TEMA 4: ESPACIO EUCLÍDEO

Ana Casanueva Vicente

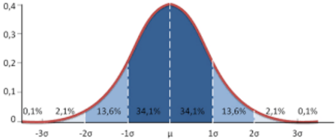
Dpto. de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación

13 de junio de 2024

Una ingeniera de recursos energéticos desea analizar la relación lineal entre la velocidad del viento y la producción de energía eólica en diferentes momentos del día. Conociendo esa relación podría predecir la producción de energía en función de la velocidad del viento en el parque eólico. Sin embargo, debido a la variabilidad en los datos, no todos los puntos pueden ajustarse perfectamente a una línea recta. ¿Cómo podría encontrar esa relación?

Velocidad del viento (m/s)	7	9	10	8	6	4	5	3
Producción de energía (kW)	110	130	140	120	95	70	85	50

Reseña histórica



Carl Friederich Gauss (1777-1855) desarrolló el método de mínimos cuadrados a los 18 años, pero la famosa campana que lleva su nombre fue introducida con anterioridad por Abraham De Moivre (1667-1754)

PRODUCTO ESCALAR

El producto escalar en $\mathbb{R}^2$ de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se define como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = < \vec{u}, \vec{v} > = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Es una operación entre dos vectores y su resultado es un escalar.

Propiedades:

- Conmutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Distributiva: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- Reubicación del escalar: $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$
- Definida positiva: $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$, solo se da $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{v} = 0$

Cualquier operación en un espacio vectorial que cumpla las propiedades anteriores es un **producto escalar**.

ESPACIO EUCLÍDEO

Un **espacio euclídeo** es cualquier espacio vectorial dotado de un producto escalar.

Ejemplos:

- El producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$:
  $(u_1, u_2, ..., u_n) \cdot (v_1, v_2, ..., v_n) = u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n$
- Otro producto escalar en $\mathbb{R}^3$ que cumple las propiedades anteriores podría ser: $(u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$
- En el espacio $\mathbb{M}_2$ el producto ordinario de matrices no es un producto escalar, pues el resultado no es escalar, no es conmutativo, etc.
- En el espacio vectorial $\mathcal{C}[a, b]$ de las funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ podemos definir el siguiente producto escalar que cumple todas las propiedades: $f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x)dx$

Ejercicio: Razonar si en el espacio de los polinomios de grado menor o igual a 2 $\mathbb{P}_2 \equiv \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ son productos escalares:

a) el producto ordinario de polinomios.

b) $(ax^2 + bx + c) \cdot (a'x^2 + b'x + c') = aa' + bb' + cc'$

VECTORES ORTOGONALES

VECTORES ORTOGONALES

Dos vectores $\vec{u}, \vec{v}$ son ortogonales si su producto escalar es cero:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

Un conjunto de vectores es un **conjunto ortogonal** si cada uno de ellos es ortogonal a todos los demás.

Ejemplo: En la base canónica de $\mathbb{R}^3$, todos los vectores son ortogonales entre sí:

$(1,0,0) \cdot (0,1,0) = 0$

$(1,0,0) \cdot (0,0,1) = 0$

$(0,1,0) \cdot (0,0,1) = 0$

```
e1=[1 0 0]; e2=[0 1 0]; e3=[0 0 1];
e1*e2' e1*e3' e2*e3'
```

TEOREMA

Todo conjunto ortogonal es linealmente independiente.

NORMA O MÓDULO DE UN VECTOR

La norma o módulo de un vector se calcula como:

$$\mid \vec{v} \mid = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

`norm(v)`

Propiedades:

- El único vector de módulo cero es $\vec{0}$.
- El módulo de un vector es el mismo que el de su opuesto.
- El módulo de un vector por un escalar es igual al módulo del vector multiplicado por el valor absoluto del escalar: $\mid \alpha\vec{v} \mid = \mid \alpha \mid\mid \vec{v} \mid$
- Para cualesquiera $\vec{u}, \vec{v}$ se cumple:
  - la desigualdad triangular: $\mid \vec{u} + \vec{v} \mid \leq \mid \vec{u} \mid + \mid \vec{v} \mid$
  - la desigualdad de Cauchy-Schwarz $\mid \vec{u} \cdot \vec{v} \mid \leq \mid \vec{u} \mid\mid \vec{v} \mid$
    La igualdad solo se cumple si $\vec{u}$ es múltiplo de $\vec{v}$.

DISTANCIA Y ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES

La **distancia** entre dos vectores $\vec{u}, \vec{v}$ es la norma del vector diferencia entre ambos:

$$dist(\vec{u}, \vec{v}) = \mid \vec{u} - \vec{v} \mid$$

Para el producto escalar usual en $\mathbb{R}^2$ se cumple que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \mid \vec{u} \mid\mid \vec{v} \mid cos\alpha$$

Para generalizar el concepto de **ángulo** a cualquier espacio euclídeo:

$$\alpha = arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\mid \vec{u} \mid\mid \vec{v} \mid}$$

Ejercicio: Calcular los módulos y la distancia y ángulo entre vectores para los siguientes casos:

a) En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual $\vec{u} = (1, 0, 0), \vec{v} = (1, 0, 1)$.

b) En el espacio $\mathcal{C}[0, 1]$ (funciones continuas en el intervalo [0,1]): $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$, respecto al producto escalar: $f \cdot g = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$

NORMALIZACIÓN

Normalizar un vector es reducirlo a otro vector de norma 1, por tanto, se consigue multiplicando el vector $\vec{v}$ por $\dfrac{1}{|\vec{v}|}$.

Ejemplo: El vector $(3,4)$ tiene norma 5, por tanto el vector normalizado es $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$, que efectivamente tiene norma 1.

Se llama **conjunto ortonormal** a un conjunto ortogonal cuyos vectores tienen norma 1. Por lo tanto sus elementos $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\}$ cumplen:

$$\vec{v}_i\cdot\vec{v}_j=0, \vec{v}_i\cdot\vec{v}_i=1 \quad \forall\ i,j\in\{1,\dots,n\}$$

Ejercicio: Comprobar si forman un conjunto ortonormal los siguientes conjuntos:

a) La base canónica de $\mathbb{R}^3$.

b) $\{(1,2,0),(4,-2,0)\}$

MATRIZ ORTOGONAL

Una matriz cuadrada de orden n es **ortogonal** si sus columnas son vectores **ortonormales** de $\mathbb{R}^n$, considerando el producto escalar usual.

Propiedades:

- Las columnas de una matriz ortogonal son n vectores ortonormales en $\mathbb{R}^n$ y, por lo tanto, linealmente independientes. Así pues, las columnas forman base de $\mathbb{R}^n$, una base ortonormal.
- Toda matriz ortogonal es regular o invertible.
- Una matriz es ortogonal si y solo si su inversa coincide con su traspuesta: $A^{-1} = A^t$

Ejemplos: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

SUBESPACIOS ORTOGONALES

Un vector $\vec{v}$ es ortogonal a un subespacio S ($\vec{v} \perp S$) si $\vec{v}$ es ortogonal a todos los vectores de S (basta con que sea ortogonal a los vectores de una base de S).

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$, el vector $(0, 0, 1)$ es ortogonal al plano XY.

Un subespacio S es ortogonal a otro subespacio T ($S \perp T$) si todo vector de S es ortogonal a todo vector de T, es decir:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \forall \; \vec{u} \in S, \vec{v} \in T$$

Basta con que los vectores de una base de S sean ortogonales a los vectores de una base de T.

Propiedad: si dos subespacios son ortogonales, entonces su intersección es $\{\vec{0}\}$, es decir, están en suma directa. Si además su suma es el total, serán subespacios suplementarios o complementarios.

SUBESPACIO COMPLEMENTARIO ORTOGONAL

Dado un subespacio S, su complementario ortogonal (o simplemente ortogonal) es el **único** subespacio (denotado por $S^{\perp}$) que cumple:

- $S^{\perp}$ es ortogonal a S.
- dim S + dim $S^{\perp}$ = n, donde n es la dimensión del espacio total.

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$, el subespacio formado por el plano XY tiene infinitos complementarios, pero solo uno de ellos es ortogonal, el eje Z.

El subespacio complementario ortogonal al subespacio S se construye con los vectores ortogonales a una base de S.

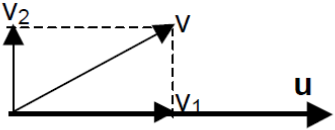
Ejercicio: Obtener una base del complementario ortogonal en $\mathbb{R}^4$ del subespacio $T \equiv \{(a, 0, 2a, b) : a, b \in \mathbb{R}$.

PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN VECTOR SOBRE OTRO

Para proyectar un vector $\vec{v}$ sobre el vector $\vec{u}$, decimos que $\vec{v}$ se puede descomponer de manera única como $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, con $\vec{v}_1$ en la dirección de $\vec{u}$ y $\vec{v}_2$ en la dirección ortogonal a $\vec{u}$.

$$\vec{v}_1 = proy_u(\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1$$



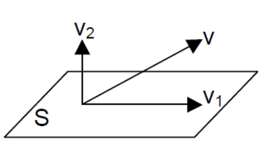
Ejemplo: En $\mathbb{R}^2$ proyectar $\vec{v} = (1,2)$ sobre $\vec{u} = (3,1)$

$$\vec{v}_1 = proy_u(\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u} = \frac{(3,1)(1,2)}{(3,1)(3,1)}(3,1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1 = (1,2) - \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

Dado un vector $\vec{v}$ y un subespacio S, $\vec{v}$ se puede descomponer de manera única como $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, con $\vec{v}_1 \in S$ y $\vec{v}_2$ en la dirección ortogonal a S: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$



Dado que $S \oplus S^{\perp} = V$, donde V es el espacio total, $\vec{v}_1 \in S$, $\vec{v}_2 \in S^{\perp}$ son precisamente las proyecciones ortogonales sobre S y $S^{\perp}$, respectivamente.

Por tanto, $\vec{v} = proy_S(\vec{v}) + proy_{S^{\perp}}(\vec{v})$

Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

La proyección ortogonal de un vector $\vec{v}$ sobre un subespacio S se calcula:

$$proy_S(\vec{v}) = proy_{u_1}(\vec{v}) + \ldots + proy_{u_n}(\vec{v}) = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{v}}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\vec{u}_1 + \ldots + \frac{\vec{u}_n \cdot \vec{v}}{\vec{u}_n \cdot \vec{u}_n}\vec{u}_n$$

donde $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ forman una **base ortogonal** de S.

Conocida la componente $proy_S(\vec{v})$, se puede hallar la componente ortogonal:

$$\boxed{proy_{S^{\perp}}(\vec{v}) = \vec{v} - proy_S(\vec{v})}$$

Ejercicio: En $\mathbb{R}^3$ proyectar $\vec{v} = (3, 2, 2)$ sobre el subespacio S generado por $\vec{u}_1 = (2, 0, 1)$ y $\vec{u}_2 = (0, 3, 0)$. Hallar también la proyección de $\vec{v}$ sobre el subespacio ortogonal de S ($S^\perp$).

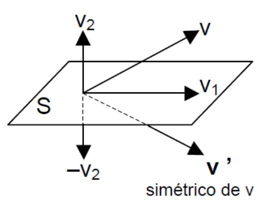
VECTOR SIMÉTRICO

Dado un vector $\vec{v}$ y un subespacio S, descomponemos:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = proy_S(\vec{v}) + proy_{S^\perp}(\vec{v})$$

Entonces se define el vector simétrico de $\vec{v}$ respecto a S como:

$$\vec{v'} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = proy_S(\vec{v}) - proy_{S^\perp}(\vec{v})$$



Ejercicio: Dado el subespacio S en $\mathbb{R}^3$ generado por $\vec{u}_1 = (2,0,1)$ y $\vec{u}_2 = (0,3,0)$, hallar el vector simétrico $\vec{v'}$ de $\vec{v} = (3,2,2)$. Calcular el área del triángulo formado por $\vec{v}$ y $\vec{v'}$.

COORDENADAS DE UN VECTOR EN UNA BASE ORTOGONAL

Si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ es una base ortogonal de S y $\vec{v} \in S$, entonces

$$\vec{v} = proy_S(\vec{v}) = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{v}}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\vec{u}_1 + ... + \frac{\vec{u}_n \cdot \vec{v}}{\vec{u}_n \cdot \vec{u}_n}\vec{u}_n$$

donde los escalares $\frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{v}}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}, ..., \frac{\vec{u}_n \cdot \vec{v}}{\vec{u}_n \cdot \vec{u}_n}$ son las coordenadas de $\vec{v}$ en esa base de S.

Ejercicio: Consideremos en $\mathbb{R}^2$ la base ortogonal $\{(1,1), (1,-1)\}$. Hallar las coordenadas de $\vec{v} = (5,4)$ en esa base.

CÁLCULO DE BASES ORTOGONALES: GRAM-SCHMIDT

Para calcular la proyección de un vector sobre un subespacio S se requiere una **base ortogonal** de S.

Supongamos que tenemos una base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ de S. Vamos a construir una base ortogonal $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$.

1. Como primer vector tomamos el propio $\vec{u}_1$: $\vec{a}_1 = \vec{u}_1$
2. Para construir el segundo vector, tomamos $\vec{u}_2$ y lo proyectamos sobre $\vec{a}_1$, quedándonos con la componente ortogonal a $\vec{a}_1$: $\vec{a}_2 = \vec{u}_2 - proy_{a_1}(\vec{u}_2)$
3. Para construir el tercer vector, tomamos $\vec{u}_3$ y lo proyectamos sobre $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, quedándonos con la componente ortogonal a ellos: $\vec{a}_3 = \vec{u}_3 - proy_{a_1}(\vec{u}_3) - proy_{a_2}(\vec{u}_3)$
4. etc.

Para obtener una base **ortonormal**, habrá que normalizar los vectores $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$.

CÁLCULO DE BASES ORTOGONALES: GRAM-SCHMIDT

Ejemplo: Obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ a partir de la base formada por $\vec{u}_1 = (1,1,0)$, $\vec{u}_2 = (0,1,1)$, $\vec{u}_3 = (1,0,1)$.

$$\vec{a}_1 = \vec{u}_1 = (1,1,0)$$

$$\vec{a}_2 = \vec{u}_2 - proy_{a_1}(\vec{u}_2) = \vec{u}_2 - \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{u}_2}{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1}\vec{a}_1 = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\vec{a}_3 = \vec{u}_3 - proy_{a_1}(\vec{u}_3) - proy_{a_2}(\vec{u}_3) = \vec{u}_3 - \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{u}_3}{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1}\vec{a}_1 - \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{u}_3}{\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2}\vec{a}_2$$

$$\vec{a}_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Base ortonormal:

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$$

```
u1=[1 1 0]'; u2=[0 1 1]';u3=[1 0 1]';
A=[u1 u2 u3]; orth(A) % Si se conocen las ecuaciones implícitas en
lugar de una base, se usará null
```

LA MATRIZ DE PROYECCIÓN

Sirve para obtener la proyección de un vector sobre un subespacio sin necesidad de hallar una base ortogonal. Solo es válida para subespacios de $\mathbb{R}^n$. La matriz de proyección sobre un subespacio S se calcula como:

$$P_s = A(A^t A)^{-1} A^t$$

donde A es la matriz que contiene una base de S en sus columnas.

P_s es única y no depende de la base de partida. Sirve para proyectar cualquier vector sobre S:

$$\boxed{proy_S(\vec{v}) = P_s \vec{v}}$$

Ejercicio: En $\mathbb{R}^3$ proyectar $\vec{v} = (3, 2, 2)$ sobre el subespacio S generado por $\vec{u}_1 = (2, 0, 1)$ y $\vec{u}_2 = (0, 3, 0)$ haciendo uso de la matriz de proyección.

```
u1=[2 0 1]'; u2=[0 3 0]'; v= [3 2 2]'; A=[u1 u2];
P=A*inv(A'*A)*A'; proy=P*v
```

PROPIEDADES DE LA MATRIZ DE PROYECCIÓN

Toda matriz de proyección sobre un subespacio de $\mathbb{R}^n$ es:

- Cuadrada de orden n.
- Simétrica.
- Idempotente ($P_s^2 = P_s$)

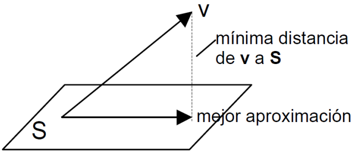
Ejemplo: La matriz Q cumple las propiedades anteriores. Por lo tanto, Q es matriz de proyección de un subespacio S generado por sus columnas, es decir, $S \equiv \{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio: Razonar si la matriz A puede ser una matriz de proyección:

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

APLICACIONES PRÁCTICAS



En un espacio euclídeo, dado un vector $\vec{v}$ y un subespacio S, de entre todos los vectores de S hay uno que es el más próximo a $\vec{v}$. La **mejor aproximación** de $\vec{v}$ en S es la **proyección ortogonal** $proy_S(\vec{v})$.

Se llama **error cuadrático** al cuadrado de la distancia que separa a $\vec{v}$ de su aproximación:

$$\boxed{error = |\ proy_S(\vec{v}) - \vec{v}\ |^2}$$

APLICACIONES

- Encontrar la solución aproximada de un sistema incompatible.
- Ajustar una nube de puntos a una gráfica.
- Aproximación de una función continua por un polinomio.

Solución aproximada de sistemas incompatibles

Método de mínimos cuadrados

Un sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución si existe $\vec{x}$ tal que la columna de términos independientes $\vec{b}$ es C.L. de los vectores de A, es decir, si $\vec{b}$ pertenece al subespacio generado por los vectores de A (S).
Si el sistema es incompatible, $\vec{b}$ no pertenece al subespacio S.
Podemos sustituir $\vec{b}$ por otro vector $\vec{c}$ que sí pertenece al subespacio S y que sea la **mejor aproximación** de $\vec{b}$ en S.

$$A\vec{x} = \vec{c} = proy_S(\vec{b})$$

donde S es el subespacio generado por las columnas de A.

$\vec{c}$ cumple aproximadamente las ecuaciones del sistema y el error cuadrático es:

$$\boxed{error = |\ \vec{c} - \vec{b}\ |^2}$$

MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema por mínimos cuadrados y estimar el error cuadrático.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y & = & 0 \\ x & = & 1 \\ y & = & 1 \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Sist. Incompatible}$$

$\vec{b} = (0,1,1)$ no pertenece al subespacio S generado por $(2,1,0),(3,0,1)$.

$$\vec{c} = proy_S(\vec{b}) = P_s\vec{b} = A(A^tA)^{-1}A^t\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{5}{14} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{-1}{14} \end{pmatrix}$$

El nuevo sistema es compatible determinado.

$$error = |\, \vec{c} - \vec{b}\,|^2 = |\,(0,1,1) - \left(\frac{5}{14}, \frac{2}{7}, \frac{-1}{14}\right)|^2 = \frac{25}{14}$$

MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA POR MÍNIMOS CUADRADOS

Dado un sistema de ecuaciones incompatible $A\vec{x} = \vec{b}$, si las columnas de A son linealmente independientes, se puede obtener la solución aproximada por mínimos cuadrados directamente:

$$\vec{x} = (A^t A)^{-1} A^t \vec{b}$$

Demostración:

$$P_s \vec{b} = \vec{c} \Rightarrow A(A^t A)^{-1} A^t \vec{b} = \vec{c}$$

Dado que $\vec{c}$ es la mejor aproximación de $\vec{b} \Rightarrow \vec{x} = (A^t A)^{-1} A^t \vec{b}$

```
A=[2 3; 1 0; 0 1]; b=[0 1 1]';
sol=inv(A'*A)*A'*b
bAprox= A*sol
error=norm(bAprox - b)^2
```

AJUSTE DE UNA NUBE DE PUNTOS

Dada una nube de puntos, buscamos la recta, parábola, etc. que mejor se ajuste o aproxime a dichos puntos.

Ejemplo: Buscamos la recta que mejor se aproxime a los puntos $(1,2),(2,3),(3,5)$. La ecuación de la recta es de la forma $y = ax + b$. Si pasaran los tres puntos por la recta debería cumplirse:

$$\left\{\begin{array}{ll} 2 & = a\cdot 1 + b \\ 3 & = a\cdot 2 + b \\ 5 & = a \cdot 3 + b \end{array}\right. \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ Sist. Incompatible}$$

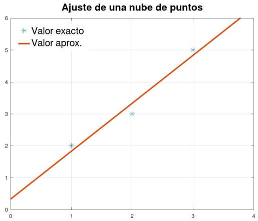
Como la columnas de A son l.i. se puede hallar la solución aproximada:

$$\vec{x} = (A^t A)^{-1} A^t \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow y = \frac{3}{2} x + \frac{1}{3}$$

$$error = |\ A\vec{x} - \vec{b}\ |^2 = \left|\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\ \right|^2 = \frac{1}{6}$$

AJUSTE DE UNA NUBE DE PUNTOS

```
X =[1 2 3]; Y = [2 3 5];
pol1=polyfit(X,Y,1); % Coeficientes del polinomio de ajuste
x=0:0.01:4;
y1=polyval(pol1,x); % Evaluar el polinomio
figure(1)
plot(X,Y, '*','markersize',10) % Nube de puntos
ylim([0 6]), xlim([0 4])
hold on
plot(x, y1,'LineWidth',3) % Representar la recta de ajuste
title('Ajuste de una nube de puntos', 'FontSize',18)
legend('Valor exacto', 'Valor aprox.', 'location','northwest')
legend('boxoff')
set(legend,'fontsize',18);
grid on, hold off
```



APROXIMACIÓN DE UNA FUNCIÓN CONTINUA POR UN POLINOMIO

Sirve para facilitar cálculos con funciones trigonométricas, logarítmicas, exponenciales, etc. sustituyéndolas por un polinomio que se aproxime a ellas.

Ejemplo: Queremos aproximar la función $f(x) = e^x$ por un polinomio de grado $\leq$ 2 ($\mathbb{P}_2$) en el intervalo $[0, 1]$, con producto escalar $f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

La mejor aproximación de f en $\mathbb{P}_2$ será la proyección de f en $\mathbb{P}_2$: $proy_{P_2}(f)$.

En primer lugar necesitamos una base ortogonal de $\mathbb{P}_2$.

Partiendo de la base estándar $\{1, x, x^2\}$ se puede calcular una base ortogonal $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ por Gram-Schmidt*:

$$\vec{a}_1 = \vec{u}_1 = 1$$
$$\vec{a}_2 = \vec{u}_2 - proy_{a_1}(\vec{u}_2) = \vec{u}_2 - \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{u}_2}{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1}\vec{a}_1 = x - 1/2$$
$$\vec{a}_3 = \vec{u}_3 - proy_{a_1}(\vec{u}_3) - proy_{a_2}(\vec{u}_3) = \vec{u}_3 - \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{u}_3}{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1}\vec{a}_1 - \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{u}_3}{\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2}\vec{a}_2$$
$$a_3 = x^2 - x + 1/6$$

*hay que hacer uso del producto escalar dado, es decir, calculando las integrales.

APROXIMACIÓN DE UNA FUNCIÓN CONTINUA POR UN POLINOMIO

Ejemplo (cont.)

La proyección será:

$$proy_{P_2}(f) = \frac{\vec{a}_1 \cdot f}{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1}\vec{a}_1 + \frac{\vec{a}_2 \cdot f}{\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2}\vec{a}_2 + \frac{\vec{a}_3 \cdot f}{\vec{a}_3 \cdot \vec{a}_3}\vec{a}_3$$

... haciendo uso del producto escalar dado, por ejemplo:

$$\int_0^1 1 \cdot e^x dx = e - 1; \int_0^1 x \cdot e^x dx = 1; etc$$

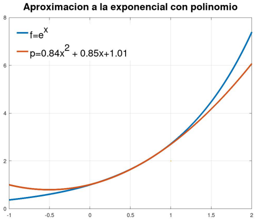
$$p(x) = proy_{P_2}(f) \simeq 0{,}84x^2 + 0{,}85x + 1{,}01$$

Se puede estimar el error cuadrático:

$$error = |\ proy_S(\vec{v}) - \vec{v}\ |^2 = \int_0^1 [p(x) - f(x)]^2 dx = 0{,}0000386$$

APROXIMACIÓN DE UNA FUNCIÓN CONTINUA POR UN POLINOMIO

```
x= -1:0.01:2;
f=exp(x); % Función a aproximar
pol=polyfit(x, f, 2)
figure(2)
plot(x,f,'LineWidth',3)
hold on
p=pol(1)*x.^2+pol(2)*x+pol(3); % Polinomio aproximador
plot(x,p,'LineWidth',3)
title('Aproximacion a la exponencial con polinomio', 'FontSize',18)
legend('f=e^x', ['p=',num2str(pol(1)),'x^2 + ',num2str(pol(2)),'x+',...
num2str(pol(3))], 'location','northwest')
legend('boxoff')
set(legend,'fontsize',18);
grid on, hold off
```



RECORDAMOS

Una ingeniera de recursos energéticos desea analizar la relación lineal entre la velocidad del viento y la producción de energía en diferentes momentos del día. Conociendo esa relación podría predecir la producción de energía en función de la velocidad del viento en el parque eólico. Sin embargo, debido a la variabilidad en los datos, no todos los puntos pueden ajustarse perfectamente a una línea recta. ¿Cómo podría encontrar esa relación?

Llamemos a x la velocidad del viento, y la producción de energía. Al imponer que los puntos pasen por la misma recta de ecuacion $y = ax+b$ se obtiene un sistema incompatible. Se puede resolver por el método de mínimos cuadrados, obteniendo la recta que mejor ajusta a los datos: $y = 12{,}5x + 18{,}75$.