Tema 1: Matrices y Determinantes

Ana Casanueva Vicente

Dpto. de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación

13 de junio de 2024

Universidad de Cantabria

Un fabricante elabora dos productos en dos plantas industriales. Durante la fabricación, se producen tres contaminantes: dióxido de azufre, óxido nítrico y otras partículas en suspensión. La matriz de cantidades representa las cantidades en kilogramos de de cada contaminante (columnas) para los dos productos (filas).

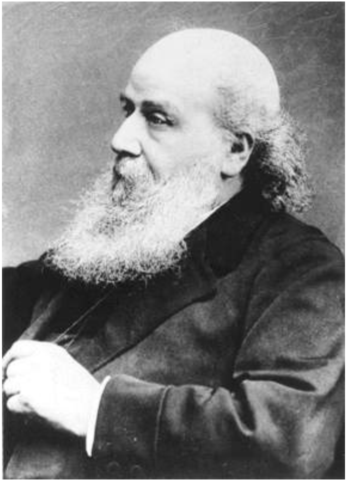
Los reglamentos nacionales exigen la eliminación de estos contaminantes. La matriz de precios da el precio diario (€) para deshacerse de cada kilogramo de contaminante (filas) en cada planta (columnas).

$$\text{Cantidades} = \begin{pmatrix} 300 & 100 & 150 \\ 200 & 250 & 400 \end{pmatrix} \qquad \text{Precios} = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 7 & 9 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$$

¿Cuánto hay que invertir para eliminar los contaminantes de cada producto en cada planta?

CONTENIDOS

“Cuadrado mágico” de la literatura china ($\sim$ 650 a.C.)



James Joseph Sylvester (1814-1897) fue el primero en introducir el término “matriz”

¿QUÉ ES UNA MATRIZ?

MATRIZ

Una matriz es una ordenación rectangular de elementos dispuestos en filas y columnas

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Una matriz A con m filas y n columnas se denota como $A_{m\times n}$ y se dice que es de **orden** $m \times n$. Su **dimensión** es igual al número de elementos que contiene: $m \times n$

Ejemplos:

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

orden 2×3, dimensión 6

```
A=[1 2 3; 4 5 6]
```

$$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

orden 3×2, dimensión 6

```
A=[1 2; 3 4; 5 6]
```

TIPOS DE MATRICES

Atendiendo a su orden:

- Matriz rectangular: $m \neq n$
- Matriz fila o vector fila: $m = 1$. Ej.: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ `a=[1 2 3]`
- Matriz columna o vector columna: $n = 1$. Ej.: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ `b=[1 2 3]'`
- Matriz **cuadrada**: $m = n$. Ej.: $A_{2\times 2} = A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ `A=[1 2; 3 4]`

Atendiendo a sus elementos:

- Matriz nula: $a_{ij} = 0, \ \forall\, i \in [1, m], j \in [1, n]$ `B=zeros(m,n)`
- Matriz real: $a_{ij} \in \mathbb{R}, \ \forall\, i \in [1, m], j \in [1, n]$
- Matriz compleja: $a_{ij} \in \mathbb{C}, \ \forall\, i \in [1, m], j \in [1, n]$

TIPOS DE MATRICES

Matrices cuadradas

- Matriz diagonal $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ en rojo: **diagonal principal**
- Matriz identidad $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ **unos** en la diagonal principal
- Matriz triangular superior $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Matriz triangular inferior $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Matriz estrictamente triangular (superior) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Matriz simétrica $a_{ij} = a_{ji}, \ \forall\, i \neq j$ $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 8 & 2 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$
- Matriz antisimétrica $a_{ij} = -a_{ji} \ \forall\, i \neq j, a_{ii} = 0$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

En las matrices cuadradas, se llama **traza** a la suma de los elementos de la diagonal principal.

Ejemplo: $tr \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 + 4 = 5$

```
trace([1 2; 3 4])
```

OPERACIONES BÁSICAS CON MATRICES

Sean A y B matrices **del mismo orden**

- A y B son iguales si y solo si $a_{ij} = b_{ij},\ \forall\, i \in [1, m], j \in [1, n]$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- $A \pm B = C \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij},\ \forall\, i \in [1, m], j \in [1, n]$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

- α escalar $\in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha A = \{\alpha a_{ij}\},\ \forall\, i \in [1, m], j \in [1, n]$

$$-4 \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -4 \\ -16 & 8 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$$

SUMA DE MATRICES

Sean $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{O} \in \mathbb{M}_{\boldsymbol{mxn}}$ (matrices de **cualquier orden**, pero todas del mismo)

Propiedades:

- Conmutativa
  $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$
- Asociativa
  $\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$
- Elemento neutro
  $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$, $\quad \boldsymbol{O}$ es la matriz cuyos elementos son todos $\mathbf{0}$ (matriz cero o matriz nula)
- Elemento opuesto
  $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$

Producto de un escalar por una matriz

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $A, B \in \mathbb{M}_{mxn}$

Propiedades:

- Conmutativa

  $\alpha A = A\alpha$

- Asociativa respecto del producto por escalares

  $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

- Distributiva respecto de la suma de matrices

  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

- Distributiva respecto de la suma de escalares

  $A(\alpha + \beta) = A\alpha + A\beta$

Ejercicio

Resolución de una ecuación matricial.

Hallar X en la ecuación $3X + A = B$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

PRODUCTO DE MATRICES

Para que dos matrices A y B se puedan multiplicar (en la forma AB), **el número de columnas de A tiene que coincidir con el de filas de B**. En estas circunstancias, se define el producto AB como otra matriz C que tiene tantas filas como A y columnas como B

$$\underbrace{(m \times n)}_{\text{orden de } A} \cdot \underbrace{(n \times p)}_{\text{orden de } B} = \underbrace{(m \times p)}_{\text{orden de } C}$$

Los elementos de C se calculan del siguiente modo:

$$AB = C = \{c_{ij}\} : c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad \forall i \in [1, m], j \in [1, p]$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot1+3\cdot(-1)+1\cdot(-2) & 2\cdot0+3\cdot2+1\cdot3 \\ 0\cdot1+(-1)\cdot(-1)+(-2)\cdot(-2) & 0\cdot0+(-1)\cdot2+(-2)\cdot3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$$

```
A=[2 3 1;0 -1 -2]
B=[1 0; -1 2;-2 3]
A*B
```

PRODUCTO DE MATRICES

Sean $A, B, C \in \mathbb{M}_{mxn}$

Propiedades (I):

- Asociativa del producto
  $A(BC) = (AB)C$
- Distributiva respecto de la suma de matrices
  $A(B + C) = AB + AC$
  $(B + C)A = BA + CA$
- El producto de matrices no siempre es conmutativo. De hecho, en general, $AB \neq BA$

  Ejemplo: Calcula AB y BA para las siguientes matrices:

  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

  Cuando dos matrices verifican que $AB = BA$, se dicen *conmutativas*.
  Si verifican que $AB = -BA$, se dicen *anticonmutativas*.

PRODUCTO DE MATRICES

Sean $A, B, C \in \mathbb{M}_{mxn}$

Propiedades (II):

- El producto de matrices tiene divisores de 0.
  En general, $AB = O \not\Leftrightarrow A = O$ y/o $B = O$

  Ejemplo: Calcula AB para las siguientes matrices:

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- El producto de matrices no verifica la propiedad de simplificación.
  En general, $AB = AC \not\Leftrightarrow B = C$

  Ejemplo: Calcula AB y AC para las siguientes matrices:

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Para la matriz identidad, $A_{m\times n} I_n = A_{m\times n} \qquad I_m A_{m\times n} = A_{m\times n}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

PRODUCTO DE MATRICES

Sean $A, B, C \in \mathbb{M}_{nxn}$ (matrices **cuadradas**)

Propiedades:

- El producto de dos matrices triangulares, ambas superiores o inferiores, es otra matriz triangular superior o inferior

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 16 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

- El producto de dos matrices diagonales es otra matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{las matrices diagonales conmutan entre sí}$$

- Para la matriz identidad, se verifica $A_n I_n = I_n A_n = A$
- Potencia de una matriz cuadrada

$$A^k = \underbrace{AA \cdots AA}_{k \text{ veces}} \qquad \text{Por convenio: } A^0 = I$$

Matriz periódica $A^k = A$ Caso particular: $A^2 = A$ matriz idempotente

MATRIZ TRASPUESTA

Dada una matriz cualquiera A, se llama **traspuesta** (A^t) a la matriz que resulta de cambiar ordenadamente las filas por las columnas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

```
A=[1 2 3; 4 5 6]
At=A'
Att=A''
```

Propiedades:

- $(A^t)^t = A$
- $(\lambda A)^t = \lambda A^t, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$
- $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$
- $(AB)^t = B^t A^t$
- A simétrica $\Leftrightarrow A = A^t$
- A antisimétrica $\Leftrightarrow -A = A^t$

EJERCICIO

Haciendo uso de las propiedades de la matriz traspuesta, demuestra que $(ABC)^t = C^t B^t A^t$ y comprueba que se cumple para las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

MATRIZ TRASPUESTA

TEOREMAS

1. Dada una matriz cuadrada A, $A + A^t$ es una matriz simétrica.
2. Dada una matriz cuadrada A, $A - A^t$ es una matriz antisimétrica.
3. Toda matriz cuadrada A se puede expresar como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.
4. Dada una matriz **cualquiera** A, AA^t y A^tA son matrices simétricas.

Ejercicio:

1. Demuestra los cuatro teoremas anteriores
2. Expresa la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica
3. Halla una matriz simétrica a partir de $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

DETERMINANTES

A toda matriz **cuadrada** A se le puede asociar un número llamado **determinante**.

El determinante de la matriz: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

viene dado por: $det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -10$

```
A=[2 3;4 1]
det(A)
```

El determinante de una matriz puede ser positivo, cero o negativo.

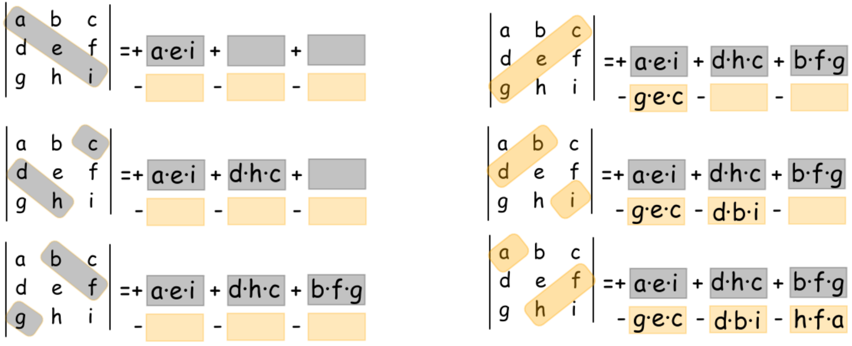
Cálculo del determinante:

Dependiendo del orden y estructura de la matriz, se emplean distintos métodos:

- Método de Sarrus
- Método de los adjuntos
- Método de los pivotes

DETERMINANTES: MÉTODO DE SARRUS

Suele emplearse para el cálculo de determinantes de orden **dos o tres**.



Ejercicio: Calcula los siguientes determinantes

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{vmatrix}$$

DETERMINANTES: MÉTODO DE LOS ADJUNTOS (O COFACTORES)

Suele emplearse para el cálculo de determinantes de orden **superior a tres**.

DEFINICIONES

Menor: Dada una matriz cuadrada A de orden n, se llama menor m_{ij} (o menor complementario) del elemento a_{ij} al determinante de orden $n-1$ que resulta de suprimir la fila i y la columna j en A.
El **cofactor o adjunto** (del elemento a_{ij}) viene dado por $A_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$
La **matriz de cofactores** de A, $cof(A)$, es la matriz que resulta de sustituir cada elemento por su cofactor A_{ij}: $cof(A) = \{A_{ij}\}$

A partir de estas definiciones se puede calcular el determinante de orden n como la **suma de los productos de los elementos de una fila o columna por sus respectivos cofactores**.

$$det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + ... + a_{1n}A_{1n}$$ por la 1ª fila de A.

$$det(A) = |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + ... + a_{n1}A_{n1}$$ por la 1ª col. de A.

DETERMINANTES: MÉTODO DE LOS ADJUNTOS (O COFACTORES)

Suele realizarse el desarrollo por la fila o columna con mayor número de ceros.

Ejemplo:

desarrollo por fila

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 2[(3)(4) - (-2)(1)] + (5)[(3)(1) - (-2)(2)]$$
$$= 2(12+2) + 5(3+4)$$
$$= 2(14) + 5(7)$$
$$= 28 + 35$$
$$= 63$$

desarrollo por columna

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (1)[(0)(1) - (-2)(2)] + (5)[(3)(1) - (-2)(2)] + 4[(3)(2) - (0)(2)]$$
$$= (1)(0+4) + 5(3+4) + 4(6-0)$$
$$= (1)(4) + 5(7) + 4(6)$$
$$= 4 + 35 + 24$$
$$= 63$$

Ejercicio: Calcula el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

Determinantes: Método de los pivotes (o método de Chio)

Teorema

Si a los elementos de una fila o columna se suman los correspondientes de otras paralelas multiplicados por un número, el valor del determinante no varía.

Basándonos en esta propiedad, podemos ir operando para obtener un determinante igual en el que todos los elementos salvo uno de una fila o columna sean nulos. A partir de ahí, se puede aplicar fácilmente el método de los adjuntos.

Ejercicio: Calcula el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Pista: Primera operación $F_3 \to F_3 - F_1$ Notación: $F_{3,1}(-1)$
Segunda operación $F_5 \to F_5 - F_1$ Notación: $F_{5,1}(-1)$

Determinantes: Operaciones elementales por filas

Operaciones elementales por filas

Sean A y B matrices cuadradas:

- Si B se obtiene de A intercambiando dos filas de A: $|B| = -|A|$
- Si B se obtiene de A sumando un múltiplo de una fila de A a otra fila de A: $|B| = |A|$
- Si B se obtiene de A multiplicando **una fila** de A por una constante $\lambda \neq 0$: $|B| = \lambda|A|$

Ejercicio:

Calcular el siguiente determinante utilizando operaciones elementales:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

DETERMINANTES: PROPIEDADES

- Si todos los elementos de una fila o columna son nulos, el determinante es nulo.
- Si hay dos filas o columnas iguales, el determinante es nulo.
- Si una fila o columna es combinación lineal de las demás, el determinante es nulo.
- El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal.
- Determinante del producto de matrices: $|AB| = |A||B|$
- Determinante de un múltiplo escalar de una matriz: $|\lambda A| = \lambda^n |A|$, donde n es el orden de la matriz A, $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$
- Determinante de la traspuesta: $|A^t| = |A|$
- Determinante de la inversa: $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$, donde A^{-1} es la matriz inversa

DETERMINANTES: APLICACIONES

- El **área de un paralelogramo** en $\mathbb{R}^2$ es igual al valor absoluto del determinante de la matriz cuyas columnas (o filas, pues $|A| = |A^t|$) son las componentes de los vectores que lo determinan.

  El área del paralelogramo definido por los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ es:

  Área= $\left| \, |\vec{u}\vec{v}| \, \right| = \left| \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right|$

  $\vec{u} = \vec{OU}$ siendo U el extremo de $\vec{u}$ y O el origen.
  $\vec{v} = \vec{OV}$ siendo V el extremo de $\vec{v}$ y O el origen.

- El **volumen de un paralelepípedo** en $\mathbb{R}^3$ es igual al valor absoluto del determinante de la matriz cuyas columnas (o filas) son las componentes de los vectores que lo determinan.

  El volumen del paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ es:

  Volumen= $\left| \, |\vec{u}\vec{v}\vec{w}| \, \right| = \left| \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \right|$

  $\vec{u} = \vec{OU}$ siendo U el extremo de $\vec{u}$.
  $\vec{v} = \vec{OV}$ siendo V el extremo de $\vec{v}$.
  $\vec{w} = \vec{OW}$ siendo W el extremo de $\vec{w}$.

Si se tomara el origen en A y los vértices adyacentes en U y V (W), usaríamos:

$$\vec{u} = \vec{AU} \qquad \vec{v} = \vec{AV} \qquad \vec{w} = \vec{AW}$$

MATRIZ INVERSA

Dada una **matriz cuadrada** A, decimos que tiene inversa A^{-1} si

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I}$$

En ese caso decimos que A es invertible, regular, no singular.

Propiedades:

- Si A es una matriz invertible, su inversa es única.
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- Propiedades de cancelación. Sea C una matriz invertible:
  - Si $AC = BC$, entonces $A = B$
  - Si $CA = CB$, entonces $A = B$

EJERCICIO

Demostrar que si A, B y C son matrices cuadradas y $ABC = I$, entonces B es invertible y $B^{-1} = CA$.

Cálculo de la matriz inversa

Definición

Matriz adjunta: Dada una matriz cualquiera A, se llama adjunta $adj(A)$ a la matriz traspuesta de la matriz de cofactores: $adj(A) = (cof(A))^t$

Nota: $(cof(A))^t = cof(A^t)$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow cof(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -12 \\ 0 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & 0 \\ -12 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

A partir de la matriz adjunta se calcula la inversa como:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}}$$

A **tiene inversa sii** $|A| \neq 0$

```
A=[1 0 2; 0 3 0; 4 0 5]
inv(A)
```

EJERCICIO

Ejercicio:
Calcula la inversa de la siguiente matriz y comprueba el resultado:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

Matrices ortogonales

Una matriz cuadrada A es ortogonal si:

$$\boxed{AA^t = A^t A = I}$$

Ejemplo: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Propiedades:

- La inversa de una matriz ortogonal es su traspuesta $\boxed{A^t = A^{-1}}$ y es ortogonal también.
- El determinante de una matriz ortogonal es 1 o -1.
- El producto de matrices ortogonales es ortogonal.

Ejercicio: Demuestra las tres propiedades anteriores.

Matrices elementales

Se llama **matriz elemental** a una matriz cuadrada que resulta de efectuar una **operación elemental** sobre una fila o columna en la matriz identidad.

Operaciones elementales

- Cambiar entre sí dos filas o columnas.
- Multiplicar una fila o columna por un número real $k \neq 0$.
- Sumar a una fila o columna, otra fila o columna multiplicada por un número real $k \neq 0$.

Ejemplos de matrices elementales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{1,2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3,2}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Representaremos las matrices elementales con la letra E.

MATRICES ELEMENTALES

OPERACIONES ELEMENTALES INVERSAS

Son aquellas que anulan la acción de una operación elemental.

Operación elemental	**Operación elemental inversa**
Cambiar la fila i por la j	Cambiar la fila j por la i
Multiplicar una fila por $k \neq 0$	Multiplicar una fila por $\frac{1}{k}, k \neq 0$
Sumar a la fila i, la j mutiplicada por $k \neq 0$	Sumar a la fila i, la j mutiplicada por $-k \neq 0$

Ejemplos:

$$I = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{1,3}} \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&1&0\\1&0&0 \end{pmatrix} = E$$

$$E = \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&1&0\\1&0&0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3,1}} \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} = I$$

$$I = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2(2)} \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&2&0\\0&0&1 \end{pmatrix} = E$$

$$E = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&2&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} = I$$

$$I = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{2,3}(-3)} \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&-3\\0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&-3\\0&0&1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{2,3}(3)} \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$$

Matrices elementales

Teorema

Cuando aplicamos una *operación elemental* sobre I, obtenemos una matriz elemental E. Cuando aplicamos una *operación elemental inversa* sobre I, obtenemos la inversa de E, es decir, E^{-1} . Por tanto, toda matriz elemental E tiene inversa, que es también una matriz elemental.

Ejercicio:

Dadas las matrices elementales 3×3 que se obtienen de realizar las operaciones elementales $F_{1,3}$, $F_2(2)$ y $F_{2,3}(-3)$, halla sus matrices inversas.

MATRICES ELEMENTALES

TEOREMA

Si en una matriz A efectuamos una operación elemental **por filas**, la matriz que obtenemos es EA, donde E es la matriz elemental resultante de efectuar la misma operación elemental (sobre la matriz identidad).

Ejemplo:

Partimos de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{2,1}(-2)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{2,1}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRICES ELEMENTALES

Ejercicio:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

- halla las matrices elementales tales que $E_2 E_1 A = I$
- halla las matrices elementales inversas de E_1 y E_2
- escribe A como producto de matrices elementales.
- escribe A^{-1} como producto de matrices elementales.

MATRICES EQUIVALENTES

TEOREMA

Si partiendo de una matriz A podemos llegar a otra B mediante operaciones elementales (por filas) y también podemos volver a A desde B realizando las operaciones elementales inversas en orden inverso, A y B son equivalentes (por filas).

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = B \Leftrightarrow A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1} B$$

Ejercicio:

Demuestra que las matrices A y B son equivalentes por filas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Pista: Aplícale a A las operaciones elementales $F_{1,2}$ y $F_{3,1}(-1)$

Cálculo de la inversa mediante matrices elementales

Teorema

Si una matriz cuadrada A es equivalente (por filas) a I, entonces existe A^{-1}.
Las operaciones elementales que nos sirven para convertir una matriz cuadrada A en I, efectuadas sobre I, nos dan A^{-1}.

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = I_n \Rightarrow E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 I_n = A^{-1}$$

Método de Gauss-Jordan $\boxed{(A \mid I) \rightarrow \rightarrow \rightarrow \ldots \rightarrow \rightarrow \rightarrow (I \mid A^{-1})}$ operaciones elementales por filas

Ejercicio:
Calcula, mediante operaciones elementales, la inversa de la siguiente matriz y comprueba el resultado.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Procedimiento: Comienza formando la matriz $(A|I)$, en este caso $\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. A partir de ahí, aplica las operaciones elementales necesarias (en este caso, $F_1(-1)$, $F_{3,1}(-1)$, $F_{3,2}(-1)$, $F_3(\frac{1}{2})$, $F_{1,3}(1)$, $F_{1,2}(1)$). Acabarás llegando a la matriz $(I|A^{-1})$

FORMAS ESCALONADA Y REDUCIDA DE UNA MATRIZ

FORMA ESCALONADA

Se llama forma **escalonada** por filas de una matriz A a la matriz que se obtiene a partir de A mediante operaciones elementales y que verifica:

- Si tiene filas cuyos elementos son todos nulos, están en las filas inferiores.
- El primer elemento distinto de cero de una fila (empezando por la izquierda) se llama **pivote**, y a su columna, **columna pivotal**.
- Dadas dos filas sucesivas, el pivote de la segunda fila está más a la derecha que el de la primera.

Ejercicio: Di si son formas escalonadas o no las siguientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

FORMAS ESCALONADA Y REDUCIDA DE UNA MATRIZ

En la práctica, para obtener la forma escalonada de una matriz se utiliza la **eliminación gaussiana simple**:

1. Empezando por la izquierda, buscamos en la primera columna un elemento distinto de cero, que llevaremos a la primera fila. Este elemento será el primer pivote. A continuación, mediante operaciones elementales, haremos ceros por debajo de él.
2. Buscamos en la segunda columna un elemento distinto de cero en la segunda o demás filas inferiores. Operamos hasta tener un segundo pivote en la segunda fila, y hacemos ceros por debajo de él.
3. Seguimos recorriendo el resto de columnas hacia la derecha hasta no encontrar más pivotes.

Ejercicio: Halla la forma escalonada de la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Pista: Puedes aplicar, en este orden, las operaciones elementales $F_{2,1}(-1)$, $F_{3,1}(-2)$, $F_{4,1}(-1)$, $F_{4,2}$, $F_{4,3}(-1)$

Formas escalonada y reducida de una matriz

Forma reducida

Se llama forma escalonada **reducida** (o simplemente reducida) por filas de la matriz A a toda matriz escalonada obtenida mediante operaciones elementales por filas sobre A en la que los pivotes son 1 y los demás elementos de la columna pivotal son nulos.
El proceso de obtener la forma reducida a partir de la forma escalonada se le denomina **eliminación de Gauss-Jordan**.

Ejercicio: Di si son formas escalonadas *reducidas* o no las siguientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Nota: Dependiento del orden de actuación y las operaciones realizadas sobre la matriz original, se pueden obtener diferentes formas escalonadas (de hecho, infinitas). Sin embargo, **la forma reducida es única**.

```
A=[1 2 1 2 1 0; 1 2 4 -1 4 3;2 4 5 1 5 -2;1 3 1 2 6 0]
rref(A) %rref: reduced row echelon form
```

Rango

Definición

El **rango** de una matriz es el número de filas con algún elemento distinto de cero que hay en cualquier forma escalonada por filas, o, lo que es lo mismo, el *número de columnas pivotales*. Como veremos más adelante, esta definición equivale a decir que el rango de una matriz es el número de filas (o columnas) que son linealmente independientes.

También se puede obtener el rango como el orden de la mayor submatriz cuyo determinante sea distinto de cero.

Ejercicio: ¿Cuál es el rango de las siguientes matrices?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

```
A=[1 -1; 0 3]
rank(A)
```

FACTORIZACIÓN LU

TEOREMA

Dada una matriz **invertible** A, se puede encontrar mediante la aplicación de la tercera de las operaciones elementales que hemos visto (*quedarían excluídas el intercambio de filas y la multiplicación de una fila por un escalar*) una factorización de la forma $\boxed{A = LU}$, donde L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y U es una matriz triangular superior, en la que la primera fila coincide con la primera fila de A

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{pmatrix}$$

La factorización LU es *única*. Es útil para el cálculo de determinantes e inversas de matrices grandes, así como para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (lo veremos más adelante)

Sabemos que, a partir de A, se puede llegar a una matriz **escalonada** U aplicando operaciones elementales, por lo que:

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = U \Rightarrow A = \underbrace{(E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1)^{-1}}_{L = E_1^{-1} E_1^{-2} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}} U$$

El problema se reduce, por tanto, al cálculo de una serie de matrices elementales (y sus inversas).

FACTORIZACIÓN LU

Sin embargo, en la práctica no hace falta calcular estas matrices, sino que se emplea el algoritmo de los *multiplicadores cambiados de signo*, que se ilustra a continuación.

Ejemplo: Halla la factorización LU de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & 4 \\ -6 & -3 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & 4 \\ -6 & -3 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{2,1}(2)} \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -6 & -3 & -14 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ ? & ? & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -6 & -3 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3,1}(-3)} \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -15 & -11 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & ? & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -15 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3,2}(5)} \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = U \quad \Rightarrow \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & 4 \\ -6 & -3 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = LU$

Factorización LU

Hay matrices que no se pueden factorizar mediante el método que acabamos de ver. Bastaría por ejemplo que una cierta matriz A tuviera un 0 en el elmento $a_{1,1}$, puesto que en ese caso necesitaríamos intercambiar filas. Para solventar este tipo de situaciones se cuenta con una generalización de la factorización $A = LU$ que, introduciendo una nueva matriz de permutaciones P, permite llegar a una factorización del tipo $\boxed{PA = LU}$. Inicialmente, P es la matriz identidad.

Ejemplo: Halla la factorización $PA = LU$ de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -6 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -6 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{1,3}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 \\ ? & ? & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{2,1}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ ? & ? & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, $PA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -6 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = LU$

```
A=[0 0 2;3 5 -6;1 4 -2]; [L, U, P]= lu(A)
```

Factorización de Cholesky

Teorema

Dada una matriz real A, **simétrica** y **definida positiva***, se puede encontrar otra matriz triangular inferior L tal que $\boxed{A = LL^t}$

**Criterio de Sylvester*: Una matriz simétrica se dice definida positiva cuando todos sus menores principales (incluyendo su propio determinante) son positivos.

Ejemplo: Halla la factorización de Cholesky de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

Se trata de buscar una matriz $L = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} \end{pmatrix}$ tal que

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{1,1} & l_{2,1} \\ 0 & l_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1}^2 & l_{1,1}l_{2,1} \\ l_{2,1}l_{1,1} & l_{2,1}^2 + l_{2,2}^2 \end{pmatrix}$. La factorización de Cholesky no es única. En este caso, una de las soluciones posibles que obtendríamos igualando términos sería $\{l_{1,1} = 1, l_{2,1} = 2, l_{2,2} = \pm 2\}$ Se puede comprobar, por ejemplo, que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{L^t}$. Otra opción igualmente válida sería $\{l_{1,1} = -1, l_{2,1} = -2, l_{2,2} = \pm 2\}$

Al igual que la factorización LU, la factorización de Cholesky resulta útil para el cálculo de determinantes, inversas y para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

```
A=[1 2;2 8]; L = chol(A, 'lower')
```

RECORDAMOS

Un fabricante elabora dos productos en dos plantas industriales. Durante la fabricación, se producen tres contaminantes: dióxido de azufre, óxido nítrico y otras partículas en suspensión. La matriz de cantidades representa las cantidades en kilogramos de de cada contaminante (columnas) para los dos productos (filas). Los reglamentos nacionales exigen la eliminación de estos contaminantes. La matriz de precios da el precio diario (€) para deshacerse de cada kilogramo de contaminante (filas) en cada planta (columnas).

$$\text{Cantidades} = \begin{pmatrix} 300 & 100 & 150 \\ 200 & 250 & 400 \end{pmatrix} \qquad \text{Precios} = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 7 & 9 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$$

¿Cuánto hay que invertir para eliminar los contaminantes de cada producto en cada planta?

El producto de la matriz Cantidades (orden 2×3) por la de Precios (orden 3×2) nos da una matriz cuadrada de orden 2 que representa el precio que costaría eliminar los contaminante en la fabricación de cada producto y cada planta de fabricación.