TEMA 3: ESPACIOS VECTORIALES

Ana Casanueva Vicente

Dpto. de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación

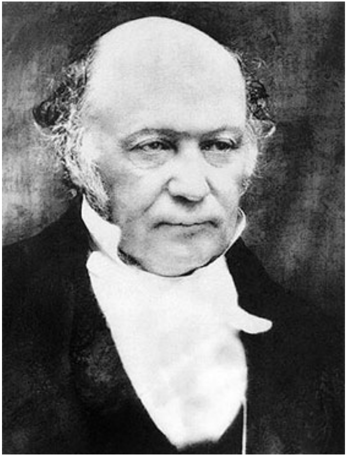
13 de junio de 2024

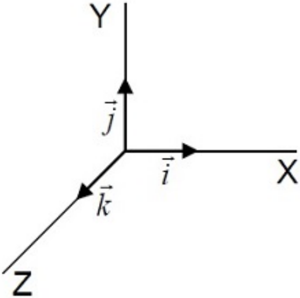
Universidad de Cantabria

MOTIVACIÓN

Supongamos que estamos en una mina donde están presentes dos minerales que se desea extraer. La veta de un mineral está representada por la dirección del vector $\vec{v}_1 = (1, 3, 4)$ *y la del otro mineral por el plano generado por los vectores* $\vec{v}_2 = (0, 2, 4), \vec{v}_3 = (1, 1, 0)$.

Sabiendo que el eje X representa la dirección este-oeste, el eje Y representa la dirección norte-sur y el eje Z representa la profundidad bajo la superficie, ¿en qué parte de la mina encontraremos los dos minerales?





William Rowan Hamilton (1805-1865) introdujo la notación **i, j, k** para los vectores de la base canónica en el espacio tridimensional

El comportamiento que caracteriza a los vectores es el siguiente:

- Podemos **sumar** vectores y obtenemos otro vector.
- Podemos **multiplicar un vector por un número (escalar)** y obtenemos otro vector.

Estas operaciones cumplen ciertas propiedades:

- Propiedades de la suma:
    - Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
    - Asociativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
    - Elemento neutro $\vec{0} : \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
    - Elemento opuesto $-\vec{v} : \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$
- Propiedades del producto por un escalar:
    - Asociativa: $\beta(\alpha\vec{v}) = (\beta\alpha)\vec{v}$
    - Distributiva respecto de la suma de escalares: $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$
    - Distributiva respecto de la suma de vectores: $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
    - Elemento unidad $1 : 1\vec{v} = \vec{v}$

ESPACIOS VECTORIALES

DEFINICIÓN

Un **espacio vectorial** es cualquier conjunto que posea unas operaciones suma y producto por escalares, cumpliendo todas las propiedades anteriores. Un espacio vectorial es real o complejo según sean los escalares.

Ejemplos:

- El espacio $\mathbb{R}^n$ formado por todos los vectores de **n** componentes $(x_1, ..., x_n)$ es un espacio vectorial real, en el que se pueden sumar vectores y multiplicar por un escalar (real) de manera habitual.
- El conjunto de polinomios de grado $\leq$ 2 con coeficientes reales: $\mathbb{P}_2 = ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}$ es un espacio vectorial real, pues podemos sumar dos elementos de $\mathbb{P}_2$ y obtenemos otro elemento de $\mathbb{P}_2$ y podemos multiplicarlo por un escalar real y obtenemos otro elemento de $\mathbb{P}_2$. Sin embargo, no es un espacio vectorial complejo.

ESPACIOS VECTORIALES

Ejercicio:

- Razonar si son espacios vectoriales reales:
  a) el conjunto **G** de los polinomios de grado 3.
  b) el conjunto $\mathbb{M}_{\mathbf{2x2}}$ de matrices 2x2.
  c) el conjunto de las funciones continuas definidas en $\mathbb{R}$, por ejemplo $f(x) = log\ x$, $g(x) = x^2$.
- Explicar si $\mathbb{R}^3$ es espacio vectorial con las siguientes operaciones:

  $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$

  $\lambda(x, y, z) = (0, \lambda y, \lambda z)$

SUBESPACIOS VECTORIALES

Dado un espacio vectorial **V**, se dice que un subconjunto S de V es un **subespacio vectorial** si contiene al vector $\vec{0}$ y si al efectuar las operaciones de suma y producto por un escalar entre vectores de S el resultado permanece en S, es decir:

- $\vec{0} \in S$.
- Si $\vec{u}, \vec{v} \in S$ entonces $\vec{u} + \vec{v} \in S$.
- Si $\vec{u} \in S$ y λ es un escalar entonces $\lambda\vec{u} \in S$

No haría falta comprobar el resto de propiedades (asociativa, conmutativa, etc) porque si se cumplen en V, también se cumplen en S.

EJEMPLOS DE SUBESPACIOS VECTORIALES

- La recta $x = y$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. Está formado por vectores de la forma (x, x). Contiene al vector $(0, 0)$ y es cerrado para la suma y producto escalar:
  - Suma: $(x, x) + (x', x') = (x + x', x + x')$ es también elemento de la recta.
  - Producto por un escalar $\lambda(x, x) = (\lambda x, \lambda x)$ también es un elemento de la recta.
- El plano **XY** es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Está formado por vectores de la forma $(x, y, 0)$. Contiene al vector $(0, 0, 0)$ y es cerrado para la suma y producto escalar:
  - Suma: $(x, y, 0) + (x', y', 0) = (x + x', y + y', 0)$ es también elemento del plano.
  - Producto por un escalar $\lambda(x, y, 0) = (\lambda x, \lambda y, 0)$ también es un elemento del plano.

Ejercicio:

a) ¿Es un subespacio de $\mathbb{R}^{2}$ el conjunto de vectores de la forma $(a, 1)$?

b) ¿Forma un subespacio del espacio de $\mathbb{P}_{2}$ (polinomios de grado ≤ 2) el conjunto de polinomios de grado ≤ 1?

c) En $\mathbb{M}_{2x2}$ (matrices cuadradas de orden 2), ¿es un subespacio el conjunto de matrices simétricas?

DESCRIPCIÓN DE LOS SUBESPACIOS DE $\mathbb{R}^n$

Geométricamente, en general los subespacios vectoriales en $\mathbb{R}^2$ son rectas, y en $\mathbb{R}^3$ son planos y rectas (el subespacio $\vec{0}$ es un punto). En general, los subespacios en $\mathbb{R}^n$ serán hiperplanos, y podremos describirlos de dos maneras:

- **Forma implícita:** mediante ecuaciones. Los vectores que verifican las ecuaciones son los que pertenecen al subespacio.
- **Forma paramétrica:** mediante una expresión con parámetros, que al tomar distintos valores producen todos los vectores del subespacio. Los parámetros deben ser **independientes** entre sí.

La suma del número de ecuaciones implícitas y el número de parámetros da el número de incógnitas, siempre que los **parámetros sean independientes entre sí**.

Ejemplos:

- En $\mathbb{R}^2$ la bisectriz se escribe en implícitas como $\{x = y\}$ y en paramétricas $\{(\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$
- En $\mathbb{R}^3$ el plano XY se escribe en implícitas como $\{z = 0\}$ y en paramétricas $\{(\alpha, \beta, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
- En $\mathbb{R}^3$ dado el subespacio en paramétricas $\{(\alpha, \beta, \alpha - \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, su forma implícita es $\{z = x - y\}$.
- El subespacio cero de $\mathbb{R}^3$ $(0, 0, 0)$ tiene como implícitas $\{x = 0, y = 0, z = 0\}$.
- El subespacio total $\mathbb{R}^3$ tiene como forma paramétrica $\{(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ y no tiene ecuación implícita.

Ejercicio:

- Obtener la forma implícita del subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por las ecuaciones paramétricas: $\{(\lambda, \lambda, 3\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$
- Obtener la forma implícita del subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por las ecuaciones paramétricas: $\{(\alpha + \beta, \alpha + \beta, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
- Obtener la forma paramétrica del subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por las ecuaciones implícitas: $\{x + z = 0, x + 2y + z = 0\}$

COMBINACIÓN LINEAL

Dado un conjunto de vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ se llama **combinación lineal** a cualquier vector de la forma: $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + ... + \alpha_n\vec{v}_n$ donde $\alpha 1, \cdots, \alpha_n$ son escalares llamados coeficientes de la combinación lineal (C.L.).
La C.L. de elementos de un subespacio S está en S.

Ejemplo: En $\mathbb{R}^2$, dado el subespacio $U \equiv \{(\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$, la combinación lineal de dos elementos de U es:
$\alpha(\lambda, \lambda) + \beta(\mu, \mu) = (\alpha\lambda + \beta\mu, \alpha\lambda + \beta\mu)$ que también es elemento de U.

DEPENDENCIA LINEAL

Un conjunto de vectores es **linealmente dependiente o ligado** si al menos uno de ellos es C.L de los demás, o bien, el vector $\vec{0}$ es C.L. de ellos con coeficientes no nulos.

Ejemplo: En $\mathbb{R}^2$ los vectores $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{v} = (0, 3)$ y $\vec{w} = (2, 5)$ son linealmente dependientes puesto que $\vec{w} = \vec{v} + 2\vec{u}$, o bien, $\vec{0} = \vec{v} + 2\vec{u} - \vec{w}$.

```
u=[1 1]'; v=[0 3]'; w=[2 5]'; A=[u v w];
rref(A)
```

Un conjunto de vectores es **linealmente independiente o libre** si ninguno de ellos es C.L. de los demás, o el vector $\vec{0}$ no es C.L. de ellos a no ser que todos los coeficientes sean nulos.

Ejercicio: Comprobar si son linealmente dependientes los siguientes conjuntos de vectores:

a) $\vec{u} = (3, 1), \vec{v} = (4, 5)$ en $\mathbb{R}^2$

b) $\vec{u} = (1, 0, 2), \vec{v} = (4, 3, 1), \vec{w} = (5, 3, 3)$ en $\mathbb{R}^3$

PROPIEDADES DE LA DEPENDENCIA/INDEPENDENCIA LINEAL

- El conjunto formado por un solo vector $\vec{v}$ no nulo es libre.
- Dos vectores $\vec{u}, \vec{v}$ son linealmente dependientes cuando uno es múltiplo de otro.
- Todo conjunto que contenga al $\vec{0}$ es ligado.
- Si un conjunto es ligado, añadiéndole vectores sigue siendo ligado.
- Si un conjunto es libre, quitándole vectores sigue siendo libre.
- Si un conjunto es libre, se pueden añadir más vectores libres hasta un cierto número (la dimensión del espacio) y sigue siendo libre.
- Si un conjunto es ligado, quitándole vectores que son C.L. de los demás llegará a ser libre.

RANGO DE UN CONJUNTO DE VECTORES

El **rango de un conjunto de vectores** es el número de vectores linealmente independientes del conjunto.

Propiedades:

- El rango de un conjunto de vectores es el rango de la matriz que forman (habitualmente colocándolos por columnas).
- Dados m vectores, si su rango es m son linealmente independientes.
- Si tenemos n vectores en $\mathbb{R}^n$, la matriz que forman es cuadrada, por lo que se puede obtener su determinante. Si el determinante es nulo serán dependientes, si el determinante es no nulo serán independientes.
- Si al eliminar uno de los vectores de un conjunto se conserva el rango del conjunto, dicho vector depende linealmente de los demás.
- Si al añadir un vector a un conjunto se conserva el rango, entonces el nuevo depende linealmente de los anteriores.

Ejercicio: En $\mathbb{R}^3$ determinar el rango de los vectores: $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$, $\vec{w} = (1, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

SISTEMAS GENERADORES

Dado un conjunto de vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_r$ el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de ellos se llama **subespacio generado o engendrado** por $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_r$. Dichos vectores forman un sistema generador del subespacio (o del espacio).

Ejemplos:

- En $\mathbb{R}^2$ un vector no nulo $\vec{v}$ genera una recta: $\alpha\vec{v}$.
- En $\mathbb{R}^3$ dos vectores generan un plano, por ejemplo, los vectores $\vec{u} = (1, 0, 0), \vec{v} = (0, 1, 0)$:
  $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) \rightarrow \{(\alpha, \beta, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ es la expresión paramétrica del plano XY.
- Otro sistema generador de $\mathbb{R}^2$ es $(2, 0)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$:
  $(a, b) = \alpha(2, 0) + \beta(1, 3) + \gamma(2, 1)$ produce un sistema de ecuaciones que es compatible para todo a, b, por lo tanto es sistema generador de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio:

a) ¿Son los vectores $(1,1)$ y $(2,2)$ un sistema generador de $\mathbb{R}^2$? En caso negativo, ¿qué espacio generan?

b) Hallar un sistema generador del subespacio $\{x = y\}$ de $\mathbb{R}^3$.

c) En $\mathbb{R}^3$ ¿pertenece $\vec{u} = (1,2,3)$ al subespacio generado por $\vec{v} = (4,5,6), \vec{w} = (7,8,9)$?

OBSERVACIÓN

Uniendo sistemas generadores de dos subespacios U y V, se obtiene un espacio generador de $U + V$.

Ejemplo:

$U \equiv$ plano XY $\equiv \{(\alpha, \beta, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \rightarrow$ sist. gen. $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$

$V \equiv$ plano XZ $\equiv \{(\alpha, 0, \gamma) : \alpha, \gamma \in \mathbb{R}\} \rightarrow$ sist. gen. $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$

Es sistema generador de $U + V$ el conjunto $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

BASE

Se llama **base** de un espacio o subespacio vectorial a un sistema generador de dicho espacio o subespacio que sea a la vez linealmente independiente.

Propiedades:

- Una base de S es un sistema generador lo más pequeño posible de S.
- Una base de S es un conjunto linealmente independiente lo más grande posible dentro de S.
- Una base de S permite expresar todos los vectores de S como C.L. de ella de manera única para cada vector.

```
% S ≡ { x + 2y +z -t = 0; z - t = 0}
S=[1 2 1 -1; 0 0 1 -1] % coeficientes de las implícitas
baseS=null(S, 'r') % null(S) daría una base ortonormal (Tema 4)
```

Ejemplos:

- Base canónica de $\mathbb{R}^n$: los vectores $\{(1,0,0,...,0),(0,1,0,...,0),...,(0,0,0,...,1)\}$ son linealmente independientes y forman un sistema generador porque cualquier vector de $\mathbb{R}^n$ se puede escribir como C.L. de ellos.
- Otra base de $\mathbb{R}^3$ es $\{(1,0,0),(1,1,0),(0,2,-3)\}$.
- $\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\}$ no forman base de $\mathbb{R}^3$ porque no son linealmente independientes.

Ejercicio:

a) En $\mathbb{R}^3$, consideremos el subespacio $S \equiv$ plano XY. ¿Forman los vectores $\{(3,2,0),(1,-1,0)\}$ base de S?

b) ¿Es $\{(1,0,2),(1,0,-1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$?

c) ¿Es $\{(2,0,0),(0,3,0),(4,1,0)\}$ base de $S \equiv$ plano XY de $\mathbb{R}^3$?

DIMENSIÓN

Todas las bases de un mismo espacio o subespacio tienen el mismo número de vectores. Al número de vectores que forman una base se llama **dimensión**.

- La dimensión de un subespacio en $\mathbb{R}^n$ coincide con el número de parámetros libres en su forma paramétrica.
- Si S y T son subespacios y $S \subset T$ entonces dim $S \leq$ dim T
- El rango de una familia de vectores es igual a la dimensión del subespacio que generan.

TEOREMA

Sea S un espacio o subespacio de dimensión **m**:

- si tenemos **m** vectores linealmente independientes en S, también serán sistema generador de S.
- si tenemos **m** vectores que generan S, también serán linealmente independientes.

CONSECUENCIA DE LA DEFINICIÓN DE BASE Y DIMENSIÓN

Estos conceptos permiten pasar de la forma paramétrica a la forma implícita de un subespacio: **implicitación.**

Ejemplo: Expresar en forma implícita $S \equiv \{(\alpha, \beta, 3\alpha - 5\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ en $\mathbb{R}^3$.

2 parámetros $\longrightarrow$ dim $S = 2$
3 incógnitas en $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ 1 ecuación implícita

Obtenemos una base de S: $(\alpha, \beta, 3\alpha - 5\beta) = \alpha(1,0,3) + \beta(0,1,-5)$

$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = 2$

$(1,0,3)$ y $(0,1,-5)$ forman un sistema generador y son l.i.
Un vector (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ pertenecerá a S si es C.L., es decir, si el rango sigue siendo 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 3 & -5 & z \end{pmatrix} \xrightarrow{escalonando} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z - 3x + 5y \end{pmatrix} \Rightarrow z - 3x + 5y = 0$$

Ejercicio: Expresar en forma implícita en $\mathbb{R}^4$ el subespacio
$S \equiv \{(\alpha, \beta, 2\alpha + \beta, -\alpha + 3\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Inclusión de subespacios

Se dice que el subespacio S está contenido en el subespacio T ($S \subset T$) si todos los elementos de S están también en T.
En cualquier espacio vectorial, el subespacio $\vec{0}$ está contenido en todos los demás subespacios.

Ejemplos:

- En $\mathbb{R}^3$, sean los siguientes subespacios:
  $S \equiv \{y = 0, z = 0\}$
  $T \equiv \{y = 0\}$
  tenemos que $S \subset T$ pues todo vector que satisfaga las ecuaciones de S también satiface la de T.
- En $\mathbb{R}^3$, sean los subespacios:
  $S \equiv \{(\lambda, 0, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$
  $T \equiv \{(\alpha, 0, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  tenemos que $S \subset T$, pues todo vector de la forma $(\lambda, 0, 0)$ también es de la forma $(\alpha, 0, \beta)$.

INTERSECCIÓN DE SUBESPACIOS

La intersección de subespacios S y T consiste en encontrar los elementos comunes a dos conjuntos ($S \cap T$).
Dados dos subespacios cualesquiera, siempre hay vectores comunes a ambos, al menos el $\vec{0}$.

La forma más sencilla de calcular $S \cap T$ es considerar, conjuntamente, las ecuaciones implícitas de S y las de T formando un **sistema de ecuaciones**. Resolviendo el sistema que forman, se obtiene la forma paramétrica de $S \cap T$.

TEOREMA

La intersección de subespacios es un subespacio, pues la suma y el producto por un escalar permanece dentro de S y T y por tanto dentro de $S \cap T$.

Ejemplo: Sean en $\mathbb{R}^3$ los subespacios $S \equiv \{z = 0\}$ (plano XY), $T \equiv \{y = 0\}$ (plano XZ), su intersección es $S \cap T \equiv \{z = 0, y = 0\}$ en implícitas, $\{(\lambda, 0, 0)\}$ en paramétricas (eje X).

SUMA DE SUBESPACIOS

Dados dos subespacio S y T, el subespacio suma se define como aquellos vectores que podamos construir sumando un vector de S y uno de T.

Al contrario que la intersección, la suma $S + T$ se calcula más fácilmente usando la forma paramétrica de S y T.

TEOREMA

La suma de subespacios es un subespacio.

Ejemplo: Sean en $\mathbb{R}^3$ los subespacios $S \equiv \{(\alpha, \alpha + \beta, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ y $T \equiv \{(0, 0, \gamma) : \gamma \in \mathbb{R}\}$, entonces $S + T \equiv \{(\alpha, \alpha + \beta, \beta + \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

Observación: la intersección $S \cap T$ es el mayor subespacio contenido en ambos y la suma $S + T$ es el menor subespacio que contiene a ambos.

SUMA DIRECTA

Dados dos subespacios S y T, considerando el subespacio suma: $S + T = \{\vec{u} + \vec{v} : \vec{u} \in S, \vec{v} \in T\}$ uniendo un sistema generador de S con uno de T se obtiene un sistema generador de $S + T$. Sin embargo, no siempre uniendo una base de S con una base de T se obtiene una base de $S + T$:

Fórmula de Grassmann:

$$dim(S + T) = dim(S) + dim(T) - dim(S \cap T)$$

TEOREMA

Se dice que la **suma es directa** $S \bigoplus T$ si su intersección $S \cap T$ es solamente el vector cero. En ese caso, al unir una base de S y una base de T se obtiene una base de $S \bigoplus T$.

- Suma directa: $dim(S \bigoplus T) = dim(S) + dim(T)$
- Suma no directa: $dim(S + T) + dim(S \cap T) = dim(S) + dim(T)$

SUBESPACIO SUPLEMENTARIO

Si dos subespacios S y T están en suma directa y además su suma es igual al espacio total $S \bigoplus T = V$ se dice que S y T son **suplementarios**.

Todo subespacio tiene infinitos suplementarios, salvo el $\vec{0}$ cuyo único suplementario es el total, y el total, cuyo único suplementario es el $\vec{0}$.

Aplicación: Dada una base de S, la prolongamos añadiendo vectores, independientes de los anteriores, hasta formar una base del espacio total. Para ello elegimos cualquier vector, por ejemplo, los de la base canónica. Los vectores añadidos forman una **base de un suplementario** de S.

Ejemplos:

- El eje Z es el suplementario del plano XY.
- En $\mathbb{R}^3$ el suplementario de un plano es cualquier recta que no esté contenida en el plano y el suplementario de una recta es un plano que no la contenga.

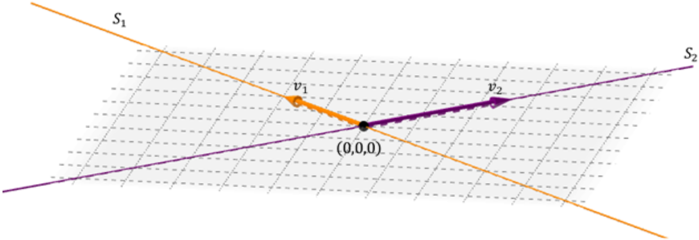
Subespacio suplementario

Ejemplo:
En $\mathbb{R}^4$, sea S el subespacio cuya base es
$\vec{v}_1 = (1,0,2,0), \vec{v}_2 = (3,0,0,0)$.
Para hallar un suplementario de S, consideramos los vectores de la base canónica $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$.
Podemos añadir a v_1, v_2 los vectores $(0,1,0,0),(0,0,0,1)$ porque son los dan un conjunto linealmente independiente (rango 4).
Esos dos forman un suplementario de S.

Ejercicio: En $\mathbb{R}^4$, sea S el subespacio dado por las ecuaciones implícitas $\{x+y=0, t=0\}$, obtener un subespacio suplementario de S.

EJEMPLOS EN $\mathbb{R}^3$

Dos rectas, $S_1 =< \vec{v}_1 >$ y $S_2 =< \vec{v}_2 >$, que se cortan

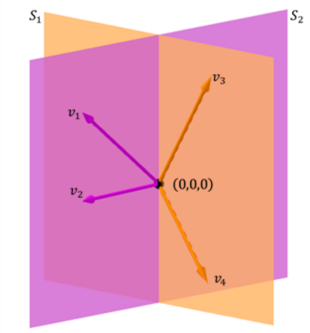


$$S_1 \cap S_2 = \{(0,0,0)\}$$
$$S_1 + S_2 =< \vec{v}_1, \vec{v}_2 >$$

$S_1 \bigoplus S_2 = S$, siendo S el plano que contiene a ambas rectas

EJEMPLOS EN $\mathbb{R}^3$

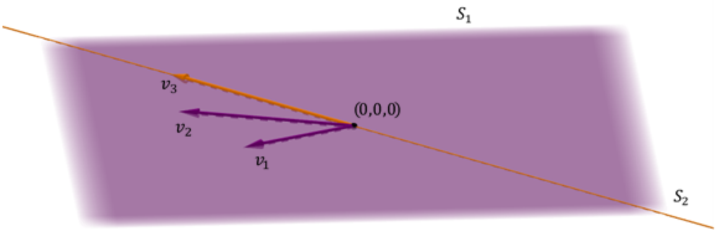
Dos planos, $S_1 =< \vec{v}_3, \vec{v}_4 >$ y $S_2 =< \vec{v}_1, \vec{v}_2 >$, que se cortan en una recta



$$S_1 \cap S_2 \neq \{(0,0,0)\}$$
$$S_1 + S_2 =< \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 >=< \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 >$$
$S_1 + S_2 = \mathbb{R}^3$, pero $\cancel{S_1 \bigoplus S_2}$

EJEMPLOS EN $\mathbb{R}^3$

Recta $S_2 =< \vec{v}_3 >$ contenida en un plano $S_1 =< \vec{v}_1, \vec{v}_2 >$

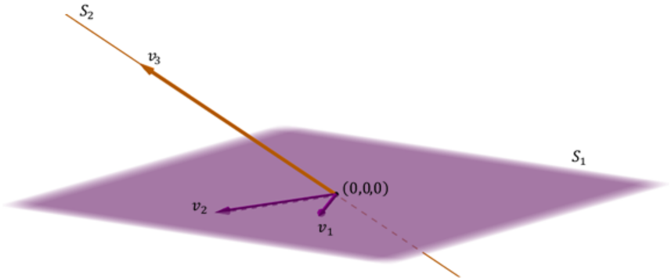


$$S_1 + S_2 = S_1, \text{ ya que } S_2 \subset S_1$$

$$\cancel{S_1 \bigoplus S_2}, \text{ ya que } S_1 \cap S_2 = S_2$$

EJEMPLOS EN $\mathbb{R}^3$

Recta $S_2 =< \vec{v}_3 >$ que corta un plano $S_1 =< \vec{v}_1, \vec{v}_2 >$



$S_1 \cap S_2 = \{(0,0,0)\}$ y $S_1 + S_2 =< \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 >= \mathbb{R}^3$, por tanto, $S_1 \bigoplus S_2$. En otras palabras, S_1 y S_2 son subespacios **suplementarios**

COORDENADAS

En un espacio vectorial V, fijada una base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$, todo vector $\vec{u} \in V$ puede ponerse de forma única como C.L. de dicha base: $\vec{u} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + ... + \alpha_n\vec{v}_n$. Los escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n$ son las **coordenadas** del vector $\vec{u}$ en la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$.

Ejemplo:

En la base canónica de $\mathbb{R}^2$ $\{(1,0),(0,1)\}$ las coordenadas del vector $\vec{v} = (1,2)$ son exactamente $(1,2)$ ya que se puede expresar: $(1,2) = 1(1,0) + 2(0,1)$

Si fijamos la base de $\mathbb{R}^2 : B \equiv \{(2,3),(1,-1)\}$, podemos hallar las coordenadas de $\vec{v}$ en B:

$$(1,2) = \alpha(2,3) + \beta(1,-1) \Rightarrow \alpha = \frac{3}{5}, \beta = -\frac{1}{5}$$

Por tanto, las coordenadas de $\vec{v}$ en B son $\left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right)$

MATRIZ DE CAMBIO DE BASE

En un espacio vectorial V, dadas dos bases B y B', se llama **matriz de cambio de base** o de cambio de coordenadas de B a B' a la matriz que contiene en sus columnas las coordenadas de los vectores de la base B expresados en función de la base B'.

Ejemplo: Consideremos en $\mathbb{R}^2$ la base $B \equiv \{(2,3),(1,-1)\}$ y la base canónica $B' \equiv \{(1,0),(0,1)\}$.

Cambio de base de B a B':

$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$

$(1,-1) = 1(1,0) - 1(0,1)$

La matriz de cambio de base de B a B':

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Cambio de base de B' a B:

$$(1,0) = \frac{1}{5}(2,3) + \frac{3}{5}(1,-1)$$

$$(0,1) = \frac{1}{5}(2,3) - \frac{2}{5}(1,-1)$$

La matriz de cambio de base de B' a B:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo (cont.):

Usamos la matriz Q para hallar las coordenadas de $\vec{v} = (1, 2)$ en B:

$$\begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$$

Podemos volver a las coordenadas en la base B' usando P:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la matriz de cambio de base

- Toda matriz de cambio de base es cuadrada nxn, donde n es la dimensión del espacio al que se refieren las bases.
- Toda matriz de cambio de base es invertible, es decir, tiene determinante no nulo.
- P y Q son inversas entre sí: $Q = P^{-1}$ y $P = Q^{-1}$
- La matriz de cambio de una base B a la misma base B es la matriz identidad.

RECORDAMOS

Supongamos que estamos en una mina donde están presentes dos minerales que se desea extraer. La veta de un mineral está representada por la dirección del vector $\vec{v}_1 = (1, 3, 4)$ *y la del otro mineral por el plano generado por los vectores* $\vec{v}_2 = (0, 2, 4), \vec{v}_3 = (1, 1, 0)$.

Sabiendo que el eje X representa la dirección este-oeste, el eje Y representa la dirección norte-sur y el eje Z representa la profundidad bajo la superficie, ¿en qué parte de la mina encontraremos los dos minerales?

Encontraremos los dos minerales en el subespacio intersección de los dos subespacios vectoriales que representan las dos vetas. En efecto, el rango de los tres vectores es 2, puesto que $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$. Por lo tanto, la dimensión del subespacio intersección es 1 y tiene la dirección del vector $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1)$.

```
coef1 = null(v1', 'r')'; coef2 = null(v2', 'r')';
M = [coef1; coef2]; inter = null(M, 'r')
```