Tema 7: Geometría. Aplicaciones

Ana Casanueva Vicente

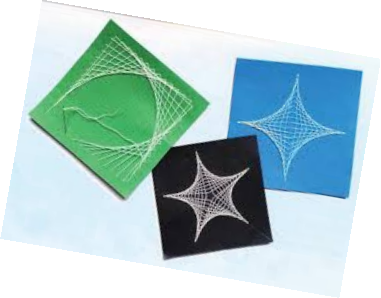
Dpto. de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación

13 de junio de 2024

Universidad de Cantabria

Una ingeniera de recursos mineros se encarga de procesar datos de exploración sísmica para identificar estructuras geológicas subterráneas de interés, como vetas de minerales. Tiene un conjunto de datos de exploración sísmica que consiste en un conjunto de puntos en el espacio tridimensional (vectores) que representan las reflexiones de las ondas sísmicas a diferentes profundidades.
¿Puede conocer detalles sobre los planos de reflexión con estos datos?

Mary Everest Boole (1832-1916) desarrolló las cartas o tarjetas Boole, que ayudan a aprender la geometría de los ángulos y espacios usando el arte del diseño geométrico a través de clases de costura



Aplicaciones con interpretación geométrica sencilla

- Identidad

$$\begin{aligned} id : \mathbf{V} &\longrightarrow \mathbf{V} \\ u &\longmapsto u \end{aligned}$$

- Nula

$$\begin{aligned} n : \mathbf{V} &\longrightarrow \mathbf{W} \\ u &\longmapsto \mathbf{0} \end{aligned}$$

- Giros

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x - \tfrac{\sqrt{2}}{2}y, \tfrac{\sqrt{2}}{2}x + \tfrac{\sqrt{2}}{2}y\right)$$

- Reflexiones o simetrías

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$$

- Homotecias

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto (1{,}01x, 1{,}01y)$$

- Proyecciones

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto (x, 0, z)$$

APLICACIONES CON INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA SENCILLA

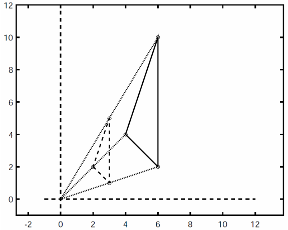
Escalamiento uniforme o isótropo (homotecia)

$f(\vec{v}) = k\vec{v}$ con $k > 0 \in \mathbb{R}$

Matriz asociada $A = kI$

En $\mathbb{R}^2$: $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

- si $k < 1$: compresión o contracción
- si $k > 1$: dilatación o expansión
- si $k = 1$: identidad



Escalamiento de factor 2 en $\mathbb{R}^2$

Ejemplos:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \rightsquigarrow (1{,}10x, 1{,}10y)$$

Dilatación de un $10\,\%$ en el plano

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \rightsquigarrow (0{,}8x, 0{,}8y)$$

Contracción de un $20\,\%$ en el plano

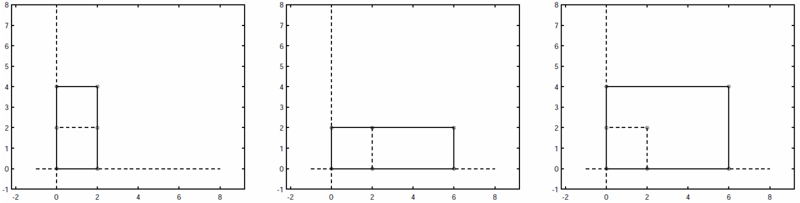
APLICACIONES CON INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA SENCILLA

Escalamiento no uniforme o anisótropo

k puede cambiar en las n direcciones independientes.

- Contracción/dilatación unidireccional vertical en $\mathbb{R}^2$:
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ ky \end{pmatrix}$
- Contracción/dilatación unidireccional horizontal en $\mathbb{R}^2$:
  $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ y \end{pmatrix}$
- Distintos escalamientos en $\mathbb{R}^2$:
  $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ k'y \end{pmatrix}$

Ejemplo: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y) \rightsquigarrow (3x, 2y)$



Aplicaciones con interpretación geométrica sencilla

Simetría respecto del origen

$f(\vec{v}) = -\vec{v}$ Matriz asociada $A = -I$

Proyecciones en $\mathbb{R}^2$

- Proyección ortogonal sobre el eje OX

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightsquigarrow (x, 0) \end{aligned}$$

- Proyección ortogonal sobre el eje OY

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightsquigarrow (0, y) \end{aligned}$$

ISOMETRÍAS

ISOMETRÍAS

Las isometrías o transformaciones ortogonales son transformaciones invertibles que preservan la manera de medir, es decir, conservan la norma del vector sobre el que se aplican: $|f(\vec{v})| = |\vec{v}| \quad \forall \vec{v} \in V$

Si el espacio euclídeo V está referido a una base ortonormalizada, la matriz de la isometría será ortogonal.

- Conserva el producto escalar $f(\vec{u}) \cdot f(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$
- Es una aplicación biyectiva.
- Transforma bases ortonormales en bases ortonormales, es decir, si B es una base ortonormal de V entonces $f(B)$ es una base ortonormal de V.
- Por ser la matriz ortogonal, su determinante vale 1 (movimientos directos: identidad, traslación, giro) ó -1 (movimientos indirectos: simetrías) y los únicos autovalores reales de f son 1 y -1.
- f^{-1} es una transformación ortogonal.
- La composición de f con cualquier transformación ortogonal es una transformación ortogonal.

Isometrías

En $\mathbb{R}^2$, las isometrías posibles son las reflexiones respecto de un eje de simetría, traslaciones y los giros.

- Giros (rotaciones)

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \rightsquigarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y, \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)$$

Giro de $\frac{\pi}{4}$ (en sentido antihorario) en el plano

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \rightsquigarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y, -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)$$

Giro de $\frac{\pi}{4}$ (en sentido horario) en el plano

- Reflexiones (simetría axial)

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \rightsquigarrow (x,-y)$$

Simetría respecto al eje OX

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \rightsquigarrow (-x,y)$$

Simetría respecto al eje OY

La composición de dos rotaciones es otra rotación de amplitud la suma de las amplitudes.
La composición de dos simetrías es una rotación, que es la identidad si las simetrías coinciden.
La composición de una rotación y una simetría es una simetría.

GIROS (ROTACIONES)

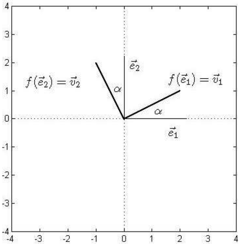
Giro o rotación en $\mathbb{R}^2$ con centro en el origen y ángulo α

$$f(\vec{e}_1) = cos\ \alpha\ \vec{e}_1 + sen\ \alpha\ \vec{e}_2$$
$$f(\vec{e}_2) = -sen\ \alpha\ \vec{e}_1 + cos\ \alpha\ \vec{e}_2$$

MATRIZ DE GIVENS

Dado un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, la aplicación que lo rota un ángulo α (en radianes) con respecto al origen, convirtiéndolo en $\vec{v}'$, tiene por matriz asociada:

$$G = \begin{pmatrix} cos\ \alpha & -sen\ \alpha \\ sen\ \alpha & cos\ \alpha \end{pmatrix}$$



Giro de centro en $(0,0)$ y ángulo $0 \leq \alpha \leq \pi$ (sentido antihorario o positivo)

Observación: el giro de $\alpha = 0$ corresponde a la identidad y el giro de $\alpha = \pi$ corresponde a la simetría respecto del origen.

GIROS (ROTACIONES)

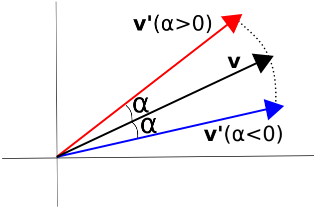
MATRIZ DE GIVENS

Dado un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, la aplicación que lo rota un ángulo α (en radianes) con respecto al origen, convirtiéndolo en $\vec{v'}$, tiene por matriz asociada:

$$G = \begin{pmatrix} cos\ \alpha & -sen\ \alpha \\ sen\ \alpha & cos\ \alpha \end{pmatrix}$$

Propiedades:

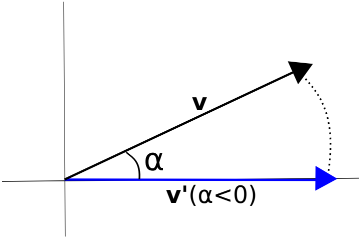
- G es ortogonal ($G^t = G^{-1}$), con $|G| = 1$
- $G_\alpha = G^t_{-\alpha}$



Ejercicio: En $\mathbb{R}^2$, gira $\vec{v} = (2, 1)$ un ángulo de $30°$ (en sentido horario) utilizando la matriz de Givens adecuada. ¿Que vector obtienes? Compara la matriz de Givens utilizada con la que resulta de girar un vector $30°$ en sentido antihorario. Comprueba que la norma se conserva después de los dos giros.

GIROS (ROTACIONES)

En $\mathbb{R}^2$, las matrices de Givens también se pueden utilizar para llevar un vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ sobre el semieje $OX^{\pm}$ sin más que encontrar el ángulo α adecuado para que $\vec{v'} = (\pm|\vec{v}|, 0)$. Del mismo modo, también podríamos llevar $\vec{v}$ sobre el semieje $OY^{\pm}$ sin más que encontrar el ángulo α tal que $\vec{v'} = (0, \pm|\vec{v}|)$



Ejercicio: En $\mathbb{R}^2$, halla la matriz de Givens que sitúa al punto $(1, 2)$ sobre los semiejes *a)* OX^+, *b)* OX^-, *c)* OY^+ y *d)* OY^-. En todos esos casos, ¿cuáles son las coordenadas del punto resultante?

GIROS (ROTACIONES)

Para llevar $\vec{v}$ sobre el semieje OX^+ hay que resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} -v_2 & v_1 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sen\alpha \\ cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{v}| \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
% Semieje OX+
v=[1 2]'
A=[-v(2) v(1); v(1) v(2)]
b=[norm(v) 0]'
sol=linsolve(A, b)
% Matriz de Givens
G = [sol(2) -sol(1); sol(1) sol(2)]
G' - inv(G) % G es ortogonal
det(G) % vale 1
v1=G*v
figure(1)
quiver(0,0, v(1), v(2),'k',...)
hold on
quiver(0,0, v1(1), v1(2),'r',...)
...
```

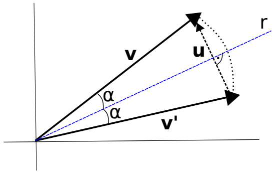
REFLEXIONES (SIMETRÍA AXIAL)

MATRIZ DE HOUSEHOLDER

Dado un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, la aplicación que lo refleja respecto al eje de simetría r (con r pasando por el origen y $\vec{v}$ no ortogonal a r), obteniendo $\vec{v'}$, tiene por matriz asociada $H = I_2 - 2\dfrac{\vec{u}\vec{u}^t}{|\vec{u}|^2}$, donde $\vec{u}$ es cualquier vector columna ortogonal a r.

Propiedades:

- H es simétrica ($H = H^t$)
- H es ortogonal ($H^t = H^{-1}$), con $|H| = -1$
- H es involutiva ($H^2 = I$)



Ejercicio: En $\mathbb{R}^2$, refleja el vector $\vec{v} = (2, 1)$ con respecto al subespacio S cuya ecuación implícita es $x - y = 0$ mediante la aplicación de una matriz de Householder H. ¿Qué vector obtienes? ¿Qué ocurre al aplicarle H a cualquier vector $\vec{u} \perp S$? ¿Y al aplicársela a un vector cualquiera de S?

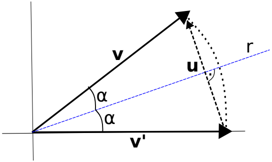
REFLEXIONES (SIMETRÍA AXIAL)

Ejercicio: En $\mathbb{R}^2$, refleja el vector $\vec{v} = (2, 1)$ con respecto al subespacio S cuya ecuación implícita es $x - y = 0$.

```
% Reflexión respecto de x=y
u=[1 -1]'
% Matriz de reflexión o Householder
H=eye(2) - 2*(u*u'/norm(u)^2)
H' - inv(H) % H es ortogonal
H^2 - eye(2) % H es involutiva
v1=[2 1]'
v2=H*v1
figure(2)
quiver(0,0, v1(1), v1(2),'k',...)
hold on
quiver(0,0, v2(1), v2(2),'r',...)
...
```

REFLEXIONES (SIMETRÍA AXIAL)

En $\mathbb{R}^2$, podríamos llevar el vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ sobre el semieje $OX^{\pm}$, convirtiéndolo por tanto en el $\vec{v'} = (\pm|\vec{v}|, 0)$, mediante la aplicación de una matriz de Householder. El problema se reducirá a encontrar el eje de simetría adecuado; o lo que es lo mismo, a encontrar el vector $\vec{u}$ adecuado, que podrá ser simplemente $\vec{v} - \vec{v'}$ (o el $\vec{v'} - \vec{v}$). Siguiendo un razonamiento análogo también podríamos llevar $\vec{v}$ sobre el semieje $OY^{\pm}$, obteniendo el $\vec{v'} = (0, \pm|\vec{v}|)$



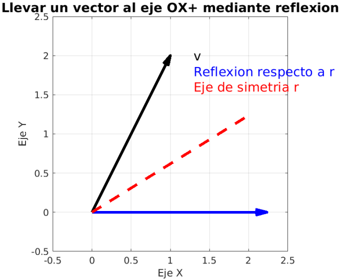
Nota: Date cuenta de la diferencia que existe entre este procedimiento y una proyección ortogonal sobre el eje OX (o el OY), en la que **no** se mantiene la norma del vector de partida.

Ejercicio: En $\mathbb{R}^2$, halla la matriz de Householder que sitúa al punto $(1, 2)$ sobre los semiejes *a)* OX^+, *b)* OX^-, *c)* OY^+ y *d)* OY^-. En todos esos casos, ¿cuáles son las coordenadas del punto resultante?

Reflexiones (simetría axial)

Ejercicio: En $\mathbb{R}^2$, halla la matriz de Householder que sitúa al punto $(1, 2)$ sobre el semieje OX^+

```
v = [1 2]' % vector inicial
vprima = [norm(v) 0]' % vector final
u = v-vprima % ortog. al eje de reflex.
% Matriz de Householder que buscamos
H = eye(2) - 2*(u*u'/norm(u)^2)
H*v % coincide con vprima
figure(3)
quiver(0,0, v(1), v(2),'k',...)
hold on
quiver(0,0, vprima(1),
vprima(2),'b',...)
quiver(0,0, u(2), -u(1),'r',...)
...
```

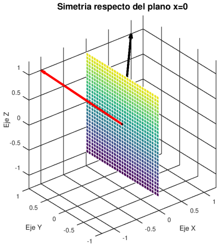


ISOMETRÍAS EN $\mathbb{R}^3$

Giro en $\mathbb{R}^3$

Sea $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ y α un ángulo cualquiera. El giro del ángulo α sobre el semieje de giro generado por $\vec{e}_1$ y con respecto a la orientación dada por la base B tiene como matriz asociada:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\ \alpha & -sen\ \alpha \\ 0 & sen\ \alpha & cos\ \alpha \end{pmatrix}$$



Simetrías en $\mathbb{R}^3$

Simetría axial (giro de $\alpha = \pi$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Simetría por un plano

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Simetría central

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

RECORDAMOS

Una ingeniera de recursos mineros se encarga de procesar datos de exploración sísmica para identificar estructuras geológicas subterráneas de interés, como vetas de minerales. Tiene un conjunto de datos de exploración sísmica que consiste en un conjunto de puntos en el espacio tridimensional (vectores) que representan las reflexiones de las ondas sísmicas a diferentes profundidades.
¿Puede conocer detalles sobre los planos de reflexión con estos datos?

Utilizando **matrices de reflexión de Householder**, puede conocer las características de los planos de reflexión. Así será capaz de identificar estructuras geológicas.