

Álgebra lineal y geometría

Tema 5: Aplicaciones Lineales

Última modificación: 27 de noviembre de 2023

5.1 Probar si las siguientes aplicaciones son lineales:

$$\text{a) } f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \rightsquigarrow (x + 1, y + 1, x + 1)$$

$$\text{b) } f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \rightsquigarrow (y, x)$$

5.2 Dada la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) \rightsquigarrow (x + 2y + t, y + 3z - t, 0)$$

a) Dar una base de la imagen de los siguientes subespacios:

- $S = \langle (1, 0, 1, 0), (2, 3, 0, -1) \rangle$
- $T = \langle (0, 0, 3, 2), (4, 6, 3, -1), (1, 0, 0, 2) \rangle$

b) Dar una base de $\text{Ker}(f)$ c) Dar una base de $\text{Im}(f)$

5.3 Clasificar (inyectiva, suprayectiva, biyectiva) las siguientes aplicaciones:

$$\text{a) } f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z, t) \rightsquigarrow (x - z, y - t)$$

$$\text{b) } f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) \rightsquigarrow (z + 2x, z + 2x, -x - y - z, y)$$

$$\text{c) } f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \rightsquigarrow (-x - y, 2x + 2y, z)$$

$$\text{d) } f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \rightsquigarrow (3x + y, 3y + z, 3z)$$

5.4 Halla una base de la imagen del subespacio vectorial H de \mathbb{R}^3 dado por la ecuación $z = 2y$, mediante la aplicación lineal cuya matriz estándar es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.5 a) Dada la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) \rightsquigarrow (x + y + z, z, y, x)$$

halla todos los vectores de \mathbb{R}^3 cuya imagen sea $(4, 1, 3, 0)$

b) Dada la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \rightsquigarrow (x + y, y - z)$$

halla todos los vectores de \mathbb{R}^3 cuya imagen sea $(1, 1)$

5.6 Dada la aplicación lineal:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \rightsquigarrow (2x + 3z, x + 2y)$$

a) hallar la matriz de f tomando como bases $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ en \mathbb{R}^3 y la canónica en \mathbb{R}^2 .b) hallar la matriz de f tomando como bases la canónica en \mathbb{R}^3 y $B' = \{(-2, 0), (2, 1)\}$ en \mathbb{R}^2 .

5.7 Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que la imagen de $(1,0)$ es $(5,2)$ y la imagen de $(0,1)$ es $(7,3)$, hallar la ecuación de f^{-1} .

5.8 Determina la ecuación de la recta cuyos puntos permanecen fijos en la transformación lineal $g(x, y) = \left(\frac{3x+y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$. Hallar la matriz estándar asociada a esta aplicación.

5.9 Ver si son equivalentes las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

5.10 Dadas las aplicaciones lineales f y g

■ $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$
 $(x, y, z) \rightsquigarrow (x + y + z, z, y, x)$

■ $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z, t) \rightsquigarrow (x - 2z, y - 2t)$

Halla la aplicación compuesta $h = g \circ f$