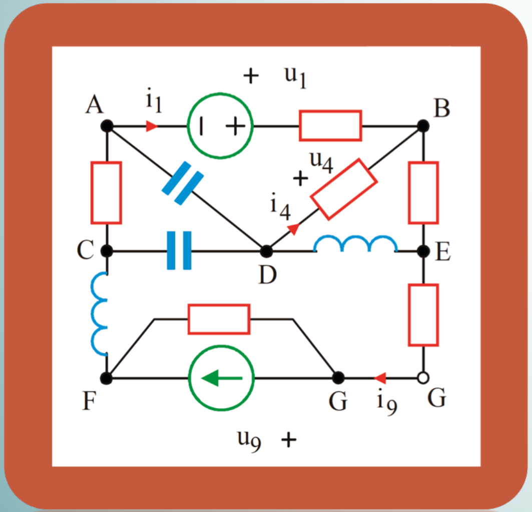
Fundamentos de Ingeniería Eléctrica

U.D. 4: MÉTODOS DE ANÁLISIS DE CIRCUITOS

Tema 4.3 - Métodos de Maxwell: Análisis por Mallas



Alberto Arroyo Gutiérrez
José Carlos Lavandero González
Sergio Bustamante Sánchez
Eugenio Sainz Ortiz
Alberto Laso Pérez
Raquel Martínez Torre
Mario Mañana Canteli

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ENERGÉTICA

Grado en Ingeniería Eléctrica y Grado en Ingeniería en Electrónica Industrial y Automática

G412/G280 FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

U.D. 4: Métodos de Análisis de Circuitos

Tema 4.3 – Métodos de Maxwell: Análisis por Mallas

Tema 4.3 – Métodos de Maxwell: Análisis por Mallas

1. Clase Previa
2. Método de Intensidad de Mallas
3. Fuente Dependiente de Corriente y de Tensión
4. Ejemplo
5. Resumen de la Clase
6. Clase Siguiente

2

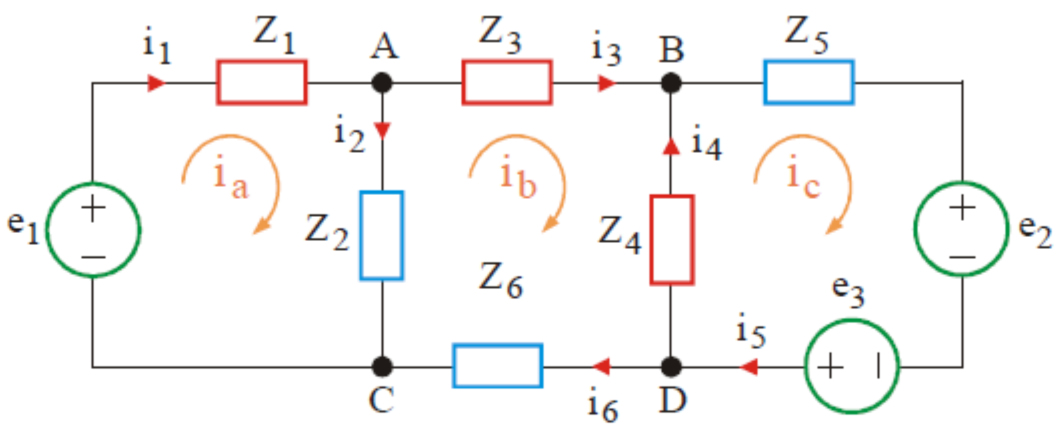
Método de Intensidad de Mallas

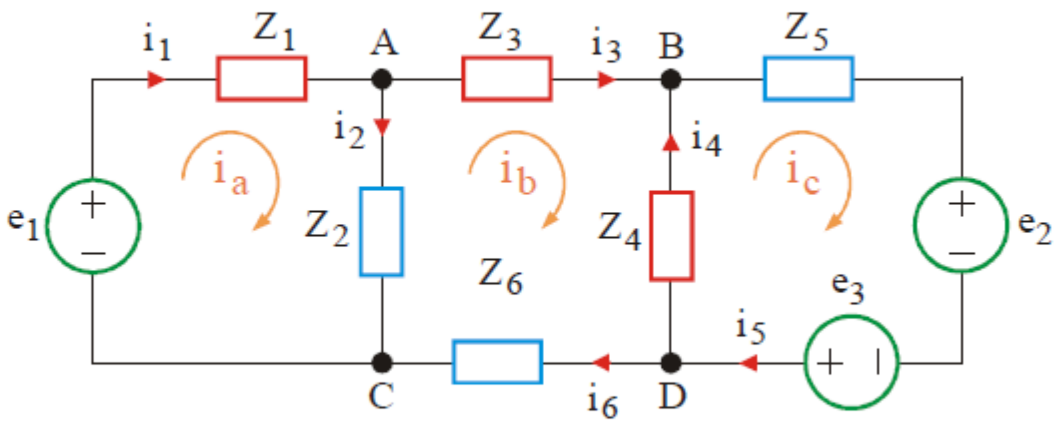
Características

- Perteneciente al grupo de métodos circulares.
- Únicamente se plantean las ecuaciones de la SLK en las mallas.
- En una red de *r* ramas y *n+1* nudos, el número de ecuaciones linealmente independientes es, mallas = *m* = *r* - *n*.
- Método válido, únicamente, para redes planas.
- Adecuado cuando las fuentes de la red son de tensión.
- La forma matricial de las ecuaciones ⇒ planteamiento directo del método –por inspección–. Salvo en los casos particulares.
- Parámetros y variables utilizadas: genéricas,
  + Elementos pasivos: $Z \equiv Z(D)$, $Y \equiv Y(D)$
  + Excitaciones/respuestas: $e \equiv e(t)$, $u \equiv u(t)$, $j \equiv j(t)$, ...

Deducción del método

- Preliminares: sobre la red dada, de cuatro nudos y seis ramas, representar:
  - Las corrientes de rama, $i_1, \cdots, i_6$ (nombre y sentido).
  - Las incógnitas son las corrientes de malla i_a, i_b e i_c (nombre y sentido). Son corrientes ficticias que recorren las mallas.

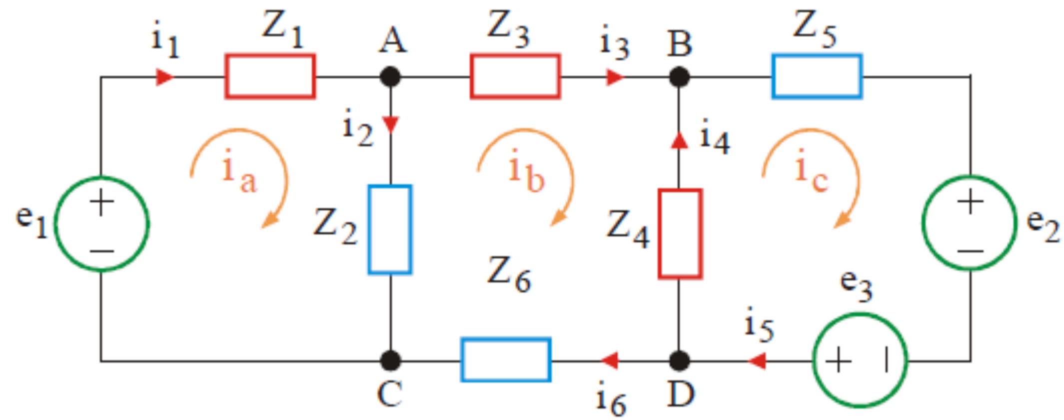




- Escritura de las ecuaciones de la SLK
  - malla a: $e_1 - Z_1 i_1 - Z_2 i_2 = 0$
  - malla b: $-Z_3 i_3 + Z_4 i_4 - Z_6 i_6 + Z_2 i_2 = 0$
  - malla c: $-Z_5 i_5 - e_2 + e_3 - Z_4 i_4 = 0$

- Intensidades de rama en función de las de malla
  - Ramas por las que sólo circula una corriente de rama: idéntico valor absoluto de la corriente de malla. Si coinciden en sentido, mismo signo.
    $$\begin{cases} i_1 = i_a \\ i_3 = i_6 = i_b \\ i_5 = i_c \end{cases}$$
  - Ramas por las que circulan dos, o más, corrientes de malla: corriente de rama suma algebraica de corrientes de malla.
    $$\begin{cases} i_2 = i_a - i_b \\ i_4 = i_c - i_b \end{cases}$$

MÉTODO DE INTENSIDAD DE MALLAS



$$
\begin{cases}
e_1 - Z_1 i_a - Z_2(i_a - i_b) = 0 \\
-Z_3 i_b - Z_4(i_b - i_c) - Z_6 i_b - {}_2(i_b - i_a) = 0 \\
-Z_5 i_c - e_2 + e_3 - Z_4(i_c - i_b) = 0
\end{cases}
$$

- **Forma matricial del método**
  - Ordenando las ecuaciones

$$
\begin{cases}
(Z_1+Z_2) i_a - Z_2 i_b - 0 \; i_c = e_1 \\
-Z_2 \; i_a + (Z_2+Z_3+Z_4+Z_6) i_b - Z_4 \; i_c = 0 \\
0 \; i_a - Z_4 \; i_b + (Z_4+Z_5) i_c = e_3 - e_2
\end{cases}
$$

  - Forma matricial:

$$
\boxed{\begin{pmatrix} (Z_1+Z_2) & -Z_2 & 0 \\ -Z_2 & (Z_2+Z_3+Z_4+Z_6) & -Z_4 \\ 0 & -Z_4 & (Z_4+Z_5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \\ e_3 - e_2 \end{pmatrix}}
$$

- Forma matricial:

$$\boxed{\begin{pmatrix} (Z_1+Z_2) & -Z_2 & 0 \\ -Z_2 & (Z_2+Z_3+Z_4+Z_6) & -Z_4 \\ 0 & -Z_4 & (Z_4+Z_5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \\ e_3-e_2 \end{pmatrix}}$$

  + Expresa la ley de Ohm en forma compacta:

$$\boxed{(Z^m)(i^m)=(e^m)}$$

- Significado de las matrices:

  + Vector (e^m) = vector columna, suma algebraica de ff.ee.mm. de las mallas.

  + Vector (i^m) = vector columna, intensidades de malla incógnita.

  + Matriz (Z^m) = cuadrada y simétrica, matriz de impedancias de malla.

    Z_{kk} = autoimpedancias o impedancias propias de la malla; siempre son positivas.

    $Z_{kq} = Z_{qk}$, impedancias mutuas o compartidas entre dos mallas. Signo (+), si coinciden intensidades de malla; signo (-), cuando son de sentido contrario.

Casos particulares y extensión del MIM

- Redes con bobinas acopladas.
- Redes con fuentes ideales de corriente:
  - La transformación previa de las fuentes reales de corriente es adecuada, aunque no necesaria.
  - Fuente ideal de corriente dispuesta en rama externa $\Rightarrow$ la corriente de la malla, que incluye la fuente, queda determinada por el valor de la propia fuente.
  - Fuente ideal de corriente en rama interna, es decir, compartida por dos mallas $\Rightarrow$ plantear las ecuaciones de mallas tomando como variable la tensión de la fuente de corriente $\Rightarrow$ Véase Ejemplo 4.4.
  - En este caso particular, es conveniente, para evitar errores, la escritura de las ecuaciones malla por malla, es decir, no utilizando el planteamiento matricial directo.

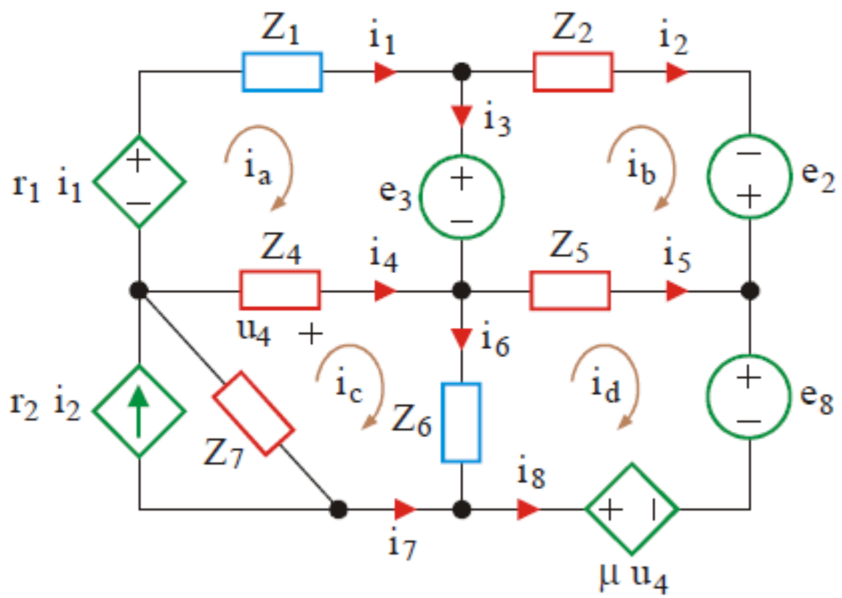
3

Fuente Dependiente de Corriente y de Tensión

Características

- Son de aplicación los métodos de análisis estudiados.
- Sin embargo, por cada fuente dependiente, debe formularse una ecuación más. Ello es debido, a que la variable de control, debe ser puesta en función de las variables del método que se esté aplicando.
- Ello da lugar, a que en el planteamiento matricial, aparecen en los segundos miembros -vector de ff.ee.mm. en el método de mallas ó vector de corrientes de fuentes en el método de nudos- variables incógnita.
- Estas incógnitas deben pasarse al primer miembro.
- La nueva reorganización matricial, origina matrices de immitancias no simétricas, dando lugar a las llamadas redes pasivas no bilaterales.

Resolver por el MIM la red de la figura con fuentes controladas o dependientes.



- **Solución**

  - Aplicando, directamente, la forma matricial del MIM:

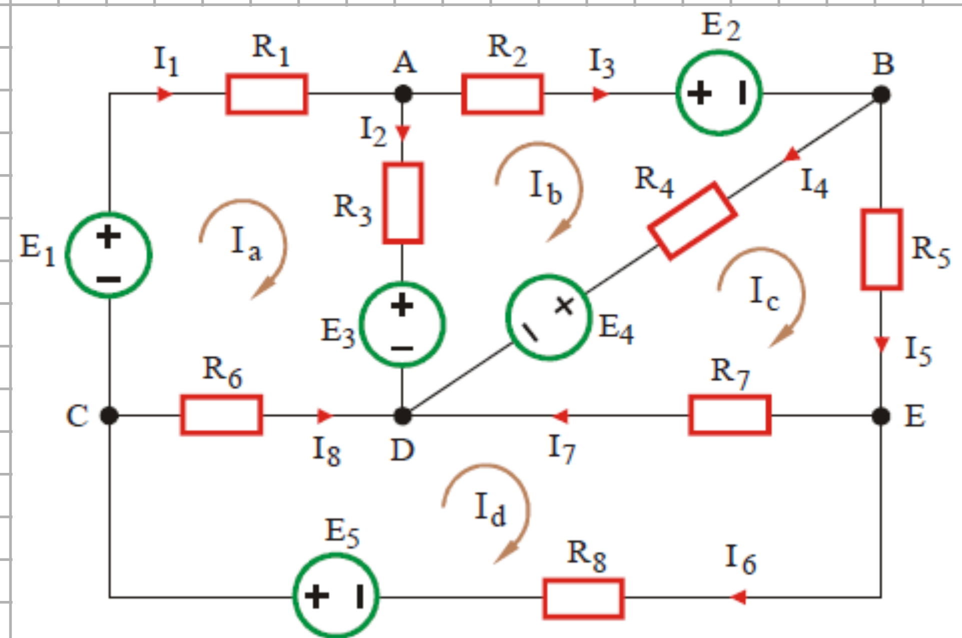
$$\begin{pmatrix} Z_1+Z_4 & 0 & -Z_4 & 0 \\ 0 & Z_2+Z_5 & 0 & -Z_5 \\ -Z_4 & 0 & Z_4+Z_6+Z_7 & -Z_6 \\ 0 & -Z_5 & -Z_6 & Z_5+Z_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1\, i_1 - e_3 \\ e_2 + e_3 \\ Z_7\, r_2\, i_2 \\ \mu\, u_4 - e_8 \end{pmatrix}$$

4

Ejemplo

EJEMPLO 1

Escribir, directamente, la forma matricial del método de intensidades de malla de la red de corriente continua de la figura.



- Forma matricial directa:

$$\begin{pmatrix} R_1+R_3+R_6 & -R_3 & 0 & -R_6 \\ -R_3 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ 0 & -R_4 & R_4+R_5+R_7 & -R_7 \\ -R_6 & 0 & -R_7 & R_6+R_7+R_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1-E_3 \\ E_3-E_4-E_2 \\ E_4 \\ E_5 \end{pmatrix}$$

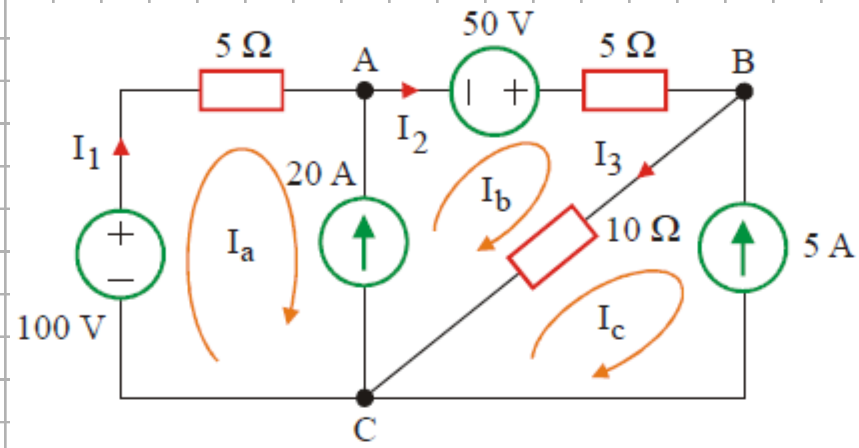
- Las intensidades de rama, resultan:

$$I_1 = I_a, \quad I_2 = I_a - I_b, \quad I_3 = I_b, \quad I_4 = I_b - I_c$$

$$I_5 = I_c, \quad I_6 = I_d, \quad I_7 = I_c - I_d, \quad I_8 = I_d - I_a$$

EJEMPLO 2

Calcular las corrientes de rama i_1 , i_2 e i_3, del circuito de corriente continua, representado en la figura, aplicando el MIM.



- <u>Ecuaciones de malla</u>: operando malla a malla,
  - <u>malla c</u>: directamente, $I_c = -5 \quad A$
  - <u>malla a</u>: $5\, I_a = 100 - U_{ac}$
  - <u>malla b</u>: $15\, I_b - 10\, I_c = 50 + U_{ac}$
- <u>Ecuación de apoyo</u>: $I_b - I_a = 20$
- Resolviendo, resulta:

$$I_a = -10\ A\ , \qquad I_b = 10\ A\ , \qquad U_{ac} = 150\ V$$

- Corrientes de rama:

$$I_1 = I_a = -10\ A\ , \quad I_2 = I_b = 10\quad A\ , \quad I_3 = I_b - I_c = 15\ A\,.$$