TEMA 5: APLICACIONES LINEALES

Ana Casanueva Vicente

Dpto. de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación

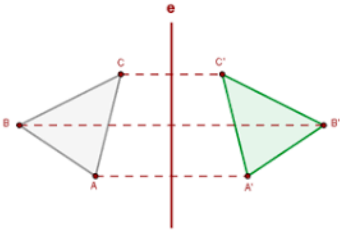
13 de junio de 2024

Un ingeniero de recursos mineros se encarga de supervisar un proceso de extracción y refinamiento de minerales en una mina. Durante el proceso, se utilizan varios métodos para extraer y refinar los minerales, cada uno de los cuales tiene sus propias características y eficiencia.

El proceso general implica tres etapas: extracción, transporte y refinamiento.

1. *La etapa de extracción transforma la materia prima en los minerales extraídos. Se tienen 5 materias primas correspondientes a 5 minerales.*
2. *La etapa de transporte lleva los minerales extraídos (5) desde la mina hasta la planta de refinamiento. Se deciden transportar solo 4 minerales.*
3. *La etapa de refinamiento transforma los minerales transportados (4) en tres productos refinados finales.*

¿Cómo puede planificar la producción considerando todo el proceso?



Emmy Noether (1882-1935) es considerada la madre del álgebra moderna por sus teorías sobre anillos y cuerpos. Concretamente uno de sus teoremas relaciona las simetrías con las invariantes del movimiento.

Aplicación

Una aplicación entre dos conjuntos A y B es una regla que permite asignar a cada elemento de A, uno (y sólo uno) de B.

$$f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B} \qquad\qquad A \xrightarrow{f} B$$

Si f asigna al elemento $a \in A$ el elemento $b \in B$, b es la imagen de a: $f(a) = b$.

En este tema, trabajaremos con aplicaciones entre (sub)espacios vectoriales.

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &\longrightarrow \mathbf{W} \\ f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, y, z, ...) &\longmapsto (x', y', z', ...) \end{aligned}$$

Aplicación lineal u homomorfismo

Dados dos (sub)espacios vectoriales V y W, una aplicación $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ es lineal si conserva las combinaciones lineales, es decir:

$$f(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) = \alpha f(\vec{v}_1) + \beta f(\vec{v}_2), \text{ siendo } \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V\text{; y } \alpha \text{ y } \beta \text{ escalares}$$

Observación: Lo anterior incluye que $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$
(Si no se cumple esta propiedad, f NO será lineal. Si se cumple, f podrá ser lineal o no)

Ejemplos: Comprueba si son lineales las siguientes aplicaciones:

a) $$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (2x, z) \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, x + y, 1) \end{aligned}$$

ALGUNAS APLICACIONES LINEALES IMPORTANTES

- Identidad

  $$id : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$$
  $$u \longmapsto u$$

- Nula

  $$n : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$$
  $$u \longmapsto \mathbf{0}$$

- Giros

  $$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
  $$(x, y) \mapsto (\tfrac{\sqrt{2}}{2}x - \tfrac{\sqrt{2}}{2}y, \tfrac{\sqrt{2}}{2}x + \tfrac{\sqrt{2}}{2}y)$$

- Reflexiones o simetrías

  $$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
  $$(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$$

- Homotecias

  $$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
  $$(x, y) \longmapsto (1.01x, 1.01y)$$

- Proyecciones

  $$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
  $$(x, y, z) \mapsto (x, 0, z)$$

TRANSFORMACIÓN DE SUBESPACIOS

TEOREMA

Una aplicación lineal $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ transforma subespacios de V en subespacios de W (a). Dado S un subespacio de V, su imagen se denota por $f(S)$.
El subespacio $f(S)$ tiene dimensión menor o igual que la de S (b).

Consecuencias:

(a) En $\mathbb{R}^n$ los subespacios son rectas, planos, etc., por lo tanto, no se pueden transformar en líneas o superficies curvas.

(b) Una recta no puede transformarse en un plano. Un plano podrá transformarse en otro plano, en una recta o en un punto.

IMAGEN DE UN SISTEMA GENERADOR

TEOREMA

Sea $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ lineal, y sea S un subespacio de V. Entonces, la imagen de un sistema generador de S es un sistema generador de $f(S)$.

Ejercicio: Dada la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$(x, y, z) \longmapsto (x + y + 2z, 3x + 3y + 6z)$, calcular un sistema generador de la imagen del subespacio $S \equiv \{(\alpha + \beta, \alpha, \alpha - \beta)\}$ que pertenece a $\mathbb{R}^3$.

TEOREMA

Sea $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ lineal. La imagen de un conjunto linealmente dependiente es otro conjunto linealmente dependiente. La imagen de un conjunto linealmente independiente no siempre es un conjunto linealmente independiente (solo si es inyectiva).

Observación: Una base de S no tiene por qué transformarse en una base de $f(S)$; solo si es inyectiva.

NÚCLEO

Sea $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ lineal, llamamos núcleo al conjunto de vectores de V cuya imagen es $\vec{0}_W$:

$$Ker(f) = \{\vec{v} \in V : f(\vec{v}) = \vec{0}_W\}$$

Como mínimo, $Ker(f)$ estará compuesto por $\{\vec{0}_V\}$.

IMAGEN

Sea $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ lineal, la imagen de f es el conjunto de las imágenes de todos los vectores de V:

- $f(V) = Im(f)$ será un subespacio de W, siendo $dim(Im(f)) \leqslant dim(W)$
- si $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n}\}$ generan $V \Rightarrow \{f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), ..., f(\vec{v}_n)\}$ generan $Im(f)$, por tanto, $dim(Im(f)) \leqslant dim(V)$.

$$dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = dimV$$

Ejercicio: Calcula el núcleo y la imagen de las siguientes aplicaciones lineales:

a) $$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + y + 2z, 3x + 3y + 6z) \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (2x - 3y, -x - y) \end{aligned}$$

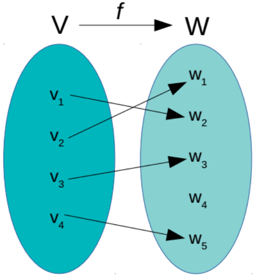
TIPOS DE APLICACIONES

Sea f una aplicación lineal

$$\mathbf{f : V \longrightarrow W}$$

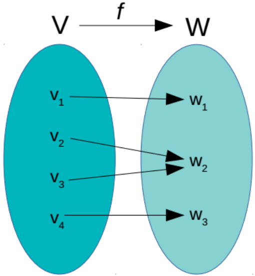
$$\boldsymbol{v \longmapsto w}$$

Inyectiva $\Leftrightarrow$ no hay dos elementos de V (antecedentes) que tengan imágenes iguales en W



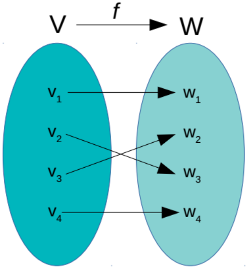
$$dim(Ker(f)) = 0$$

Suprayectiva (o sobreyectiva) $\Leftrightarrow$ todos los elementos de W tienen antecedente



$$dim(Im(f)) = dim(W)$$

Biyectiva o isomorfismo $\Leftrightarrow$ a cada elemento de V le corresponde uno de W, y viceversa)



inyectiva + suprayectiva

Ejercicio: Clasifica las siguientes aplicaciones lineales como inyectivas/suprayectivas/biyectivas:

a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y, z) \longmapsto (x + y + 2z, 3x + 3y + 6z)$

b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \longmapsto (2x - 3y, -x - y)$

c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

d) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

Matriz asociada a una aplicación lineal

Teorema

Toda aplicación lineal se puede identificar con una matriz, y toda matriz representa una aplicación lineal. Se cumple:

$$rg(f) = dim(Im(f))$$

Ejemplo: Calcular el rango de la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (2x + 3y + z, y + z) \end{aligned}$$

MATRIZ ASOCIADA A UNA APLICACIÓN

Dada una aplicación lineal $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$, se llama **matriz asociada a f** (en bases canónicas) a la matriz A que contiene en sus columnas las imágenes de la base canónica de V.

Propiedades:

- La matriz de $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es de tamaño $m \times n$.
- $rg(f) = dim(Im(f)) = rg(A)$, que puede calcularse escalonando la matriz.
- A puede utilizarse para calcular la imagen de cualquier vector de $V \Rightarrow$ $A\vec{v} = f(\vec{v})$, siendo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $f(\vec{v}) \in \mathbb{R}^m$

Ejercicio: Sea la aplicación lineal f calcula su matriz asociada y utilízala para calcular la imagen del vector $(2, 3)$.

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y) \longmapsto (x + y, x - y, 0)$$

```
A=[1 1 ; 1 -1; 0 0]
ker=null(A)  % Ker(f)
rref(A)  % columnas l.i. son base de Im(f)
v=A*[2 3]'
```

ECUACIONES DE UNA APLICACIÓN

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, con matriz asociada $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$. Denotemos por $(x_1, \ldots, x_n)$ un vector del conjunto inicial $\mathbb{R}^n$ y por $(x'_1, \ldots, x'_m)$ su imagen en $\mathbb{R}^m$. Entonces,

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix},$$

que también se puede escribir en forma no matricial:

$$\left.\begin{array}{c} x'_1 = a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ x'_m = a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{array}\right\}$$

Ejercicio: ¿Cuál será la ecuación de la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuya matriz asociada es $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$?

Cálculo del núcleo y la imagen mediante su matriz asociada

Núcleo:

Los vectores del núcleo son los $\vec{v} \in V : A\vec{v} = \vec{0}_W$. Por tanto, basta con plantear el sistema:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

si es compatible determinado $\Rightarrow Ker(f) = \{\vec{0}\}$

si es compatible indeterminado $\Rightarrow Ker(f)$ se expresará en forma paramétrica

Imagen:

$Im(f)$ es el espacio generado por las columnas de A. Dichas columnas no tienen porqué formar una base de $Im(f)$. Para obtener dicha base habrá que suprimir las columnas que sean linealmente dependientes.

Ejercicio: Calcula una base del núcleo y otra de la imagen de la aplicación lineal definida por la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Matriz de una aplicación en bases cualesquiera

Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, B una base cualquiera de $\mathbb{R}^n$ y B' una base cualquiera de $\mathbb{R}^m$. Entonces, se define la matriz de f en bases B y B' como la matriz M que contiene en sus columnas las imágenes de los vectores de B, expresadas en coordenadas respecto de B'.

Ejemplo: Sea la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x + y, x - y, 0) \end{aligned}$$

$B = \{(1, 1), (1, -1)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y
$B' = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Calcula la matriz asociada de f en las bases B y B'.

MATRIZ DE UNA APLICACIÓN EN BASES CUALESQUIERA

Propiedades de M:

- La matriz de $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ en bases cualesquiera (M) es de tamaño $m \times n$.
- $rg(f) = dim(Im(f)) = rg(M)$
- $M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$, siendo $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ las coordenadas de $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ en la base B y $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ las coordenadas de su imagen $f(\vec{v})$ en la base B'.

Ejercicio: Dada la aplicación lineal f, hallar la imagen del vector $(5, 3)$ en bases canónicas y en las bases $B \equiv \{(1, 1), (1, -1)\}$ y $B' \equiv \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x + y, x - y, 0) \end{aligned}$$

Relación entre la matriz estándar y la matriz en bases cualesquiera

Sea $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ una aplicación lineal con matriz asociada A en bases canónicas. Sea B una base cualquiera de V, y B' una base cualquiera de W. Sean además:

- P: matriz de cambio de base de B a la b. canónica, en V (y por tanto, P^{-1} la matriz de paso de la b. canónica a B)
- Q: matriz de cambio de base de B' a la b. canónica, en W (y por tanto, Q^{-1} la matriz de paso de la b. canónica a B)

$$V \xrightarrow{\quad f \quad} W$$

$$\begin{tikzcd}
\text{b. canónica} \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] & \text{b. canónica} \arrow[d, shift right, "Q^{-1}"'] \\
\text{base B} \arrow[r, "M"] \arrow[u, shift right, "P"'] & \text{base B'} \arrow[u, shift right, "Q"']
\end{tikzcd}$$

$$M = Q^{-1}AP$$

También es posible cambiar de base sólo en el espacio inicial, o sólo en el final.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] & & W \\ \text{b. canónica} \arrow[rr, "A"] \arrow[drr, "M"'] & & \text{b. canónica} \arrow[d, shift right, "Q^{-1}"'] \\ & & \text{base B'} \arrow[u, shift right, "Q"'] \end{tikzcd}$$

$$M = Q^{-1}A$$

(P sería la matriz identidad)

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] & & W \\ \text{b. canónica} \arrow[rr, "A"] \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] & & \text{b. canónica} \\ \text{base B} \arrow[u, shift right, "P"'] \arrow[urr, "M"] & & \end{tikzcd}$$

$$M = AP$$

(Q sería la matriz identidad)

Ejemplo: Sea la aplicación lineal f para la cual ya hayamos su matriz en bases canónicas $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ en bases $B \equiv \{(1,1),(1,-1)\}$ y $B' \equiv \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$. Halla las matrices P y Q, y comprueba que se cumple la relación $M = Q^{-1}AP$.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\longmapsto (x+y+, x-y, 0) \end{aligned}$$

MATRICES EQUIVALENTES

- Dos matrices del mismo orden (cuadradas o rectangulares) A y B son equivalentes si se puede pasar de una a otra mediante operaciones elementales por filas y posiblemente también por columnas.
- Dos matrices A y B son equivalentes si son matrices de la misma aplicación lineal, en distintas bases.
- Dos matrices A y B son equivalentes si existen P y Q matrices cuadradas invertibles tales que $B = PAQ$.
- Dos matrices A y B son equivalentes si tienen la misma dimensión $m \times n$ y el mismo rango.

Ejemplo: Razonar las definiciones anteriores en las matrices A y B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

COMPOSICIÓN DE APLICACIONES

Sean f y g las aplicaciones lineales $f : V \longrightarrow W$ y $g : W \longrightarrow U$, se define la aplicación compuesta $h = g \circ f$, que consiste en aplicar f a cada vector $\vec{v} \in V$ y después g:

$$\begin{aligned} h : V \longrightarrow W &\longrightarrow U \\ v \longmapsto f(v) &\mapsto g(f(v)) \end{aligned}$$

Si A es la matriz de f y B la matriz de g, entonces BA es la matriz de h (en bases canónicas).

Ejercicio: Dadas las aplicaciones f y g y sus matrices en base canónica A y B, respectivamente, obtener la matriz de la aplicación compuesta:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, x + y, x - y) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) &\mapsto (x, x - y, z + t) \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

RECORDAMOS

Un ingeniero de recursos mineros se encarga de supervisar un proceso de extracción y refinamiento de minerales en una mina.

1. *La etapa de extracción transforma la materia prima en los minerales extraídos. Se tienen 5 materias primas correspondientes a 5 minerales.*
2. *La etapa de transporte lleva los minerales extraídos (5) desde la mina hasta la planta de refinamiento. Se deciden transportar solo 4 minerales.*
3. *La etapa de refinamiento transforma los minerales transportados (4) en tres productos refinados finales.*

¿Cómo puede planificar la producción considerando todo el proceso?

1. Extracción: aplicación lineal $\mathbb{R}^{\mathbf{5}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{5}}$, por tanto $\boldsymbol{A_5}$
2. Transporte: aplicación lineal $\mathbb{R}^{\mathbf{5}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{4}}$, por tanto, $\boldsymbol{B_{4\times 5}}$.
3. Refinamiento: aplicación lineal $\mathbb{R}^{\mathbf{4}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$, por tanto, $\boldsymbol{C_{3\times 4}}$.

La composición de aplicaciones $\boldsymbol{(CBA)_{3\times 5}}$, podría resumir todo el proceso y serviría para planificar la producción al mostrar cómo las materias primas (5) se transforman en productos finales (3).