación de impedancia. Para ello se transformarán las fuentes independientes:
   - De tensión, se sustituyen por un cortocircuito.

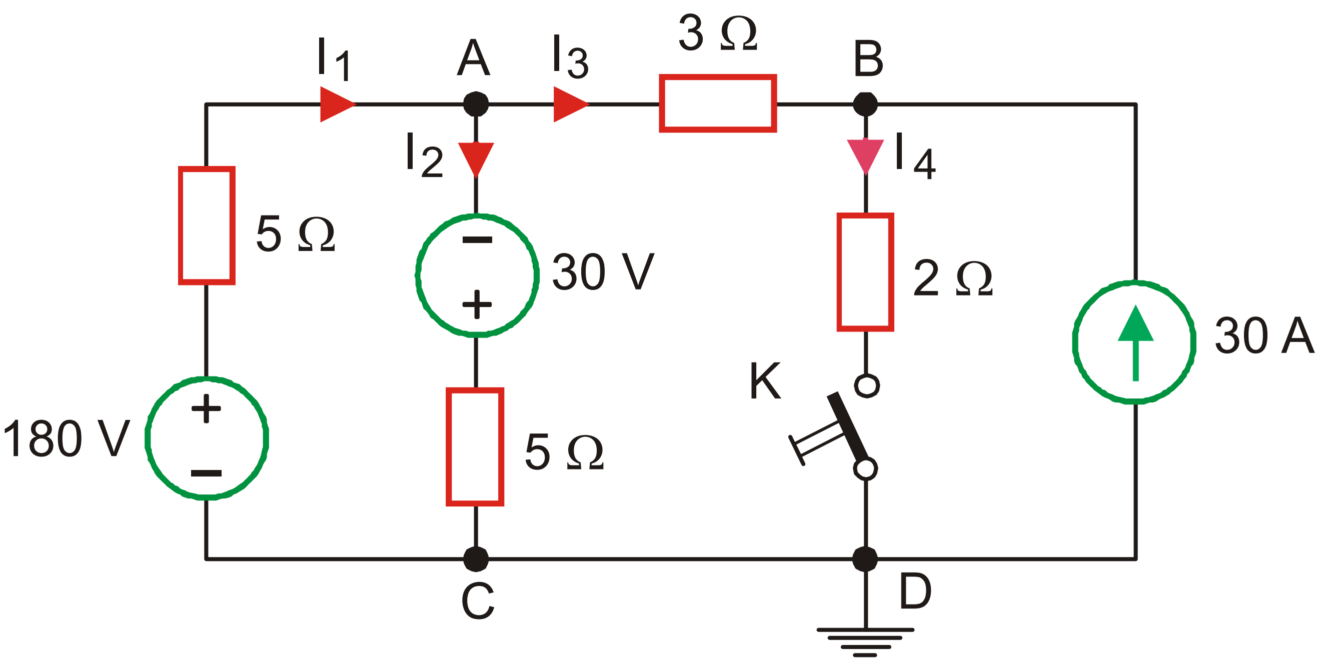
- De corriente, se sustituyen por un circuito abierto.
- Si el circuito presenta fuentes dependientes, éstas deberán estar presentes en el C.P.

4. Resolver el C.P. para calcular los incrementos de tensión y de corriente mediante los métodos conocidos (MIM, MTN, etc.)

5. Obtener las tensiones y corrientes del circuito a resolver. Para ello se deben sumar los valores del circuito original (Paso 1) a los incrementos obtenidos en el Paso 4.

Ejemplo 4.14.

Sobre la red de la figura, y haciendo uso del teorema de compensación, calcular los incrementos de corriente de sus ramas, así como los incrementos de tensión de los nudos *A* y *B*, respecto al de referencia, cuando es cerrado el interruptor *K*.



❖ Solución

1. Decidir si utilizar el Teorema de Frank o el Dual.
   - $\Delta R = R_{final} - R_{inicial} = 2 - \infty \Rightarrow$ No, T. Frank.
   - $\Delta G = G_{final} - G_{inicial} = 0{,}5 - 0 = 0{,}5S \Rightarrow$ Sí, T. dual.

2. Resolver el circuito original para calcular las tensiones y corrientes originales y la fuente de corriente de compensación. Para ello usamos el MTN:

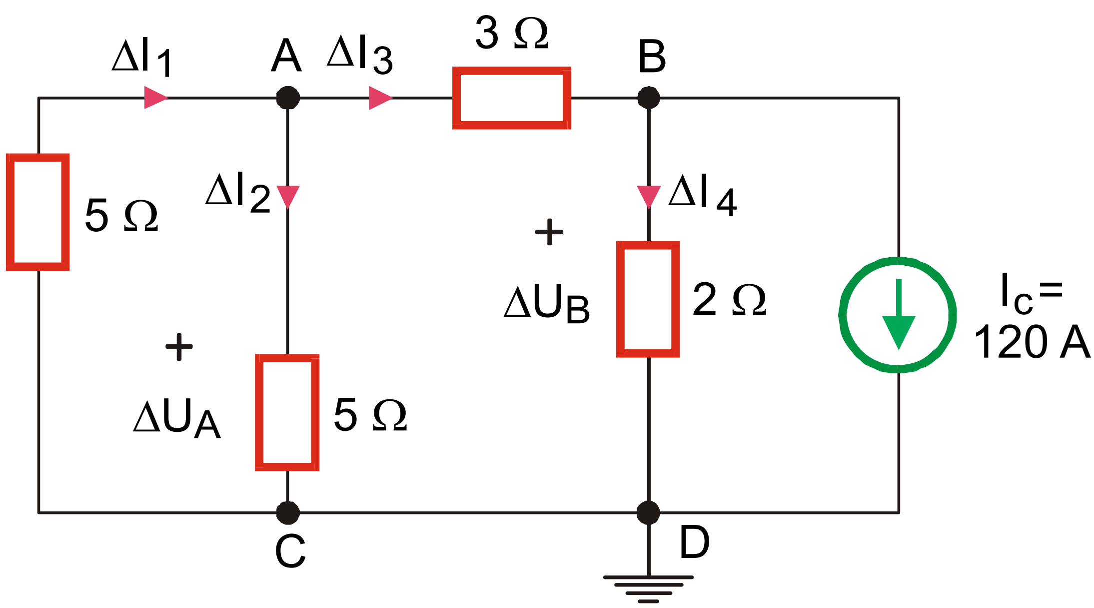
$$U_A\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right) = 30 - \frac{30}{5} + \frac{180}{5} \quad \Rightarrow \quad U_A = 150 \ \ V$$

   - Luego: $U_B = U_A + 3 \cdot 30 = 240 \ \ V$

- Valor de la fuente de corriente de compensación j_c:

$$I_c = \Delta G \; U_B = 120\,A.$$

3. <u>Representar el C.P.</u> del original añadiendo la fuente de tensión de compensación e_c en serie en la rama en la que se ha producido la variación de impedancia. Para ello se transformarán las fuentes independientes:
   - De tensión, se sustituyen por un cortocircuito.
   - De corriente, se sustituyen por un circuito abierto.
   - El circuito no posee fuentes dependientes.



4. Resolver el C.P. para calcular los incrementos de tensión y de corriente asociando impedancias.

$$R_1 = 5 \,//\, 5 = 2{,}5\Omega \;,\; R_2 = R_1 + 3 = 5{,}5\,\Omega$$

$$R_{eq} = R_2 \,//\, 2 = \frac{5{,}5 \cdot 2}{5{,}5 + 2} = \frac{22}{15} = 1{,}46\Omega$$

   - Ahora:

$$\Delta U_B = R_{eq}(-I_c) = \frac{22}{15}(-120) = -176V$$

$$\Delta I_4 = \frac{\Delta U_B}{2} = -88 \quad A$$

$$\Delta I_3 = \Delta I_4 + I_c = 32 \;\; A$$

$$\Delta V_A = R_1(-\Delta I_3) = 2{,}5(-32) = -80V$$

$$\Delta I_1 = \frac{-\Delta U_A}{5} = 16A$$

$$\Delta I_2 = \frac{\Delta U_A}{5} = -16 \;\; A$$

5. Obtener las tensiones y corrientes del circuito a resolver. Este paso no es necesario puesto que únicamente se piden los incrementos. No obstante, sirva como ejemplo el cálculo de U_B':

$$U_B' = U_B + \Delta U_B = 240 + (-176) = 64V$$

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- **Balabanian, N. y Otros** TEORÍA DE REDES ELÉCTRICAS. Editorial Reverté. México. 1993.
- **Chua, L.O. y Otros.** LINEAR AND NONLINEAR CIRCUITS. McGraw-Hill Book Company. New York. 1987.
- **Eguíluz, L. I. y Otros.** PRUEBAS OBJETIVAS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS. Eunsa. Pamplona. 2001.
- **Gerez, V. y Czitróm, V.** CIRCUITOS Y SISTEMAS ELECTRO-MECANICOS. Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.L. México. 1 974.
- **Nilsson, J. W. y Riedel, S. A.** CIRCUITOS ELÉCTRICOS. Prentice Hall. México. 2001.
- **Parra, V. M. y Otros.** TEORÍA DE CIRCUITOS I y II. U.N.E.D. Madrid. 1991.
- **Pastor, A. y Otros.** CIRCUITOS ELÉCTRICOS. Vol. I U.N.E.D. Madrid. 2005.
- **Ras, E.** REDES ELÉCTRICAS Y MULTIPOLOS. Marcombo Boixareu Editores. Barcelona. 1 988.
- **Fallot, M.** Thèorie Générale de Circuits Électriques. Ed. Dunot. Paris, 1960.
- **Frank, E.** Electrical Measurement Analysis. McGraw-Hill. New York, 1959.
- **Kennelly, A.E.** The Equivalence of Triangles and Three-Pointed Stars in Conducting Networks. Electrical World

and Engineer. Vol. 34, No. 12, pp. 413-414. September, 1899.

- **Letters to the Editor**: Léon Charles Thévenin. Electrical Engineering. Vol. 69, pp. 187-187. February, 1950.
- **Madrigal, R.I.** Teoría Moderna de Circuitos Eléctricos. Editorial Pirámide, S.A. Madrid, 1977.
- **Suchet, C.** Léon Charles Thévenin. Electrical Engineering. Vol. 68, pp. 843-844. October, 1949.
- **Tellegen, B.D.H.** A General Network Theorem, with Applications. Philips Research Report 7, pp. 259-269, 1952.

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-