Tema 2: Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ana Casanueva Vicente

Dpto. de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación

13 de junio de 2024

Se tiene una muestra de mineral que contiene tres elementos químicos: oro (Au), plata (Ag) y cobre (Cu) y se desea determinar las concentraciones de estos elementos en la muestra utilizando análisis químicos. Para ello, se realizan tres pruebas químicas separadas para medir la concentración de cada elemento:

- *En la primera prueba, se encuentra que la concentración de oro es el doble de la concentración de plata.*
- *En la segunda prueba, se encuentra que la concentración de cobre es tres veces la concentración de oro.*
- *En la tercera prueba, se encuentra que la concentración total de los tres elementos es 100 partes por millón (ppm).*

¿Cuál es la cantidad en ppm de cada elemento?

Sistema de ecuaciones en la matemática babilónica ($\sim$ 1000 a.C.)

Eugène Rouché (1832-1910) enunció un importante Teorema junto con Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917)

Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de m **ecuaciones lineales** con n variables $x_1, x_2, ..., x_n$ tiene la forma:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \cdots\cdots + \cdots\cdots + \cdots + \cdots\cdots & = & \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

a_{ij} coeficientes, b_i términos independientes $\in \mathbb{R}$

Si todos los términos independientes son nulos, el sistema es **homogéneo**, en caso contrario se dice que es **no homogéneo** o **completo**.

Solución del sistema: conjunto de valores $x_1, x_2, \cdots, x_n$ con $x_i \in \mathbb{R}$ que satisfacen simultáneamente las ecuaciones.

Ejemplo:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x + y & = & 3 \\ x - y & = & -1 \end{array} \right.$$

Solución: $(x, y) = (1, 2)$

Ejemplo: ¿Son lineales los siguientes sistemas?

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3x + 2y - 5z & = & -4 \\ -x - 2y + 5z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{r} x - y + 2z = 0 \\ 3x + y - 3z = 0 \\ -2x + 3y - 4z = 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3x - ln(y) & = & 1 \\ -2x + 4e^{y} & = & -2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{r} 2x - y + 3z = 2 \\ -3x + \frac{2}{y} - z = 1 \\ y + 2z = 4 \end{array}\right.$$

TIPOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES SEGÚN SU SOLUCIÓN

TEOREMA

Cualquier sistema de ecuaciones lineales tiene: i) una única solución, ii) ninguna solución o iii) un número infinito de soluciones.

- Incompatible: no tiene solución.

  Ejemplo: $$\begin{cases} x + 2y - 3z &= -1 \\ 3x - y + 2z &= 7 \\ 5x + 3y - 4z &= 2 \end{cases}$$

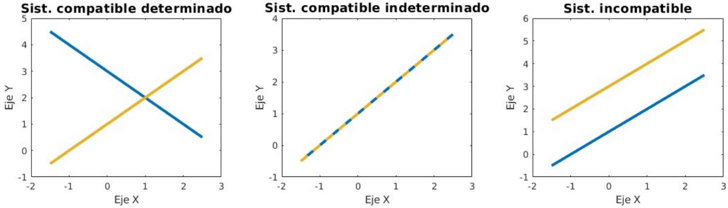
- Compatible
  - Determinado: solución única.
  - Indeterminado: número infinito de soluciones.

    Ejemplo: $$\begin{cases} x + 2y - 3z &= -1 \\ 2x + 5y - 8z &= 4 \\ 3x + 8y - 13z &= 7 \end{cases}$$

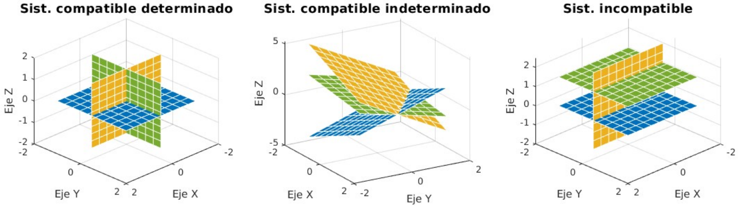
Nota: Todo sistema lineal homógeneo es compatible, ya que tiene, como mínimo, la solución trivial $\{x_1, x_2, ..., x_n\} = \vec{0}$

TIPOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES SEGÚN SU SOLUCIÓN

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = & b_3 \end{cases}$$



SISTEMAS EN FORMA MATRICIAL

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A: matriz de coeficientes, $\vec{x}$: vector de incógnitas, $\vec{b}$: vector de términos independientes

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Toda matriz representa un sistema lineal y todo sistema lineal se puede representar por su matriz ampliada: $A^* = (A \mid \vec{b})$

Soluciones de un sistema

Teorema de Rouché-Fröbenius

Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, la condición necesaria y suficiente para que sea compatible (tenga solución) es que $rg(A) = rg(A^*)$.

- $rg(A) \neq rg(A^*) \Rightarrow$ Incompatible
- $rg(A) = rg(A^*) \Rightarrow$ Compatible
  - Determinado si $rg(A) = rg(A^*) = n$
    En la forma escalonada tenemos n ecuaciones, cada una con su pivote, que nos permiten despejar las n incógnitas.
  - Indeterminado si $rg(A) = rg(A^*) < n$
    El número de ecuaciones en la forma escalonada, es decir, el número de ecuaciones con pivote, es insuficiente para despejar las n incógnitas, por lo que existen parámetros libres.
    - $rg(A)$: número de incógnitas principales
    - $n - rg(A)$: número de parámetros libres

SISTEMAS EQUIVALENTES

Dos sistemas lineales con las mimas incógnitas son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución.

Nota: Para que dos sistemas sean equivalentes, no es necesario que tengan el mismo número de ecuaciones.

TEOREMA

A partir de un sistema lineal cualquiera se puede obtener otro sistema equivalente efectuando *operaciones elementales*.

Operación elemental en una matriz	**Operación elemental en un sistema**
Intercambiar dos filas	Intercambiar dos ecuaciones
Multiplicar una fila por $k \neq 0$	Multiplicar una ecuación por $k \neq 0$
Sumar a una fila, otra fila multiplicada por $k \neq 0$	Sumar a una ecuación, otra ecuación multiplicada por $k \neq 0$

EJEMPLOS

Dado el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 2y & = & 6 \\ -x + y & = & 4 \end{array} \right.$$

Son sistemas equivalentes:

$$F_{1,2} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} -x + y & = & 4 \\ 2x + 2y & = & 6 \end{array} \right.$$

$$F_1(1/2) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 3 \\ -x + y & = & 4 \end{array} \right.$$

$$F_{2,1}(1/2) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 2y & = & 6 \\ 2y & = & 7 \end{array} \right.$$

ELIMINACIÓN GAUSSIANA

Consiste en convertir un sistema lineal a la forma triangular o casi triangular para después resolver con la sustitución hacia atrás, es decir, se basa en la transformación de A^* a una forma **escalonada**.

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} x - y &= 3 \\ 2x + y &= 3 \end{cases}$$

ELIMINACIÓN GAUSSIANA

Consiste en convertir un sistema lineal a la forma triangular o casi triangular para después resolver con la sustitución hacia atrás, es decir, se basa en la transformación de A^* a una forma **escalonada**.

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} x - y &= 3 \\ 2x + y &= 3 \end{cases}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{2,1}(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x &= 3 + y \\ 3y &= -3 \end{cases}$$

Solución: $(x, y) = (2, -1)$

Sistema compatible determinado

$rg(A) = rg(A^*) = 2 = n$

```
A=[1 -1;2 1]
b=[3 3]'
linsolve(A,b) % Forma 1
A\b % Forma 2 (matrix left division)
```

EJEMPLOS

Ejemplo 2:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y & = & 3 \\ 2x + y & = & 3 \\ 2x + y & = & 4 \end{array}\right.$$

EJEMPLOS

Ejemplo 2:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y & = & 3 \\ 2x + y & = & 3 \\ 2x + y & = & 4 \end{array}\right.$$

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{3,1}(-2)]{F_{2,1}(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{3,2}(-1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

No tiene solución

Sistema incompatible

$$rg(A) = 2 \neq rg(A^*) = 3$$

Ejemplos

Ejemplo 3:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y + z & = & 3 \\ 2x + y + 2z & = & 3 \end{array}\right.$$

EJEMPLOS

Ejemplo 3:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 3 \\ 2x+y+2z & = & 3 \end{array}\right.$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{2,1}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Sistema con más variables (3) que ecuaciones (2), por tanto habrá un parámetro libre

Sistema compatible indeterminado

$$rg(A) = rg(A^*) = 2 < n = 3$$

Convenio: tomar como incógnitas principales las correspondientes a las columnas pivotales (x, y) y como parámetros libres las correspondientes a las columnas no pivotales (z)

$$\left\{\begin{array}{rcl} z & = & \alpha \\ y & = & -1 \\ x & = & 3+y-z \quad = \quad 2-\alpha \end{array}\right.$$

```
A=[1 -1 1;2 1 2]; b=[3 3]'
rref([A,b])
```

Solución (en forma vectorial paramétrica):

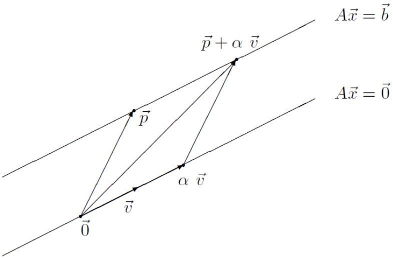
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\alpha \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

o también:

$$(x, y, z) = (2-\alpha, -1, \alpha) \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LA SOLUCIÓN

Para cualquier sistema compatible, la solución del sistema lineal no homogéneo es la suma de un vector constante no nulo $\vec{p}$, que es una solución particular del sistema no homogéneo $A\vec{x} = \vec{b}$, y una parte paramétrica, que es precisamente la solución del correspondiente sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$.



En $\mathbb{R}^3$ con un parámetro libre α, la solución de $A\vec{x} = \vec{b}$ es igual a la recta solución de $A\vec{x} = \vec{0}$, $\alpha\vec{v}$, trasladada por el vector $\vec{p}$, siendo $\vec{p}$ cualquier solución particular de $A\vec{x} = \vec{b}$. No hay ninguna solución común a ambos.

$$\vec{x} = \vec{p} + \alpha\vec{v}$$

Sol. particular SLNH ↙ ↘ Sol. general SLH

```
syms x y z; X=[x y z].' % vector de incógnitas en simbólico
[solX solY]=solve(A*X==b, x, y) % x,y pivotales
SG=[solX solY z]
```

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

Consiste en convertir cualquier sistemas en otro cuya matriz ampliada A^* sea una matriz escalonada **reducida** por filas.

La forma reducida es la matriz escalonada con pivotes unidad y los demás elementos de la columna del pivote nulos.

Ejemplo:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 4x+16y+64z & = & 100 \\ 2x+4y+8z & = & 6 \\ x+y+z & = & -2 \end{array}\right.$$

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

Consiste en convertir cualquier sistemas en otro cuya matriz ampliada A^* sea una matriz escalonada **reducida** por filas.

La forma reducida es la matriz escalonada con pivotes unidad y los demás elementos de la columna del pivote nulos.

Ejemplo:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 4x+16y+64z &=& 100\\ 2x+4y+8z &=& 6\\ x+y+z &=& -2\end{array}\right.$$

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 16 & 64 & 100\\ 2 & 4 & 8 & 6\\ 1 & 1 & 1 & -2\end{array}\right)\xrightarrow[F_2(1/2)]{F_1(1/4)}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 16 & 25\\ 1 & 2 & 4 & 3\\ 1 & 1 & 1 & -2\end{array}\right)\xrightarrow[F_{3,1}(-1)]{F_{2,1}(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 16 & 25\\ 0 & -2 & -12 & -22\\ 0 & -3 & -15 & -27\end{array}\right)\xrightarrow{F_2(1/2)}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 16 & 25\\ 0 & -1 & -6 & -11\\ 0 & -3 & -15 & -27\end{array}\right)\xrightarrow{F_{3,2}(-3)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -1 & -6 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3(1/3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -1 & -6 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{2,3}(6)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{1,3}(-16)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2(-1)]{F_{1,2}(4)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Solución: $(x, y, z) = (-3, -1, 2)$

Sistema compatible determinado

$rg(A) = rg(A^*) = n = 3$

SISTEMAS CON MÚLTIPLES VALORES DE $\vec{b}$ EN $A\vec{x} = \vec{b}$

Se puede resolver un sistema para dos valores de $\vec{b}$ ($\vec{b_1}$ y $\vec{b_2}$) aplicando la eliminación gaussiana sobre una matriz ampliada con dos columnas a la derecha, operando de manera independiente para cada $\vec{b}$.

Ejemplo:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 4 & 7 & 7 \\ 1 & 7 & 8 & 8 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{3,1}(-1)]{F_{2,1}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{3,2}(-4)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{2,3}(1)]{F_{1,3}(1)} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3(-1/2)]{F_{1,2}(-3)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 11 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

Solución:

$\vec{x}_1 = (11, -5, 4)$

$\vec{x}_2 = (7, -2, 2)$

Resolución de sistemas utilizando la inversa

Teorema

Sea A una matriz cuadrada e invertible de orden *n*, entonces el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ es compatible determinado para cualquier $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.
La solución del sistema se obtiene como: $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Ejemplo: Resuelve el sistema lineal con matriz ampliada A^*:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

```
A=[1 3 0;1 0 -2;0 -2 2]
b=[1 2 3]'
inv(A)*b
```

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 & -1/5 \\ 1/5 & -1/5 & 3/10 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 & -1/5 \\ 1/5 & -1/5 & 3/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 34 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

MÉTODO DE CRAMER

Consideremos el sistema compatible determinado $A\vec{x} = \vec{b}$, con A invertible de orden *n*, la solución única puede obtenerse como:

$$x_i = \frac{|\ A_i\ |}{|\ A\ |}$$

donde A_i son los cofactores de la columna *i*:

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

EJEMPLO

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-2y+z &=& 0\\ 2y-8z &=& 8\\ -4x+5y+9z &=& -9 \end{array}\right.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -8\\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2 \qquad |A_x| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1\\ 8 & 2 & -8\\ -9 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 58$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 8 & -8\\ -4 & -9 & 9 \end{vmatrix} = 32 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 8\\ -4 & 5 & -9 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{58}{2} = 29$$
$$y = \frac{32}{2} = 16$$
$$z = \frac{6}{2} = 3$$

Solución: $(x, y, z) = (29, 16, 3)$

MÉTODO DE LA FACTORIZACIÓN LU

Si la matriz A de un sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$ es *invertible* y factorizable en la forma $A = LU$, podemos utilizar las matrices triangulares L y U para resolverlo fácilmente.

Ejemplo: Utiliza la factorización LU para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + 4y - 4z = 12 \\ x - 4y + 3z = -21 \\ -6x - 9y + 10z = -24 \end{cases}$$

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \\ -6 & -9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -21 \\ -24 \end{pmatrix}$$

Aplicando las operaciones elementales $F_{2,1}(-\frac{1}{2})$, $F_{3,1}(3)$ y $F_{3,2}(\frac{1}{2})$ sobre A podemos factorizarla en la forma LU, con:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -3 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

```
A=[2 4 -4; 1 -4 3; -6 -9 10]; b =[12 -21 -24]';
[L, U, P]= lu(A)
```

A partir de esta factorización, podemos desdoblar el sistema original en dos:

$$\left.\begin{array}{r} A\vec{x} = \vec{b} \\ A = LU \end{array}\right\} \Rightarrow LU\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} L\vec{y} = \vec{b} \\ U\vec{x} = \vec{y} \end{array}\right\}$$

Estos dos nuevos sistemas son triangulares y en consecuencia se resuelven muy fácilmente:

$$L\vec{y} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -3 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -21 \\ -24 \end{pmatrix}$$

$$a = 12;\ b = -27;\ c = -3/2$$

$$U\vec{x} = \vec{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -27 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

Solución: $\{x = -4, y = 2, z = -3\}$

```
y = inv(P)*L\b
x = U\y
```

MÉTODO DE LA FACTORIZACIÓN DE CHOLESKY

Si la matriz A de un sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$ es *simétrica* y *definida positiva* se puede factorizar en la forma $A = LL^t$, donde los elementos de la matriz triangular inferior L pueden obtenerse de acuerdo a las siguientes fórmulas:

$$\begin{cases} l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right), i > j \\ l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2} \end{cases}$$

Una vez hallada L, desdoblaríamos el sistema original en dos

$$\left. \begin{array}{r} A\vec{x} = \vec{b} \\ A = LL^t \end{array} \right\} \Rightarrow LL^t\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} L\vec{y} = \vec{b} \\ L^t\vec{x} = \vec{y} \end{array} \right\}$$

Estos dos nuevos sistemas son triangulares

Ejemplo: Utiliza la factorización de Cholesky para resolver el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 4x+2y+z & = & 2 \\ 2x+2y & = & -3 \\ x+3z & = & 5 \end{array}\right.$$

$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, que es simétrica y definida positiva. Por tanto, podríamos buscar una matriz $L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$ tal que $A = LL^t$. Aplicando las fórmulas, tendríamos:

$l_{21} = \frac{1}{2}(2) = 1$; $l_{31} = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$; $l_{32} = \frac{1}{1}(0 - 2 \cdot 1) = -\frac{1}{2}$; $l_{11} = \sqrt{4} = 2$;

$l_{22} = \sqrt{2 - 1^2} = 1$; $l_{33} = \sqrt{3 - \left(\frac{1}{2}^2 + \frac{1}{2}^2\right)} = \sqrt{\frac{5}{2}}$. Por tanto,

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{pmatrix}$$

Ya podríamos construir dos sistemas triangulares cuya resolución es casi inmediata:

$$L\vec{y} = \vec{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$a = 1;\ b = -4;\ c = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$L^t\vec{x} = \vec{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ \sqrt{\frac{5}{2}} \end{pmatrix}$$

Solución: $\left\{x = 2, y = -\frac{7}{2}, z = 1\right\}$

```
A=[4 2 1; 2 2 0; 1 0 3]; b=[2 -3 5]';
L = chol(A, 'lower')
y = L\b
x = L'\y
```

RECORDAMOS

Se tiene una muestra de mineral que contiene tres elementos químicos: oro (Au), plata (Ag) y cobre (Cu) y se desea determinar las concentraciones de estos elementos en la muestra utilizando análisis químicos.

- *En la primera prueba, se encuentra que la concentración de oro es el doble de la concentración de plata.*
- *En la segunda prueba, se encuentra que la concentración de cobre es tres veces la concentración de oro.*
- *En la tercera prueba, se encuentra que la concentración total de los tres elementos es 100 partes por millón (ppm).*

¿Cuál es la cantidad en ppm de cada elemento?

Se puede obtener la concentración de cada elemento resolviendo el sistema (x, y, z, para Au, Ag, Cu, respectivamente):

$$\begin{cases} \begin{aligned} x &= 2y \\ z &= 3x \\ x + y + z &= 100 \end{aligned} \end{cases}$$