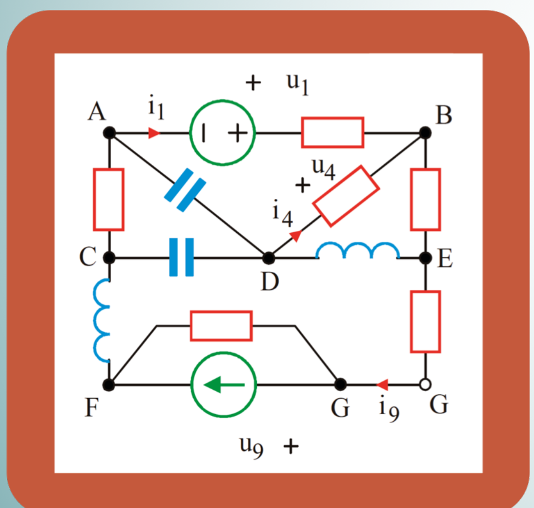
Fundamentos de Ingeniería Eléctrica

U.D. 4: Métodos de Análisis de Circuitos

Tema 4.4 - Métodos de Maxwell: Análisis por Nudos



Alberto Arroyo Gutiérrez
José Carlos Lavandero González
Sergio Bustamante Sánchez
Eugenio Sainz Ortiz
Alberto Laso Pérez
Raquel Martínez Torre
Mario Mañana Canteli

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

Este material se publica bajo la siguiente licencia:
[Creative Commons BY-NC-SA 4.0]

Grado en Ingeniería Eléctrica y Grado en Ingeniería en Electrónica Industrial y Automática

G412/G280 FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

U.D. 4: Métodos de Análisis de Circuitos

Tema 4.4 – Métodos de Maxwell: Análisis por Nudos

Tema 4.4 – Métodos de Maxwell: Análisis por Nudos

2

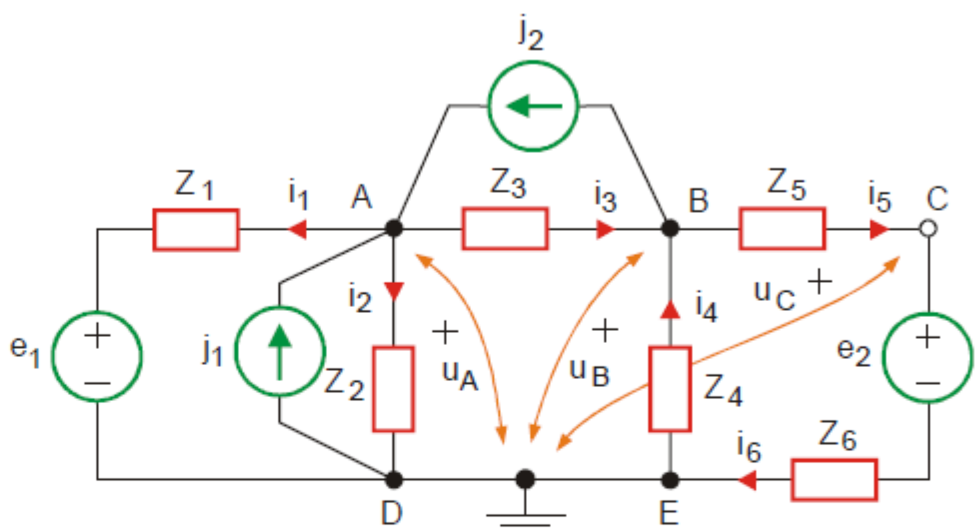
Método de Tensión de Nudos

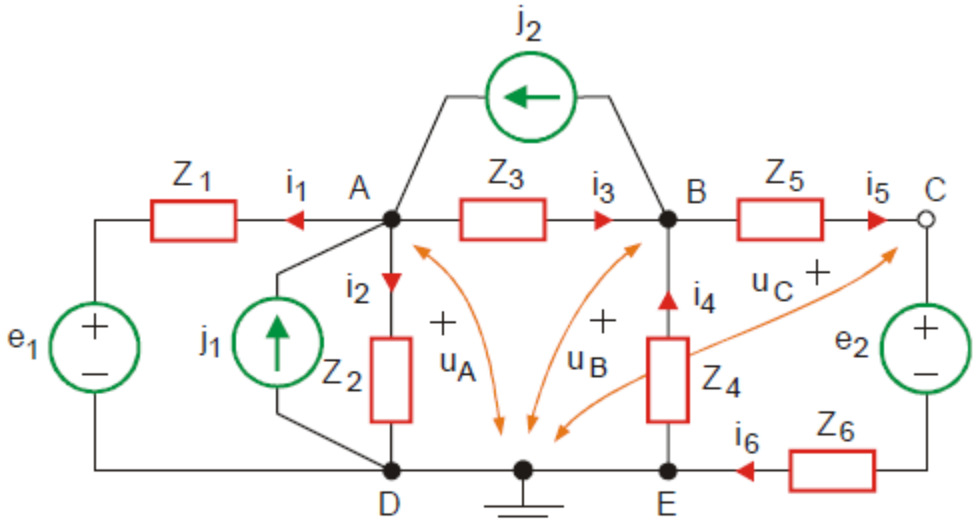
Características

- Método perteneciente al grupo de métodos nodales.
- Únicamente se plantean las ecuaciones de la PLK en los nudos.
- En una red de r ramas y $n+1$ nudos, el número de ecuaciones linealmente independientes es, n.
- Método válido para redes planas y espaciales.
- Adecuado cuando las fuentes de la red son de corriente.
- La forma matricial de las ecuaciones $\Rightarrow$ planteamiento directo del método. Salvo en los casos particulares.

Deducción del método

- Preliminares: sobre la red dada, con cuatro nudos y ocho ramas, representar:
  - Las corrientes de rama, i_1 ,..., i_6. (nombre y sentido).
  - Asignar un nudo de referencia (D y E) ⇒ potencial o tensión cero.
  - Las incógnitas, tensiones de nudo, son las d.d.p. de los diferentes nudos respecto del nudo tomado como referencia (u_A , u_B y u_C).





- Escritura ecuaciones de la PLK: en todos los nudos menos en de referencia.
  - nudo A: $i_1 + i_2 + i_3 = j_1 + j_2$
  - nudo B: $-i_3 - i_4 + i_5 = -j_2$
  - nudo C: $-i_5 + i_6 = 0$
- Intensidades de rama en función de las tensiones de nudo

$$\begin{cases} \dfrac{u_A - e_1}{Z_1} + \dfrac{u_A}{Z_2} + \dfrac{u_A - u_B}{Z_3} = j_1 + j_2 \\ -\dfrac{u_A - u_B}{Z_3} + \dfrac{u_B}{Z_4} + \dfrac{u_B - u_C}{Z_5} = -j_2 \\ -\dfrac{u_B - u_C}{Z_5} + \dfrac{u_C - e_2}{Z_6} = 0 \end{cases}$$

Forma matricial del método

- Ordenando las ecuaciones (8):

$$\begin{cases} u_A\left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}\right) & -u_B\left(\frac{1}{Z_3}\right) & 0 & = j_1+j_2+\frac{e_1}{Z_1} \\ -u_A\left(\frac{1}{Z_3}\right) & +u_B\left(\frac{1}{Z_3}+\frac{1}{Z_4}+\frac{1}{Z_5}\right) & -u_C\left(\frac{1}{Z_5}\right) & = -j_2 \\ 0 & -u_B\left(\frac{1}{Z_5}\right) & +u_C\left(\frac{1}{Z5}+\frac{1}{Z_6}\right) & = \frac{e_2}{Z_6} \end{cases}$$

- Ecuación matricial del MTN:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3} & -\frac{1}{Z_3} & 0 \\ -\frac{1}{Z_3} & \frac{1}{Z_3}+\frac{1}{Z_4}+\frac{1}{Z_5} & -\frac{1}{Z_5} \\ 0 & -\frac{1}{Z_5} & \frac{1}{Z_5}+\frac{1}{Z_6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1+j_2+\frac{e_1}{Z_1} \\ -j_2 \\ \frac{e_2}{Z_6} \end{pmatrix}}$$

+ Expresa la ley de Ohm en forma compacta:

$$\boxed{(Y^n)(u^n)=(j^n)}$$

$$\boxed{(Y^n)(u^n) = (j^n)}$$

- <u>Significado de las matrices</u>:

  + Vector (j^n) = vector columna, suma algebraica de las fuentes de corriente ideales concurrentes en el nudo. Las entrantes, positivas, las salientes, negativas. También, las fuentes de corriente procedentes de la transformación de fuentes reales de tensión.

  + Vector (u^n) = vector columna de tensiones de nudos incógnita.

  + Matriz (Y^n) = cuadrada y simétrica, matriz de admitancias de nudo de la red.

    Y_{kk} = autoadmitancia, o admitancia propia del nudo. Siempre son positivas.

    Y_{kq} = Y_{qk} = admitancias mutuas ó compartidas entre dos nudos. Siempre con signo negativo.

Ventajas del método

- Por Kirchhoff $\Rightarrow$ 8 ecuaciones.
- Por nudos $\Rightarrow$ 3 ecuaciones.
- La forma matricial posibilita su escritura directa.
- En la práctica, en general, se toma como nudo de referencia aquél en el que concurren un mayor número de ramas.

Casos particulares y extensión del método

- Admitancias en serie con fuente ideal de corriente: no deben incluirse en ninguno de los términos de la matriz de admitancias de la red.

- Método no adecuado para la resolución de redes con acoplamientos magnéticos.

- La transformación previa de las fuentes reales de tensión es adecuada, aunque no necesaria.

- Redes con fuentes ideales de tensión:

  + Coexisten en la red una, o varias, fuentes ideales de tensión, no conectadas al nudo de referencia ⇒ plantear las ecuaciones de nudos tomando como nueva variable la corriente de la fuente ideal de tensión. Véanse ejemplos 4.6 y 4.7.

  + Para evitar errores, en estos casos particulares, es conveniente, la escritura de las ecuaciones, nudo a nudo, es decir, no utilizando el planteamiento matricial directo.

3

Fuente Dependiente de Corriente y de Tensión

Características

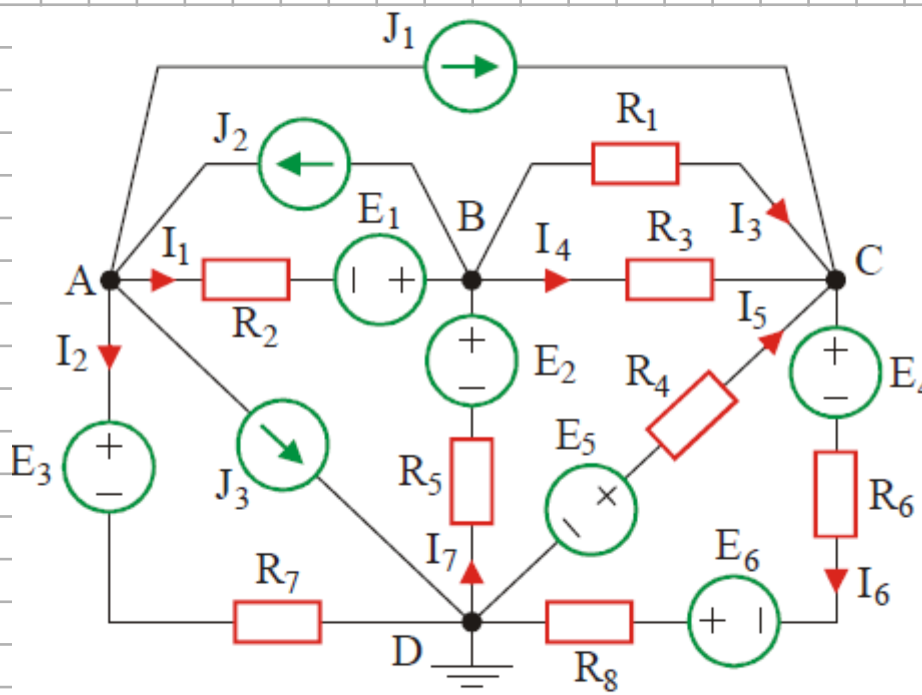
- Son de aplicación los métodos de análisis estudiados.
- Sin embargo, por cada fuente dependiente, debe formularse una ecuación más. Ello es debido, a que la variable de control, debe ser puesta en función de las variables del método que se esté aplicando.
- Ello da lugar, a que en el planteamiento matricial, aparecen en los segundos miembros -vector de ff.ee.mm. en el método de mallas ó vector de corrientes de fuentes en el método de nudos- variables incógnita.
- Estas incógnitas deben pasarse al primer miembro.
- La nueva reorganización matricial, origina matrices de immitancias no simétricas, dando lugar a las llamadas redes pasivas no bilaterales.

4

Ejemplo

EJEMPLO 1

Sobre el circuito de la figura, excitado en continua, **calcular las intensidades de rama**, aplicando el método de análisis de tensión de nudos.



- Intensidades de rama:

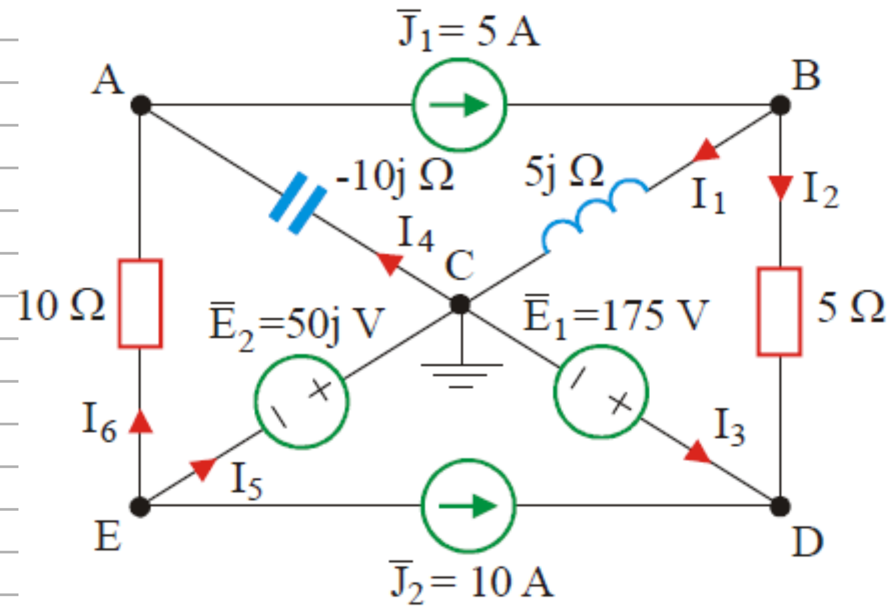
$$I_1 = \frac{U_A - U_B + E_1}{R_2}, \quad I_2 = \frac{U_A - E_3}{R_7}, \quad I_3 = \frac{U_B - U_C}{R_1},$$

$$I_4 = \frac{U_B - U_C}{R_3}, \quad I_5 = \frac{E_5 - U_C}{R_4}, \quad I_6 = \frac{U_C + E_6 - E_4}{R_6 + R_8},$$

$$I_7 = \frac{E_2 - U_B}{R_5}.$$

EJEMPLO 2

Calcular las intensidades de rama de la red de la red de corriente alterna de la figura, utilizando el método de tensión de nudos.



- Siendo el nudo C la referencia,

$$\overline{U}_D = \overline{E}_1 = 175 = 175\angle 0^\circ \ V,$$
$$\overline{U}_E = -\overline{E}_2 = -50j = 50\angle -90^\circ \ V.$$

- Aplicación el MTN a los nudos incógnita, A y B:

  + nudo A : $\overline{U}_A\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{-10j}\right)-\overline{U}_E\left(\frac{1}{10}\right)=-5$

  + nudo B : $\overline{U}_B\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5j}\right)-\overline{U}_D\left(\frac{1}{5}\right)=5$

- Resolviendo:

$$\overline{U}_A = -50 = 50\angle 180^\circ \ V,$$
$$\overline{U}_B = 100+100j = 100\sqrt{2}\angle 45^\circ \ V.$$

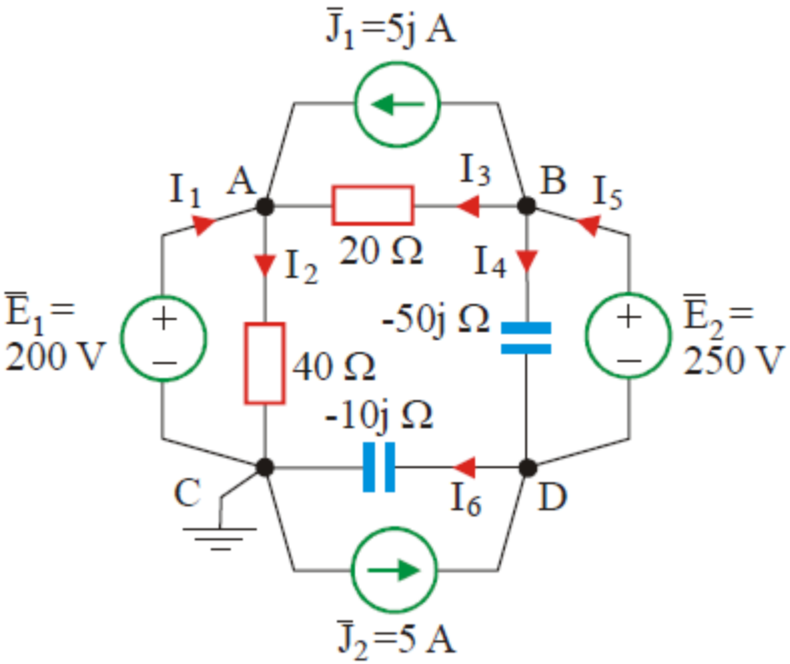
+ Intensidades de rama:

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{U}_B}{5j} = \frac{100\sqrt{2}\angle 45^\circ}{5\angle 90^\circ} = 20\sqrt{2}\angle -45^\circ \ A$$

$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{U}_B - \overline{U}_D}{5} = \frac{100+100j-175}{5} = 25\angle 126 A$$

$$\overline{I}_4 = \frac{-\overline{U}_A}{-10j} = \frac{50\angle 0^\circ}{10\angle -90^\circ} = 5\angle 90^\circ A$$

Sobre la red de corriente alterna de la figura, **calcular las intensidades de rama**, utilizando el método de tensión de nudos.



- Directamente: $\overline{U}_A = \overline{E}_1 = 200 = 200\angle 0° \;\; V$
- Aplicando el MTN (nudos B y D):
  - nudo B:

$$-\overline{U}_A\left(\frac{1}{20}\right)+\overline{U}_B\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{-50j}\right)-\overline{U}_D\left(\frac{1}{-50j}\right)=-5j+\overline{I}_5$$

  - nudo D:

$$-\overline{U}_A(0)-\overline{U}_B\left(\frac{1}{-50j}\right)+\overline{U}_D\left(\frac{1}{-10j}+\frac{1}{-50j}\right)=5-\overline{I}_5$$

- Ecuación de apoyo:

$$\overline{U}_B-U_D = \overline{E}_2 = 250 = 250\angle 0° \;\; V$$

- Resolviendo el sistema:

$$\overline{U}_B = 300 \;\; V \quad \overline{U}_D = 50 \quad \overline{I}_5 = 5\,A.$$