TEMA 6: ENDOMORFISMOS Y DIAGONALIZACIÓN

Ana Casanueva Vicente

Dpto. de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación

13 de junio de 2024

Un ingeniero de recursos energéticos se encarga de optimizar la distribución de energía en una red eléctrica. Tiene datos sobre la interconexión entre diferentes nodos de la red y quiere analizar cómo se propagan las fluctuaciones de energía a lo largo de la red en respuesta a ciertos eventos, como la desconexión de una planta de energía.

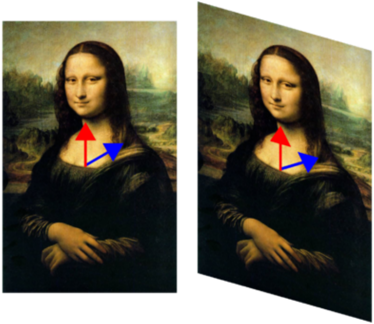
La red eléctrica tiene tres nodos principales y la matriz A representa la interconexión entre los nodos de la red, donde cada elemento de la matriz (a_{ij}) representa la cantidad de energía que fluye desde el nodo j al nodo i.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Podría obtener una matriz diagonal D que represente la capacidad de generación de energía en cada nodo de la red?

David Hilbert (1862-1943) introdujo a principios del siglo XX la noción de autovalores y autovectores

En esta transformación de la Mona Lisa, la imagen se ha deformado de tal forma que su eje vertical no ha cambiado. El vector rojo no ha cambiado de dirección (vector propio) ni de longitud (valor propio 1), mientras que el azul no es un vector propio porque ha cambiado de dirección



¿QUÉ ES UN ENDOMORFISMO?

Un **endomorfismo** es una aplicación lineal $f : V \longrightarrow V$ en la que el espacio inicial y el final son el mismo. La matriz de un endomorfismo será por tanto cuadrada $n \times n$, donde n es la dimensión de V.

$$V \xrightarrow{\quad f \quad} V$$

$$\begin{tikzcd}
\text{b. canónica} \arrow[rr, "A"] \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] & & \text{b. canónica} \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] \\
\text{base B} \arrow[rr, "M"] \arrow[u, shift right, "P"'] & & \text{base B} \arrow[u, shift right, "P"']
\end{tikzcd}$$

En un endomorfismo, la expresión $M = Q^{-1}AP$ se convierte en $M = P^{-1}AP$ ($A = PMP^{-1}$)

Recuerda que $dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = n \Rightarrow$ un endomorfismo será o bien inyectivo y suprayectivo a la vez, o bien ninguna de las dos cosas.

MATRICES SEMEJANTES

Dos matrices (cuadradas) asociadas al mismo endomorfismo en bases distintas, A y M, son **semejantes** si existe una matriz (cuadrada) invertible P tal que $M = P^{-1}AP$ ($\boldsymbol{A = PMP^{-1}}$)

Propiedades:

- $tr(A) = tr(M)$
- $det(A) = det(M)$

Diagonalización: Dada una matriz A, se trata de comprobar si existe otra matriz semejante a ella que sea diagonal, D, tal que se cumpla la relación $P^{-1}AP = D$ ($\boldsymbol{A = PDP^{-1}}$), es decir, dado un endomorfismo, se trata de encontrar una base en la cual la matriz del mismo sea diagonal. Para ello se utilizaremos los **valores y vectores propios** (o autovalores y autovectores, respectivamente).

Valores y vectores propios

Si un vector $\vec{v}$ no nulo cumple que $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ (con λ escalar), se dice que $\vec{v}$ es un **vector propio** (o autovector) de f, y que λ es su **valor propio** (o autovalor) asociado. Además, todos los vectores propios $\vec{v}$ asociados a λ forman un subespacio vectorial, V_λ, al que llamaremos **subespacio propio** de λ.

Ejemplos:

- En una homotecia, todos los vectores son vectores propios.
  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  $(x, y) \longmapsto (2x, 2y)$ Valor propio $\lambda = 2$
- La simetría respecto al plano XZ tiene valor propio 1 (con multiplicidad 2, degenerado) y -1 (simple).
  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
  $(x, y, z) \mapsto (x, -y, z)$
- En un giro de 45º (sentido antihorario, positivo) no hay valores ni vectores propios reales.
  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  $(x, y) \longmapsto (\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y)$

PROPIEDADES

Propiedades:

Sea A la matriz asociada a un endomorfismo, con $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Entonces:

- Los valores propios de A son los mismos que los de A^t: $A^t\vec{v} = \lambda\vec{v}$
- Si los valores propios de A son $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, los de αA son $\alpha\lambda_1, \ldots, \alpha\lambda_n$: $\alpha A\vec{v} = \alpha\lambda\vec{v}$
- Si los valores propios de A son $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, los de A^k son $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$: $A^k\vec{v} = \lambda^k\vec{v}$
- Si los valores propios de A son $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ y A tiene inversa, los valores propios de A^{-1} son $\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}$: $A^{-1}\vec{v} = \frac{1}{\lambda}\vec{v}$
- Si A es diagonal o triangular, sus valores propios son directamente los elementos de la diagonal.

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ es un problema no lineal.

$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow A\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \vec{v} \Rightarrow (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ Sist. Homogéneo

El sistema será SCI (soluciones distintas de la trivial) si: $\boxed{\mid A - \lambda I \mid = 0}$

Procedimiento general para el cálculo de valores y vectores propios

1. $\mid A - \lambda I \mid$ es el **polinomio característico** de A, de grado n en λ. Sus raíces son los valores propios.
   Nota: Puede haber valores propios cuya multiplicidad sea mayor que 1. Por ejemplo, en el polinomio característico $(x-4)^3(x+5)$, el autovalor 4 tiene multiplicidad algebraica 3 (degenerado), y el -5 tiene multiplicidad algebraica 1 (simple).
   Notación: $m(4) = 3, m(-5) = 1$
2. Para cada valor propio λ_i, las soluciones del sistema compatible indeterminado $(A - \lambda_i I)\vec{v}_i = \vec{0}$ serán los autovectores $\vec{v}_i$ de λ_i, que dan lugar al subespacio propio asociado a λ_i, denominado V_{λ_i}.
   - V_{λ_i} coincide con $Ker(A - \lambda_i I)$.
   - $dim(V_{\lambda_i})$ es la multiplicidad geométrica de λ_i.

   Nota: $1 \leq dim(V_{\lambda_i}) \leq m(\lambda_i)$

Ejemplo:

Dado el endomorfismo

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \longmapsto (3x + 2y, y)$

calcula sus autovalores y autovectores asociados.

```
A=[3 2; 0 1]
lambda=eig(A)
[v, D]=eig(A)  % v contiene los vectores propios normalizados por columnas, D tiene los
valores propios en la diagonal
Importante: eig devuelve D aunque A no sea diagonalizable
Alternativas a eig:
syms vp
lambda=double(solve(det(A-vp*eye(2))))  % Raíces del polinomio característico
syms x
lambda=double(solve(charpoly(A,x)))  % Raíces del polinomio característico
 % Base del subespacio propio asociado a λ1 (en columnas):
V1=null(A-lambda(1)*eye(2))
 % Base del subespacio propio asociado a λ2 (en columnas).
V2=null(A-lambda(2)*eye(2)) % Base del subespacio propio de λ2
```

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

Dada A la matriz de un endomorfismo f en base canónica, nuestro objetivo es encontrar otra base en la que la nueva matriz de f sea diagonal. Llamaremos a esa matriz D.

DIAGONALIZACIÓN (I)

Si B es una base formada por vectores propios $\Rightarrow$ la matriz de f en base B es diagonal, D

$$V \xrightarrow{\quad f \quad} V$$

$$\begin{tikzcd}
\text{b. canónica} \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] & \text{b. canónica} \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] \\
\text{base B (vectores propios)} \arrow[u, shift right, "P"'] \arrow[r, "D\ (diagonal)"] & \text{base B (vectores propios)} \arrow[u, shift right, "P"']
\end{tikzcd}$$

En estas condiciones, la expresión general $M = Q^{-1}AP$ se convierte en $D = P^{-1}AP$, ($A = PDP^{-1}$)

Ejemplo: Dado el endomorfismo

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \longmapsto (3x + 2y, y)$, hallar la matriz diagonal D de f.

```
A=[3 2; 0 1]
[v, D]=eig(A)
```

DIAGONALIZACIÓN (II)

Diagonalizar una matriz cuadrada A es encontrar una matriz diagonal D (que será semejante a A) y una matriz P (matriz de cambio de base) tales que se cumpla la relación $A = PDP^{-1}$

- La diagonal de D estará formada por los valores propios.
- P es una matriz que tiene, en columnas, los vectores propios asociados a los valores propios (en correspondencia con el orden en el que aparecen en D).

Sea A la matriz de un endomorfismo $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$. Se trata de encontrar una base en la cual A sea diagonalizable.

Procedimiento general para diagonalizar un endomorfismo (I)

Comprobar si A es diagonalizable

1. Calcular $\mid A - \lambda I \mid$ (polinomio característico de A) y obtener los valores propios.
2. Para cada λ_i ($i = \{1, ..., r\}$), hallar una base del subespacio propio asociado V_{λ_i} y obtener su dimensión $dim(V_{\lambda_i}) = n - rg(A - \lambda I)$
3. A será diagonalizable $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r} dim(V_{\lambda_i}) = n$ (siendo n la dimensión de V)

Nota: Toda matriz real simétrica es diagonalizable, y todos sus valores propios son reales.

PROCEDIMIENTO GENERAL PARA DIAGONALIZAR UN ENDOMORFISMO (II)

Si efectivamente A es diagonalizable:

1. Los valores propios serán los elementos de la diagonal de D.
2. Unir todas las bases de los subespacios propios V_{λ_i} para formar una base de vectores propios del espacio total V. La matriz P es la que contiene en sus columnas esa base de vectores propios.
3. **Atención:** Para que D sea $n \times n$ se necesitarán n valores propios (n raíces del polinomio característico), así que en la diagonal habrá que repetir cada valor propio λ_i tantas veces como indique $dim(V_{\lambda_i})$. Además, ha de respetarse el mismo orden al colocar los valores propios en la diagonal de D y los vectores propios en las columnas de P.

Todo lo anterior garantiza que se cumpla $A = PDP^{-1}$

Ejemplos:

- Comprueba si es diagonalizable la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
- Comprueba si es diagonalizable el siguiente endomorfismo:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x - 4y, -y, 2y + z) \end{aligned}$$

En caso de serlo, obtén las matrices D y P y comprueba que se cumple la relación $A = PDP^{-1}$. ¿Qué pasa con la traza y el determinante de las matrices A y D?

Uso de la diagonalización para el cálculo de las potencias de una matriz

Si A es una matriz diagonalizable, el cálculo de A^k se simplifica notablemente, ya que $A = PDP^{-1}$. Por tanto:

$$A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k \text{ veces}} = \underbrace{PDP^{-1} \cdots PDP^{-1}}_{k \text{ veces}} = P\,\underbrace{D \cdots D}_{k \text{ veces}}\,P^{-1}$$

Es decir, $A^k = PD^kP^{-1}$. El problema se reduce por tanto a encontrar las matrices P y D.

Ejemplo: Calcula A^9, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

RECORDAMOS

Un ingeniero de recursos energéticos se encarga de optimizar la distribución de energía en una red eléctrica. Tiene datos sobre la interconexión entre diferentes nodos de la red y quiere analizar cómo se propagan las fluctuaciones de energía a lo largo de la red en respuesta a ciertos eventos, como la desconexión de una planta de energía.

La red eléctrica tiene tres nodos principales y la matriz A representa la interconexión entre los nodos de la red, donde cada elemento de la matriz (a_{ij}) *representa la cantidad de energía que fluye desde el nodo* j *al nodo* i.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Podría obtener una matriz diagonal D *que represente la capacidad de generación de energía en cada nodo de la red?*

Se podría calcular esa matriz diagonal diagonalizando el endomorfismo, obteniéndose los valores propios 1 (doble) y 9, que son los elementos de la diagonal.